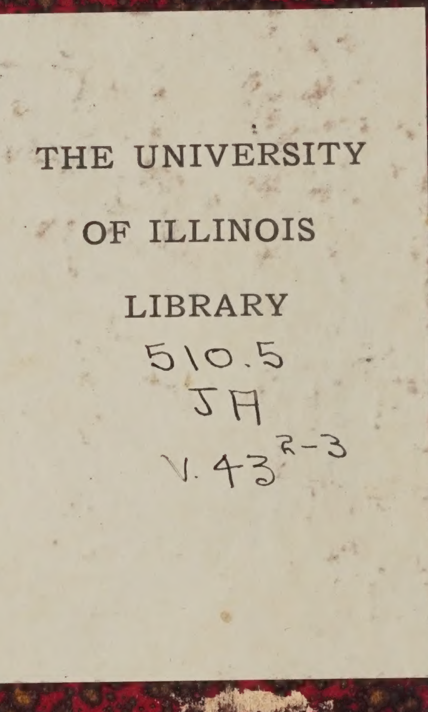






Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Karl Ohrtmann und **Felix Müller.**

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von **Albert Wangerin** und **Erich Salkowski** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben
von
Emil Lampe.

Band 42. Jahrgang 1911.
(In 3 Heften.)
Heft 2.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1913.

Bogen 32 bis 45.

Inhaltsverzeichnis.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittlung der Verlagsbuchhandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W. 15, Fasanenstraße 64.

G. Combebiac. Sur les postulats de l'ordre linéaire ouvert. Ens. math. **13**, 280-291.

Es werden verschiedene Formulierungen der linearen Anordnungsaxiome gegeben und Beziehungen zwischen ihnen aufgestellt. Die Axiome enthalten mehr als die drei ersten bei Hilbert, da sie auch den Satz von Moore liefern, der im Hilbertschen System mit dem (ebenen) Axiom von Pasch bewiesen wird. C.

P. Predella. Saggio di geometria non-archimedea. Batt. G. **49** [(3) 2], 281-299.

Der Verf. konstruiert eine nichtarchimedische Geometrie auf rein geometrischer Grundlage im euklidischen Raum. Auf der Geraden wird jede parabolische Projektivität „Punkt" genannt; analog werden neue Gerade und Ebenen definiert. Nach Aufstellung der hier geltenden Sätze der Verknüpfung und Anordnung gelingt es, durch Einführung des Begriffes Doppeldifferenz („bidifferenza") neben dem Doppelverhältnis eine projektive Geometrie zu begründen, durch direkte Definition der Gleichheit von Strecken und Winkeln eine metrische, in der sowohl die Strecken, als auch die Winkel ein nichtarchimedisches Größensystem bilden. C.

D. M. Y. Sommerville. Bibliography of non-euclidean geometry. London: Harrison & Sons. XII u. 403 S.

Das vorliegende Werk war als eine Fortsetzung und Ergänzung der vor dreißig Jahren erschienenen Bibliographie von G. B. Halsted gedacht. Es umfaßt jetzt alles, was seit dem 4. Jahrhundert v. Chr. bis zum Ende des Jahres 1910 über die Theorie der Parallelen, nichteuklidische Geometrie, Grundlagen der Geometrie und den n-dimensionalen Raum veröffentlicht worden ist. Die Gesamtzahl der aufgeführten Publikationen beträgt etwa 4000; sie sind nach drei verschiedenen Gesichtspunkten geordnet: chronologisch, sachlich und nach Autoren. Der chronologische Index ist durch zahlreiche Verweise, die von einem Artikel auf nahe verwandte deuten, besonders brauchbar gemacht. Das Sachregister benutzt im ganzen das Einteilungsprinzip des „Répertoire bibliographique". Im Autorenverzeichnis sind dem Namen, wenn möglich, Geburts- und Todesjahr des Verf. beigefügt, dazu die Titel der bezüglichen Schriften in verkürzter Form. Das Werk, in dem eine Unsumme von Arbeit steckt, wird jedem willkommen sein, der sich mit dem Gegenstand eingehender beschäftigt. Sk.

J. Rose. Sur la géométrie non euclidienne (Métagéométrie). Wisk. Tijdschr. **7**, 183-192; **8**, 21-29, 103-112.

In dem ersten Teil dieser Arbeit wird ein historischer Überblick gegeben. In dem zweiten Teil findet man eine elementare Darstellung der drei Geometrien. In dem dritten Teil wird die Lobatschewskijsche und die Riemannsche analytische Geometrie behandelt, sodann die Flächen- und Volumen-

messung, während schließlich einige allgemeine Betrachtungen über die Berechtigung der Metageometrien vorgeführt werden. Sch.

C. Vörös. Elementoj de la geometrio absoluta. Budapest: L. Kókai, 106 S. 8° [Esperanto.]

Dieses Lehrbuch besteht aus drei Teilen:

I. Ebene Geometrie. Die vom Parallelenaxiom unabhängigen Sätze der elementaren euklidischen Geometrie werden vorausgesetzt, und nun werden die Sätze über Winkelsumme im Dreieck und das Schneiden und Nichtschneiden der Geraden hergeleitet. Dann: Hyperbolische Geometrie (Parallelen, uneigentliche Elemente), Elliptische Geometrie, Kreis, Konstruktionen (mit Instrumenten, die jede Art von Kreisen in der hyperbolischen Geometrie zu zeichnen gestatten).

II. Trigonometrie. Es werden, wenn man so sagen darf, trigonometrische Funktionen der Strecken und Winkel eingeführt, mit diesen wird die allgemeine Trigonometrie aufgebaut und diese dann für die drei Geometrien spezialisiert.

III. Elemente der Raumgeometrie. Hyperbolische Raumgeometrie (Parallelen, die verschiedenen Arten von Kugeln, uneigentliche Ebenen), elliptischer Raum.

Anhang. Elliptische und sphärische Geometrie.

(Vgl. F. d. M. **41**, 539, 1910.) C.

W. B. Frankland. Non-euclidean geometry. Nature **87**, 315, 347.

Der Verf. ist in der Lobatschevskijschen Geometrie auf Schwierigkeiten gestoßen, die er der Öffentlichkeit unterbreitet. Lp.

D. M. Y. Sommerville. Non-euclidean geometry. Nature **87**, 450.

Die Franklandschen Bedenken, die von dem Bertrandschen Beweise des Parallelenaxioms ausgehen, werden unter anderem durch den Verweis auf die Mengenlehre weggeräumt. Lp.

W. H. Young. On the analytical basis of non-euclidean geometry. American J. **33**, 249-286.

Eine von Killing skizzierte Begründungsweise der drei Geometrien wird hier mit den Hülfsmitteln der modernen Analysis des Reellen ausführlich und streng durchgeführt. Der Grundgedanke besteht darin, daß unter den trigonometrischen Funktionen eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck die Grenzwerte verstanden werden, denen die Quotienten der Seiten zustreben, wenn die dem Winkel gegenüberliegende Seite, immer senkrecht auf der andern Kathete bleibend, gegen den Scheitel rückt. Außer den trigonometrischen Funktionen wird die Länge des Kreises vom Radius r als Funktion von r studiert und ihre

Differenzierbarkeit nachgewiesen. Die Arbeit gipfelt in der Aufstellung der Sinus- und Cosinussätze für die drei Geometrien. C.

H. Liebmann. Die elementaren Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. **Deutsche Math.-Ver. 20, 56-69.**

Es wird gezeigt, wie man in der hyperbolischen Geometrie die Verbindungslinie zweier Punkte in den sechs Fällen, wo sie im Endlichen ist, durch elementare Konstruktionen im Endlichen finden kann. Dazu werden die Fundamentalaufgaben: zu gegebenem Lot den Parallelwinkel zu finden und umgekehrt, mittels einiger merkwürdigen Punkte im Dreieck und eines Satzes von Bolyai gelöst, zu dessen Beweis, da trigonometrische Formeln, sowie räumliche und Stetigkeitsaxiome ausgeschlossen sind, ein Satz von Hjelmslev gute Dienste leistet. (Vgl. Liebmann, Leipziger Berichte **62**, 35-41; F. d. M. **41**, 539 f., 1910.) C.

G. H. Bryan. Euclid's postulate as a property of matter. **Math. Gazette 6, 124-127.**

Der Verf. will die Gedankenreihe fortsetzen, die Carslaw in Edinb. M. S. Proc. 28, 95-120 begonnen hat (F. d. M. **41**, 539, 1910). Er meint, in seinem Aufsatze bewiesen zu haben, „daß das euklidische Parallelenpostulat nicht als eine Eigenschaft des Raumes, sondern vielmehr als eine der Materie anzusehen ist. Es ist nämlich möglich, nichteuklidische Geometrien in dem gewöhnlichen euklidischen Raume durch die Annahme passender Definitionen für Abstand und Verrückung herzustellen. Was das Experiment allein zeigen kann, ist die Unverträglichkeit solcher Definitionen mit den Begriffen Abstand und Verrückung, die aus unserer Erfahrung an materiellen Körpern hergeleitet werden." Lp.

W. Blaschke. Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. I. II. **Zs. f. Math. u. Phys. 60, 61-91.**

Durch eine bestimmte, auch in der darstellenden Geometrie angewandte Zuordnung der Geraden des Raumes auf geordnete Punktepaare einer Ebene gelangt man zur Darstellung der Bewegungen und Umlegungen in dieser Ebene durch Punkte und Ebenen des Raumes. Führt man nun für den Raum eine projektive Maßbestimmung ein, bei der das absolute Gebilde aus zwei konjugiert-imaginären Ebenen und zwei auf ihrer Schnittgeraden gelegenen konjugiert-imaginären Punkten besteht, so wird die Metrik der ebenen Kinematik abgebildet auf die Metrik dieser räumlichen Geometrie, die der Verf. quasielliptisch nennt, weil sie aus der gewöhnlichen elliptischen Geometrie durch einen passenden Grenzübergang entsteht. Z. B.: Das „Urachsenkreuz" der Ebene gehe bei zwei Bewegungen in σ und σ' über, dann ist der halbe Drehwinkel, der σ und σ' zur Deckung bringt, gleich der Quasientfernung der zu σ und σ' gehörenden Punkte. Man kann auch die Gruppe der Kollineationen des Raumes in der ebenen Kinematik deuten, sowie endlich eine Gruppe von Transforma-

tionen, die man die Gruppe der Inversionen der quasielliptischen Geometrie nennen kann. Besonders interessant versprechen die Anwendungen für die Differentialgeometrie zu werden (Zuordnung von Polbahn und Polkurve einer kontinuierlichen Bewegung zu den Tangenten einer krummen Linie des quasielliptischen Raumes), die in einer weiteren Arbeit behandelt werden sollen.
D.

K. OGURA. On euclidean image of non-euclidean geometry. **Tokyo Math. Ges. (2) 6, 158-161.**

Die Transformation, welche die W e l l s t e i n sche Abbildung des nichteuklidischen Raumes auf den euklidischen in die K l e i n - C a y l e y sche überführt, gestattet, aus bekannten Sätzen andere herzuleiten. So ergibt sich, um nur ein Beispiel zu nennen, eine Beziehung der P o n c e l e t schen Schließungssätze für Polygone zwischen zwei Kegelschnitten zu den S t e i n e r schen für Kreisreihen zwischen zwei Kreisen. C.

S. NAKAGAWA. Über die gemeinsame Normale zweier Ebenen. **Tokyo Math. Ges. (2) 6, 122-123.**

Beweis, daß zwei sich nicht schneidende und nicht parallele Ebenen des hyperbolischen Raumes stets eine gemeinsame Normale besitzen. Sk.

H. BECK. Ein Gegenstück zur projektiven Geometrie. **Arch. der Math. u. Phys. (3) 18, 43-53.**

Den eigentlichen Punkten des euklidischen R_3 wird unter Benutzung pentasphärischer Koordinaten ein uneigentlicher Punkt hinzugefügt und dann die Gruppe der ∞^{10} konformen Transformationen des Raumes studiert. Analog der Untergruppe der ∞^7 Ähnlichkeitstransformationen (d. h. der konformen Transformationen, die den uneigentlichen Punkt in sich überführen) werden Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen definiert, das sind die automorphen konformen Transformationen einer Kugel, die sich nicht auf einen Punkt reduziert. Je nachdem die Kugel null- oder einteilig ist, hat man es mit „sphärischer“ oder „pseudopshärischer“ Geometrie zu tun. C.

H. BECK. Hyperbolische und pseudosphärische Geometrie des Raumes. **Arch. der Math. u. Phys. (3) 18, 220-229.**

Die Bewegungsgruppe der pseudosphärischen Geometrie des Raumes ist die der automorphen konformen Transformationen einer einteiligen Kugel. Unter fortwährender Gegenüberstellung dieser Geometrie und der hyperbolischen wird die Gruppe der Bewegungen und Umlegungen in beiden studiert. Der wesentlichste Unterschied ist die Existenz der Spiegelung an der absoluten Kugel (Inversion), die deren Inneres und Äußeres vertauscht, in der pseudosphärischen

Geometrie, der in der hyperbolischen Geometrie nichts entspricht. Vollständigen Isomorphismus kann man herstellen, indem man sich in der pseudosphärischen Geometrie auf „eigentliche“ Bewegungen beschränkt, oder indem man den hyperbolischen Raum doppelt denkt, als zwei Blätter, die längs der absoluten Fläche zusammenhängen. C.

O. Hölder. Streckenrechnung und projektive Geometrie. Leipz. Ber. **63**, 65-183.

Der Verf. benutzt für die Begründung der projektiven Geometrie die Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome und das Parallelenpostulat, sowie den sogenannten Pascalschen Satz für ein beliebiges Geradenpaar. Unter diesen Voraussetzungen wird die Entwicklung besonders vereinfacht, wenn man zunächst ohne Benutzung der letzten Voraussetzung die Vektoraddition und eine Theorie der Verhältnisse paralleler Strecken ableitet. Diese Theorie kann dann ohne weiteres projektiv erweitert werden, wenn man statt der unendlich fernen Ebene irgendeine Ebene als Fluchtebene annimmt. Man erhält so die Theorie der „perspektivischen Verhältnisse“. Daraufhin ist es dann leicht, das Doppelverhältnis für eine bestimmte Fluchtebene einzuführen, und der Pascalsche Satz (die letzte Voraussetzung) liefert nun den Nachweis, daß die Definition ganz unabhängig ist von der Wahl der Fluchtebene. Man kann nun wieder zunächst für eine bestimmte Fluchtebene die Addition und Multiplikation der „Würfe“ durch die Addition und Multiplikation der zu den „Würfen“ gehörenden Doppelverhältnisse definieren und zeigen, daß diese Operationen den gewöhnlichen Gesetzen gehorchen. Sodann wird der Beweis geführt, daß diese Verknüpfung unabhängig von der Wahl der Fluchtebene ist. Es zeigt sich, daß die Theorie gerade durch die Variabilität der Fluchtebene „eine große Geschmeidigkeit“ bekommt, wie dies besonders im 3. Abschnitt hervortritt, der „die analytische Geometrie der reinprojektiven Dreieckskoordinaten“ und die „Möbiusschen Netze“ enthält. Die rationalen Netze sind ja unabhängig vom Pascalschen Satz allein mit den Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen zu begründen. Eine wesentliche Rolle spielen hier die harmonischen Punkte (aus denen man die projektive Skala aufbaut). Das wird im 4. Abschnitt dargelegt. In dem Anhang werden unter anderem die der Verwandlung der Dreiecke in inhaltsgleiche entsprechenden affinprojektiven Transformationen behandelt.

Diese interessante Abhandlung besitzt den Vorzug, daß sie sehr ausführlich gehalten ist, um „gar nichts zweifelhaft zu lassen und den Zugang zur Theorie möglichst bequem zu gestalten“. D.

Th. Vahlen. Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 349 S. gr. 8°.

Nach dem Untertitel ist das Buch „eine Ergänzung zur niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie“. Es reiht sich somit seiner Tendenz nach den neuerdings immer zahlreicher auftretenden Schriften an, die eine Überbrückung der Kluft zwischen Schul- und Universitätsmathematik anstreben, und deren

Inhalt, eine Art „mittlerer Mathematik" der Meinung des Verf. nach, sich vortrefflich zum Privatstudium für jüngere Semester besonders eignet, während im Plane der Universitätsvorlesungen für sie — namentlich an kleineren Hochschulen — kaum Platz sein dürfte. Der Inhalt zerfällt, wie schon der Titel angibt, in zwei Teile: Konstruktionen und Approximationen. Die Anordnung ist streng systematisch: nach einander werden lineare, quadratische, kubische und höhere algebraische und transzendente Konstruktionen abgehandelt, bei den ersten drei Kapiteln noch projektive, affine und metrische voneinander geschieden. Für die einzelnen Konstruktionsmethoden werden die gebräuchlichsten Zeichenhülfsmittel angegeben und die der Natur des Problems am besten entsprechenden herausgehoben. Die Approximationsmethoden, in numerische, analytische und konstruktive Approximationen geschieden, bilden die zweite Hälfte des Bandes. Dabei findet auch eine Reihe weniger bekannter älterer Näherungsmethoden gebührende Berücksichtigung, wie überhaupt das historische Moment durchweg eine wichtige Rolle spielt. Den Beschluß bildet der Beweis für die Transzendenz von e und π. Das Verdienst des Verf. ist nicht nur die Zusammenstellung und kritische Sichtung des weit verstreuten Materials; vielfach mußte er noch für Dinge, die in den Rahmen gehören, neue, elementare Beweisführungen aufsuchen, um sie dem Ton des Ganzen anzupassen. Die Darstellung stellt für den Leserkreis, für den sie bestimmt ist, in ihrer streng systematisierenden Form nicht geringe Anforderungen; sie wird aber gewiß auch im weiteren Kreisen die gebührende Beachtung finden und so der Überzeugung, aus der heraus sie geschrieben ist, größere Anerkennung verschaffen als bisher: daß die elementaren Methoden von der heutigen Wissenschaft in ihrer Tragweite ungerechtfertigt unterschätzt werden, weil man es verlernt hat, sie zu beherrschen. Sk.

F. Enriques. Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. Gesammelt und zusammengestellt von F. Enriques. I. Teil: Die Grundlagen der Geometrie. Deutsche Ausgabe von H. Thieme. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. X u. 366 S. gr. 8°. Mit 144 Textfig.

Das italienische Originalwerk ist F. d. M. 31, 85, 1900 angezeigt, die deutsche Übersetzung des zweiten Teiles F. d. M. 38, 520, 1907. Da der Inhalt des ersten Teiles nicht genau mit der des italienischen Originales übereinstimmt, scheint es nötig, die einzelnen Artikel hier aufzuzählen:

I. F. Enriques. Über die philosophische Bedeutung der Fragen, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen (S. 1—19).

II. F. Enriques. Bemerkungen zum Unterricht in der wissenschaftlichen Geometrie (S. 20-37).

III. U. Amaldi. Über den Begriff der Geraden und der Ebene (S. 38-97).

IV. A. Guarducci. Komgruenz und Bewegung (S. 98-128).

V. G. Vitali. Über Anwendungen des Postulates der Stetigkeit in der elementaren Geometrie (S. 129-150).

VI. U. Amaldi. Über die Lehre von der Äquivalenz (Gleichheit) (S. 151 bis 202).

VII. G. Vailati. Lehre von den Proportionen. 1. Die Proportionen nach Euklid. 2. Weitere Entwicklung der Lehre (S. 203-245).

VIII. R. Bonola. Über die Parallelentheorie und über die nichteuklidischen Geometrien. 1. Geschichte der Untersuchungen über die Parallelen. Schaffung der nichteuklidischen Geometrie. Elementare Richtung. Die weitere Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie. A. Metrisch-differentiale Richtung. B. Projektive Richtung. 2. Allgemeine Theorie der Parallelen. Hyperbolische Geometrie. Elliptische Geometrie (S. 246-366).

Über das ganze Werk, seinen großen Wert für die Lehrer der Elementargeometrie ist in den früheren Anzeigen schon gesprochen worden. Wir fügen aus der Rezension des vorliegenden Bandes im Arch. der Math. u. Phys. (3) **20**, 150 von Blaschke die folgende Stelle hinzu:

„Das größte Interesse nehmen wohl die ersten beiden Artikel von Enriques mit ihrem philosophisch-pädagogischen Inhalt und dann der umfangreiche Schlußartikel des inzwischen (am 16. Mai 1911) verstorbenen Bonola für sich in Anspruch. Bonola behandelt hier in sehr übersichtlicher Art die Elemente der nichteuklidischen Geometrie. Dieser Abschnitt ist gegenüber der italienischen Ausgabe völlig umgearbeitet, und sein Inhalt deckt sich auch durchaus nicht mit dem Inhalt des Buches, das derselbe Verf. in der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese“ veröffentlich hat (F. d. M. **39**, 541, 1908). Dort, in dem Buche, ist das Hauptgewicht auf die Darstellung der historischen Entwicklung gelegt, während hier mehr der systematische Teil zur Geltung kommt.“

Den Artikel VII. der in dem italienischen Original fehlt, hat Vailati erst für die deutsche Übersetzung geschrieben. Wir haben ihn auch vergebens in der Prachtausgabe der „Scritti di G. Vailati“ gesucht (vgl. S. 25 dieses Bandes). Lp.

G. B. Halsted. Géométrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace. Traduction française par P. Barbarin. Paris: Gauthier-Villars. IV u. 296 S. 8°.

Von der „Rational Geometry“ von Halsted, die F. d. M. **33**, 504 und 533 in erster Auflage, **38**, 510 in zweiter Auflage nur mit dem Titel registriert werden konnte, liegt im Berichtsjahre eine französische und eine japanische Ausgabe vor (letztere von der Math. Ges. Tokyo herausgegeben). Das Buch stellt sich die Aufgabe, die elementare Geometrie in aller Strenge und möglichst einfach zu entwickeln. Den Ausgangspunkt bietet das Hilbert sche Axiomensystem, das fast wörtlich aus den „Grundlagen“ übernommen wird. Daß die dort unterdrückten oder nur angedeuteten Beweise hier ausführlich dargestellt werden, entspricht dem elementaren Charakter des Buches, das ja der Vorrede zufolge auch als Leitfaden für den Schulunterricht bestimmt ist. Die Proportionenlehre wird ohne Benutzung der Stetigkeit aufgebaut, die geometrischen Konstruktionen sind auf Lineal und Eichmaß gegründet. Das Werk bietet, wie C. A. Laisant in seinem Begleitwort mit Recht betont, eine vorzügliche Einführung in die abstrakte Geometrie. Inhalt: I. Verknüpfung. II. Anordnung. III. Kongruenz. IV. Parallelen. V. Konstruktionen. VI. Seiten und Winkel. VII. Streckenrechnung. VIII. Proportionen und Ähnlichkeit. IX. Flä-

chengleichheit. X. Der Kreis. XI. Kreisumfang und -inhalt. XII. Ebenen im Raume. XIII. Polyeder und Volumen. XIV. Kugelberechnung. XV. Kegel und Zylinder. XVI. Reine Sphärik. XVII. Räumliche Winkel. Anhang. Jedem Kapitel sind Übungsbeispiele beigegeben. Sk.

A. Finzel. Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. Diss. Straßburg. 46 S. Leipzig: B. G. Teubner. 38 S. 8°.

Im ersten Teil wird, was durch Dehn für die Kugel geschehen ist, die Inhaltslehre ohne Stetigkeitsaxiom und ohne Annahmen über das Schneiden und Nichtschneiden der Geraden allgemein für die beiden nichteuklidischen Geometrien begründet. Als Inhaltsmaß des Dreiecks wird dabei der (positive oder negative) Exzeß $\alpha + \beta + \gamma - 2R$ eingeführt. Der euklidische Fall erfordert eine gesonderte Behandlung, die im Anschluß an Hilbert gegeben wird. Alle folgenden Beweise gelten ganz allgemein, auch für den euklidischen Fall. Zunächst wird die Identität von Inhaltsgleichheit und Gleichheit des Inhaltsmaßes bewiesen.

Der zweite Teil enthält dann den (bekanntlich nicht ohne Stetigkeitsaxiom zu führenden) Beweis der Identität von Zerlegungsgleichheit und Inhaltsgleichheit.

Im dritten Teil beweist der Verf. einige der früheren Sätze, sowie eine Menge Inhaltsformeln der allgemeinen Geometrie mit Integralrechnung analytisch.

Die Abhandlung ist gewissermaßen eine Ergänzung zu dem Buch von F. Schur, „Grundlagen der Geometrie", dem sie auch hinsichtlich des zugrunde gelegten Axiomensystems, sowie der Bezeichnungen im dritten Teil angepaßt ist. Sie ist im Auszuge abgedruckt in den Math. Ann. **72**, 262-284 (der dritte Teil fehlt dort ganz). C.

Aloys Müller. Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. X u. 154 S. 8°. (Die Wissenschaft Heft 39).

Der Begriff des absoluten Raumes ist kein eindeutiger Begriff, sondern von dem Standpunkte abhängig, den man einnimmt. Die Theorie des absoluten Raumes muß zeigen, in welchen Formen und Zusammenhängen der Begriff auftritt. Sieht man vorläufig von den Hypothesen der Physik, im besonderen von dem auf der Elektronentheorie sich aufbauenden Weltbilde ab, so sollen die Überlegungen des Verf. im bewußten Gegensatze zu anderen Auffassungen den Begriff des absoluten Raumes als physikalisch nicht brauchbar erweisen; die Physiker lehnen ihn mit Recht als physikalisch wertlos ab.

Eine andere Frage aber ist, ob der Begriff von der Theorie der logischen Grundlagen der Physik gefordert wird. Zu ihrer Beantwortung wird von dem Weltbilde ausgegangen, das sich auf das phoronomische Relativitätsprinzip gründet und in sich widerspruchslos ist; es ergibt sich, daß es einer Ergänzung bedarf. Die Erörterung der möglichen Wege zur Ergänzung führt auf den Begriff des Inertialsystems; dieser ist unter drei Bedingungen mit dem Begriff des absoluten Raumes identisch: 1. Man bleibe auf dem erkenntnistheoretisch neutralen

Standpunkte, 2. auf dem phoronomisch-dynamischen, 3. man definiere den Begriff des absoluten Raumes mit Hülfe des Neumannschen Körpers, eine Bedingung, die nur eine Konsequenz der ersten ist. So ergibt sich der phoronomisch-dynamische Begriff des absoluten Raumes als ein von der Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit der Theorien der logischen Grundlagen der Physik gefordertes Postulat.

Verläßt man (unter Beibehaltung der beiden anderen Bedingungen) den phoronomisch-dynamischen Standpunkt, indem man dem Raum die Eigenschaft der Unabhängigkeit von den Dingen beilegt, so entsteht aus dem phoronomisch-dynamischen Begriff des absoluten Raumes der „physikalische Begriff"; in der zugrunde liegenden Auffassung tritt der Raum nicht mehr lediglich als ein Faktor bei den Vorgängen auf, sondern steht den Dingen selbständig gegenüber. Der physikalische Raum charakterisiert die (mit Hülfe des Neumannschen Körpers definierte) absolute Bewegung als einen Grenzfall der relativen.

Gibt man endlich auch noch den erkenntnistheoretisch neutralen Standpunkt auf, so entwickelt sich aus dem physikalischen der philosophische Begriff des absoluten Raumes, dessen Inhalt von der philosophischen Ansicht über den Raum bestimmt ist. Nach den Überlegungen des Verf., die den Raum als eine Synthese aus subjektiven und objektiven Faktoren wahrscheinlich machen, stützt sich der philosophische Begriff des absoluten Raumes auf den substantiellen Charakter der transzendenten Raumfaktoren.

Der Begriff des physikalischen absoluten Raumes gewinnt nicht nur für die Theorie der logischen Grundlagen der Physik, sondern für die Physik selbst Bedeutung, wenn man die anfänglich gemachte Einschränkung fallen läßt und an ihrer Stelle die folgenden zwei Voraussetzungen macht: 1. die Annahme der Elektronentheorie (in der Lorentzschen Ausbildung) und ihrer Erweiterung, des elektromagnetischen Weltbildes; 2. die Identifizierung des Äthers mit dem Raum. In diesem Zusammenhang ist der absolute Raum die teils von philosophischen, teils von physikalischen, teils von ökonomischen Motiven geforderte hypothetische Grundlage des umfassendsten und einheitlichsten physikalischen Weltbildes.

Von der metaphysischen Interpretation dieses Weltbildes hängt es dann ab, zu welchem philosophischen Begriff des absoluten Raumes sich dieser physikalische umformt. Fügt man zu den eben bezeichneten Voraussetzungen als dritte noch die Anerkennung transzendenter Realitäten im Sinne der idealrealistischen Auffassung der Erkenntnis hinzu, so geht aus dem betrachteten physikalischen Begriff des absoluten Raumes der philosophische in derselben Form hervor, wie aus rein philosophischen Erörterungen.

Das physikalische Relativitätsprinzip drückt aus, daß der Begriff des absoluten Raumes auch in der letzten Fassung für die experimentelle Physik keine Bedeutung besitzt, für die mathematische Seite der theoretischen Physik keine zu besitzen braucht.

Läßt man sich von den Resultaten der Elektronentheorie und von anderen Motiven zur Annahme der empirischen Existenz eines nichteuklidischen Raumes bestimmen, so ist der phoronomisch-dynamische Standpunkt nicht mehr möglich. Der Raum ist dann auf dem erkenntnistheoretisch neutralen Standpunkte ein physikalischer absoluter Raum, der auf den erkenntnistheoretischen Standpunkten die verschiedensten metaphysischen Deutungen erfahren kann.

Lp.

Weitere Literatur.

R. Bonola. Non-euclidean geometry. A critical and historical study of its development. Authorized English translation, with additional appendices by H. S. Carslaw. Chicago: Open Court Publ. Co. X + 258 S. 8°.

G. Darboux. Studie über die Entwicklung der geometrischen Methoden. Russische Übersetzung von Sluginev. Kasan. 37 S. 8°.

H. Dingler. Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrungen in den exakten Wissenschaften. Leipzig: Akad. Verlagsgesellsch. VIII u. 160 S. gr. 8°. Referat S. 83 dieses Bandes.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française. Tome III. Vol. 1. Facs. 1: Principes de la géométrie, par F. Enriques. Notes sur la géométrie non-archimédéenne, par A. Schoenflies. Les notions de ligne et de surface, par H. von Mangoldt et L. Zoretti. Paris: Gauthier-Villars. Leipzig: B. G. Teubner. 1-160.

Euclidis elementa ex interpretatione Al-Hadachdschadschii cum commentariis Al-Narizii (Codex Leidensis 399, 1). Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg. Copenhagen. 81 S. 8° (1910).

G. Fontaine. Théorie des opérations segmentaires, édifiée en vue d'éliminer le nombre du domaine de la géométrie pure. Paris. 44 S. 8° (1910).

P. E. Gazzaniga. Il postulato di Euclide; dimostrazioni. Milano. 38 S. 8°.

N. I. Lobatschevskij. Geometrie. Kasan Ges. (2) **17**, Nr. 12, 1-83. (Vgl. F. d. M. **40**, 521, 1909.)

G. B. Mathews. Non-euclidean geometry. Nature **86**, 192-193.

Y. Mikami. Remarks on Dr. Carus's views concerning geometry. Monist **21**, 126-131.
Vgl. P. Carus in Monist **20**, 34-75 (F. d. M. **41**, 85, 1910). J.

P. Carus. Editorial comment. Monist **21**, 131-137.
Vgl. das vorstehende Referat. J.

A. Morin. Contribution à l'étude de la géométrie. Démonstration du postulatum d'Euclide. Nantua: Axène. 4 S. 4°.

H. M. Sadow-Pittard. Non-euclidean geometry. Nature 88, 8.

D. M. Y. Sommerville. Non-euclidean geometry. Nature 88, 8.

A. Suini. La confutazione della geometria non-euclidea e la teoria naturale delle parallele. Piacenza: Porta. 27 S. 8°.

A. Suini. Delle definizioni di retta o di piano quale vere basi della geometria: studio di filosofia matematica, a complemento dell' altro contenuto nell' opusculo dal titola: La confutazione della geometria non-euclidea e la teoria naturale delle parallele. Piacenza: Porta. 18 S. 8°.

Vestrum. Der Begriff „Richtung", seine Stellung und Bedeutung in der elementaren Geometrie. Kristiania: Cammermeyer.

Kapitel 2.
Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

A. Denjoy. Sur l'Analysis situs du plan. C. R. **153**, 423-426, 493-496.

In der ersten Note werden als die für die Topologie der Ebene charakteristischen Grundeigenschaften aufgestellt: die „biconnexité" (die ungefähr auf die Möglichkeit einer Quadrangulierung der Fläche hinauskommt) und die Möglichkeit eines stetigen positiven Umlaufsinnes um jeden Punkt. Erstere Eigenschaft fehlt z. B. dem Torus, letztere den einseitigen Flächen. Für bikonnexe Flächen werden dann einige Sätze aufgestellt.

In der zweiten Note wird die Möglichkeit des positiven Umlaufsinnes hinzugenommen und der Jordansche Kurvensatz bewiesen. C.

H. Lebesgue. Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées. C. R. **152**, 841-843.

L. gibt zunächst einen neuen Beweis für den zuerst von Brouwer (Math. Ann. **70**, 161-165) bewiesenen Satz, daß nur zwischen Räumen gleicher Dimensionenzahl eineindeutige stetige Transformationen möglich sind. Die Beweismethode wendet er dann an, um den Jordanschen Kurvensatz auf Räume höherer Dimension zu übertragen. (Man vergleiche jedoch die Arbeiten von Brouwer in Math. Ann. **71**, 305-313, 314-319; Referat in Kap. IX 3E dieses Bandes.) C.

L. E. J. Brouwer. Sur le théorème de M. Jordan dans l'espace à n dimensions. C. R. **153**, 542-544.

Eine abgeschlossene doppelpunktlose Mannigfaltigkeit F_{n-1} von $n-1$ Dimensionen bestimmt in dem Raume E_n von n Dimensionen zwei Gebiete. Jeder Punkt von F_{n-1} ist von jedem dieser Gebiete aus erreichbar.

Daß F_{n-1} in E_n mindestens zwei Gebiete bestimmt, ist bereits früher von Lebesgue bewiesen worden (Referat vorstehend). In der vorliegenden Note teilt der Verfasser die Grundlinien eines vollständigen Beweises des vorstehenden Satzes mit. Ltn.

L. Zoretti. Sur la représentation analytique d'un continu irréductible. S. M. F. Bull. **39**, 246-250.

„Continu irréductible entre deux points" ist der von Z. eingeführte Kurvenbegriff (vgl. F. d. M. **40**, 520, 1909). Z. sucht hier für solche „Kurven" Parameterdarstellungen der Form

$$x = f(t),\ y = g(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

und zwar weist er zwei Folgen stetiger Funktionen nach, die für die Punkte einer im Intervall (0,1) überall dichten Menge konvergieren und Abszissen und Ordinaten der Punkte einer auf der „Kurve" überall dichten Punktmenge darstellen. C.

S. Janiszewski. Sur les continus irréductibles entre deux points. C. R. **152**, 752-755.

Fortsetzung der Untersuchungen über den Zorettischen Kurvenbegriff (vgl. F. d. M. **40**, 520, 1909 und **41**, 544, 1910). Hier werden solche Eigenschaften eines „continu irréductible" untersucht, die sich auf in ihm enthaltene Verdichtungsmengen („continu de condensation") beziehen. C.

P. Benedetti. Il concetto geometrico di linea. Periodico di Mat. (3) **8**, 188-203, 232-238; **9**, 1-24.

Fortsetzung der Abhandlung des Vorjahres (F. d. M. **41**, 545, 1910). Bei der großen Ausdehnung der Arbeit, die jetzt die Lehrsätze XIV bis XXXIII bringt, müssen wir uns darauf beschränken, unter Verweisung auf das vorjährige Referat die Disposition der neuen Kapitel zu geben.

Kapitel II. Teilung der Ebene mittels einer geschlossenen Linie. Verteilung der Punkte innerhalb eines Streifens mittels einer Linie. Verteilung der Punkte der Ebene mittels einer geschlossenen Linie. Verteilung der Punkte innerhalb einer geschlossenen Linie mittels einer Linie. Relative Lage dreier Linien, begrenzt durch die gemeinsamen Endpunkte. Die von einer geschlossenen Linie begrenzte Oberfläche, Zusammenlagerung der Flächen. Relative Lage einer Linie mit einer Geraden.

Kapitel III. Die Linien als Größen. Der Begriff der Länge. Die Länge einer zusammengesetzten Linie ist die Summe der Längen ihrer Teile. Abtragung einer gegebenen Länge auf einer begrenzten Linie. Bemerkung über die Definition der Länge.

Kapitel IV. Eigenschaften der konvexen Linien. Ebene konvexe Linien. Charakteristische Eigenschaften des Schnittes einer geschlossenen konvexen Linie mit den Geraden der Ebene. Die straffste Linie, welche eine nicht konvexe Linie umschließt. Eigenschaften der offenen konvexen Linien. Eine weite Klasse endlicher Linien. Lp.

M. Dehn. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. **71**, 116-144.

Behandelt werden nur solche Gruppen, die durch eine endliche Anzahl von Elementen, zwischen denen endlich viele Relationen bestehen, erzeugt werden können. In der Einleitung werden die drei Fundamentalprobleme für solche Gruppen aufgestellt: es werden Methoden gesucht, um 1. zu entscheiden, ob irgend ein durch seine Zusammensetzung aus den Erzeugenden gegebenes Element der Identität gleich ist (Identitätsproblem); 2. zu entscheiden, ob S und T ineinander transformierbar sind (Transformations-

problem); 3. zu entscheiden, ob zwei solche Gruppen isomorph sind (Isomorphieproblem). Im 2. Kapitel werden diese Probleme erledigt für den Fall, daß in den sie definierenden Relationen zwischen den Erzeugenden jede Erzeugende höchstens zweimal vorkommt. Um dieses Ziel zu erreichen, werden im 1. Kapitel die Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen untersucht, aus denen, wie sich zeigen läßt, die obigen Gruppen zusammengesetzt werden können. Jeder Flächenkurve ist ein Element der Fundamentalgruppe zugeordnet, zwei mit Festhaltung eines Punktes stetig ineinander transformierbaren Kurven identische Elemente, zwei ineinander stetig transformierbaren Kurven zwei ineinander transformierbare Elemente. Wesentlich für die Untersuchung ist die Einführung der Gruppenbilder, die in diesem Falle durch reguläre Polygonnetze der hyperbolischen Ebene darstellbar sind. Besonders einfach wird das Transformationsproblem in dem Falle der zweiseitigen Flächen vom Geschlecht 1 und der einseitigen Flächen mit der Zahl $k = 2$. Eine Lösung für den allgemeinen Fall wird geliefert durch die eingehendere Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der betreffenden Polygonnetze. Von Wichtigkeit auch für allgemeinere Probleme sind die Betrachtungen über die topologischen Eigenschaften, die die allgemeinsten zu diesen Gruppen gehörenden Gruppenbilder besitzen.

Im 3. Kapitel werden höhere Gruppen untersucht. Es ist leicht, zu zeigen, daß jede Gruppe in eine solche Form gebracht werden kann, daß in den definierenden Relationen jede Erzeugende höchstens dreimal vorkommt. Es wird für die Gruppe, die zu der Kleeblattschlinge gehört (s. F. d. M. **41**, 543, 1910), ein Gruppenbild angegeben, das aus einem regulären Netz eines nichteuklidischen Raumes besteht, und mit Hülfe dieser Konstruktion das Transformationsproblem für diese und verwandte Gruppen gelöst. D.

G. Landsberg. Beiträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie. Math. Ann. **70**, 563-579.

Die topologische Gestalt der ebenen Kurven mit Singularitäten (Doppelpunkten) wird gegeben durch das Gaußsche Schema, das die Reihe der Doppelpunkte, wie sie nacheinander beim Durchlaufen der Kurve passiert werden, angibt. Da jeder Doppelpunkt zweimal passiert wird, so kommt er im Schema zweimal vor. Aus dem einfachen Zusammenhang der Ebene folgt, daß jeder Punkt im Schema an einer Geraden und einer ungeraden Stelle vorkommt. Daher kann man das Schema durch eine Substitution S darstellen, durch die etwa jedem an ungerader Stelle stehenden Doppelpunkt der darauf folgende substituiert wird. Eine zweite Substitution S' erhält man, indem man jedem an gerader Stelle stehenden Doppelpunkt den darauffolgenden Doppelpunkt zuordnet. Zerschneidet man alle Doppelpunkte, so zerfällt die Kurve unter Beibehaltung des Durchlaufungssinnes in eine Anzahl von Teilkurven, die gleich der Anzahl der Zyklen ist, in die sich S und S' auflösen lassen.

Die Totalkrümmung einer Kurve wird nicht durch das Gaußsche Schema bestimmt. Sie ist gleich $2\pi k$, wo k eine ganze Zahl ist, die vom Verfasser die Charakteristik der Kurve genannt wird. Im Anschluß hieran wird auch die

Totalkrümmung von Kurven mit Doppelpunkten auf Flächen behandelt. In einem weiteren Paragraphen wird die Charakteristik analytisch dargestellt mit Hülfe der Kroneckerschen Charakteristikentheorie, die einer besonderen Erweiterung für Kurven mit Singularitäten bedarf. In einem dritten Paragraphen werden diese Untersuchungen verallgemeinert für die Charakteristik eines Systems, das aus drei Kurven besteht, die Singularitäten haben. D.

G. Gallucci. Le configurazioni. Napoli Atti (2) **15**, 79 S.

Der erste Teil dieser Abhandlung bietet eine ausführliche Bibliographie des Gegenstandes dar. Der zweite Teil ist der Untersuchung einiger Konfigurationen gewidmet, welchen eine besondere, aus neun Geraden bestehende Figur zugrunde liegt. Der dritte Teil beschäftigt sich mit der Bildung von Konfigurationen durch gewisse n-punktige Gebilde; die letzteren werden dann in der Ebene und im Raume verallgemeinert, und es werden vier Identitäten aufgestellt, welche zur Klassifizierung der behandelten Konfigurationen führen. Vi.

G. T. Bennett. The double-six. Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 336-351.

Die Geradenpaare $a_i, b_i (i = 1, \ldots, 6)$ einer Doppelsechs sind bekanntlich reziproke Polaren bezüglich einer Fläche S vom zweiten Grade. Werden also zwei Geraden als konjugiert bezeichnet, wenn jede die Polare der anderen schneidet, so ergibt sich aus den bekannten Schnittverhältnissen der Doppelsechs, daß jede ihrer Hälften aus sechs zueinander konjugierten Geraden besteht. Dies ist für die sechs Geraden charakteristisch. Es zeigt sich ferner, daß, wenn 14 von den 15 Paaren, die man aus sechs Geraden bilden kann, in bezug auf eine Fläche zweiten Gerades S konjugiert sind, dies auch beim 15. Paare zutreffen muß. Dieser Satz wird hier zunächst aus einem Satz von F. Schur hergeleitet, demzufolge eine Regelschar zweiten Grades, die ein System von drei zueinander bezüglich S konjugierter Geraden enthält, ∞ solche Tripel enthalten muß. Es werden sodann noch analytische Beweise für diese Sätze gegeben. Verf. betrachtet dann den Fall, daß die zur Doppelsechs gehörige Fläche S eine Kugel ist, und überträgt die für die Doppelsechs und die übrigen 15 Geraden der Kugelfläche geltenden Beziehungen auf die (reellen und imaginären) Schnittpunktpaare der Geraden mit der Kugel und ihre stereographische Projektion in eine Ebene. Stz.

H. F. Baker. A geometrical proof of the theorem of a double-six of straight lines. Lond. R. S. Proc. (A) **84**, 597-602.

Der Beweis wird durch eine bestimmte Abzählmethode geführt. Br.

T. Kierboe. Note om en af Prof. Zeuthen stillet Opgave (Note über eine von Prof. Zeuthen gestellte Aufgabe). Nyt. Tidsskr. for Math. **22** B, 49-51.

Untersuchung einer Konfiguration, gebildet von vier Ebenenpaaren, so daß jedes der Paare durch acht gegebene Punkte geht, welche nicht Eckpunkte perspektivischer Vierecke sind. P. H.

N. J. LENNES. Theorems on the simple finite polygon and polyhedron. American J. 33, 37-62.

Im ersten Teil werden zwei neue Beweise für den Satz gegeben, daß ein einfaches Polygon die Ebene in zwei Gebiete teilt, die die bekannten Eigenschaften haben. Im ersten Beweis werden die Punkte der Ebene gleich zu Anfang in innere und äußere geteilt, je nachdem ihre Halbstrahlen das Polygon in einer ungeraden oder geraden Anzahl von Punkten treffen. Beim zweiten Beweis wird durch Ziehen von geeignet bestimmten Diagonalen eine Menge von Dreiecken konstruiert, deren innere Punkte dann als die inneren Punkte des Polygons bezeichnet werden.

Im zweiten Teil der Arbeit wird nach Aufstellung einer Definition für einfache Polyeder (die übrigens nur von Dreiecken gebildet werden) der Satz vom inneren und äußeren Gebiet mit dem ersten Beweis auf diese übertragen. Dann wird durch ein Beispiel gezeigt, daß nicht jedes Polyeder so in Tetraeder zerlegt werden kann, daß jede Tetraederecke Ecke des Polyeders ist. Für konvexe Polyeder erweist sich dies jedoch immer als möglich. — Den Schluß bilden einige Bemerkungen über die benutzte Definition des Polyeders.

In allen Beweisen werden nur Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome benutzt. Auf derselben Grundlage behandelt den Polygonsatz (außer Veblen und Hahn, die der Verf. nennt) Killing in dem Handbuch des mathematischen Unterrichts von Killing und Hovestadt, Leipzig und Berlin (Teubner) Bd. 1, 1910, S. 62-66. C.

G. T. BENNETT. Deformable octahedra. Lond. M. S. Proc. (2) 10, 309-343.

Es gibt, wie Bricard nachgewiesen hat, drei verschiedene Typen von Oktaedern, die (bei unveränderlichen Kanten) stetig deformierbar sind. In der vorliegenden Arbeit geht der Verf. von einem Oktaeder aus, von dem nur eine infinitesimale Deformierbarkeit vorausgesetzt wird. Werden die Oktaederflächen in zwei Quadrupel zerlegt, und zwar so, daß benachbarte Flächen stets zu verschiedenen Quadrupeln gehören, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die infinitesimale Deformierbarkeit: es müssen die Ebenen eines jeden Quadrupels einen gemeinsamen Punkt haben. Die beiden so erhaltenen Punkte bilden zusammen mit den sechs Oktaederecken und acht Oktaederebenen die bekannte Möbiussche Figur, die sich auf vierfache Weise in zwei einander zugleich ein- und umbeschriebene Tetraeder zerlegen läßt. Zu diesem Resultat gelangt man durch die Betrachtung der Relativbewegung zweier Gegenflächen α, α' des Oktaeders. In dem zu dieser Schraubung gehörigen Nullsystem sind nämlich den sechs übrigen Oktaederebenen die Ecken als Nullpunkte zugeordnet, die Nullpunkte von α und α' aber werden jene beiden Punkte, in denen jede dieser Ebenen sich mit den übrigen drei Ebenen ihrer Gruppe schneidet. Den vier Flächenpaaren entsprechen die vier Nullsysteme,

und jedes dieser Nullsysteme führt eins der vier Tetraederpaare ineinander über. Die 2 · 4 Tetraeder haben insgesamt 24 Kanten. Unter ihnen befinden sich die 12 Oktaederkanten. Sie haben kinematisch nichts vor den übrigen voraus; man kann nämlich diese als neue starre Verbindungen einführen, ohne daß die Deformierbarkeit aufgehoben wird.

Zu der deformierbaren Raumfigur gehört eine deformierbare sphärische, die man erhält, indem man zu den Ebenen und Kanten jener Figur durch den Mittelpunkt einer Kugel parallele Ebenen und Geraden legt. Die größten Kreise, die auf der Kugel ausgeschnitten werden, sind als starre Verbindungen zwischen den von den Geraden ausgeschnittenen Punktepaaren anzusehen. Dieser sphärische Mechanismus wird als die sphärische Indikatrix des räumlichen bezeichnet, oder auch als Doppel-Vier, deren Eigenschaften unabhängig von der Raumfigur untersucht werden.

Es wird sodann ausführlich auf die Bricardschen Fälle eingegangen, bei denen eine kontinuierliche Deformierbarkeit vorliegt. Dabei werden die zugehörigen sphärischen und einige mit ihnen verwandte ebene Mechanismen eingehend erörtert. Eine Reihe von Fragen, die mit diesen Problemen zusammenhängen, wird aufgeworfen und zum Teil erledigt. So z. B. die Frage, ob zwei gegebene starre Tetraeder in die Möbiussche ein-umbeschriebene Lage gebracht werden können. Es ist dies im allgemeinen nicht der Fall. Zu den Fällen, wo die Aufgabe lösbar ist, gehört der zweier kongruenten Tetraeder, und hier gibt es sogar unendlich viele Lösungen. Stz.

G. T. Bennet. Mutually inscribed tetrahedra. Quart. J. **42**, 379-386.

Es wird eine Konstruktion der bekannten Möbiusschen Tetraeder gegeben, die sich auf die Betrachtung solcher Punktquadrupelpaare A, B, C, D; P, Q, R, S stützt, welche den Bedingungen

$$(PBCD) \overline{\wedge} (AQCD) \overline{\wedge} (ABRD) \overline{\wedge} (ABCS)$$

unterworfen sind. Stz.

A. S. Hawkesworth. Three new dimension theorems. Palermo Rend. Suppl. **6**, 27-30.

Es ist bekannt, daß die Eulersche Polyederformel im Raume von n Dimensionen durch die folgende allgemeinere zu ersetzen ist:

$$a_0 - a_1 + a_2 - + \cdots + (-1)^n a_n = 1,$$

wo a_r die Anzahl der r-dimensionalen Begrenzungselemente bedeutet und $a_n = 1$ ist. In der vorliegenden Notiz wird diese Formel erst an den Beispielen, die die Verallgemeinerung des Würfels und Tetraeders liefern, gewonnen, sodann ein allgemeiner Beweis versucht, der jedoch auf bestimmten Voraussetzungen über den Aufbau des Polytops beruht und keineswegs vollständig ist. Stz.

A. Boole Stott. Geometrical deduction of semi-regular from regular polytopes and space fillings. Amst. Ak. Verhdl. 11, 1-24.

Es werden im wesentlichen zwei Methoden angegeben, mittels deren man aus regulären Polytopen und Raumausfüllungen halbreguläre erhalten kann. Bei der ersten Methode, der „Ausdehnung“ (expansion), läßt man die Grenzelemente einer bestimmten, etwa der k-ten Dimension sich in der Richtung senkrecht zum Mittelpunkt des Polytops von diesem fortbewegen, so daß an Stelle einer jeden, p solchen Grenzelementen gemeinsamen Ecke p Ecken treten. Diese Bewegung wird so weit fortgesetzt, bis die p ursprünglich vereinigten Ecken einen Abstand gleich der Kantenlänge des ursprünglichen Polyeders erhalten. Dieser Prozeß wird mit e_k bezeichnet. So entsteht beispielsweise aus dem Würfel durch Anwendung des Prozesses e_1 ein von 6 regulären Achtecken und 8 regulären Dreiecken, durch den Prozeß e_2 ein von 18 Quadraten und 8 regulären Dreiecken begrenztes Polyeder. Mit einer gewissen Modifikation läßt sich dieser Prozeß mehrfach anwenden. Durch die zweite Methode der „Zusammenziehung“, die den zum ersten inversen Prozeß bezeichnet, werden aus halbregulären Polytopen andere halbreguläre abgeleitet. Die Methoden werden an zahlreichen Beispielen erörtert und die wichtigsten Resultate in einer Tabelle zusammengestellt. Durch eine große Anzahl von Figuren wird die Lektüre sehr erleichtert. Stz.

P. Saurel. On the classification of crystals. Amer. Math. Soc. Bull. (2) 17, 398-409.

Die Arbeit benutzt Sätze von Curie (Sur les questions d'ordre (1884), Oeuvres, p. 70. Sur les répétitions et la symétrie (1885), Oeuvres, p. 114) und von H. A. Lorentz (Über die Symmetrie der Kristalle, Abhdl. 1, 299), um durch ihre Verbindung zu einer Aufzählung der verschiedenen Typen der Symmetrie zu gelangen. Lp.

E. Meissner. Über eine durch ein reguläres Tetraeder nicht stützbare Fläche. Sep.-Abd. Schweiz. Naturf. Ges. 93, 1910, 2 S.

Referat im vorigen Jahrgange S. 630. Stz.

E. Meissner. Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite. Zs. f. Math. u. Phys. 60, 92-94.

„Flächen konstanter Breite b sind konvexe, geschlossene Flächen von der Art, daß je zwei parallele Stützebenen den Abstand b besitzen.“ Modell 1 ist eine algebraische Rotationsfläche, Modell 2 ist die Rotationsfläche des Reuleauxschen Kreisbogendreiecks. Modell 3 „gibt ein Beispiel einer Fläche konstanter Breite, die nicht Rotationsfläche ist“. D.

Weitere Literatur.

N. J. Lennes. Curves and surfaces in analysis situs. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 525.

P. E. Matter. Die Symmetrie der gerichteten Größen, besonders der Kristalle. (Fortsetzung.) Progr. Seitenstetten. 56 + 6 S. 8⁰.

F. de Memme. Sulla struttura elicotetraedrica dei cristalli romboedrici. Genova: Pellas. 8 S. 8⁰.

G. Sansone. Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e in tetraedri. (Tesi di laurea.) Pisa: Nistri. 76 S. 8⁰.

E. Sommerfeldt. Die Kristallgruppen nebst ihren Beziehungen zu den Raumgittern. Dresden: Steinkopff. VII u. 79 S.

K. Weiss. Kombinatorische Kristallsymbolik. II. (Schlußteil.) Progr. Urfahr. 74 S. 8⁰.

Kapitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

G. Lazzeri und A. Bassani. Elemente der Geometrie (unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). Mit Genehmigung der Verfasser aus dem Italienischen übersetzt von P. Treutlein. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. XVI u. 491 S. gr. 8⁰. Mit 336 Fig. im Text.

Die erste Auflage des italienischen Originals ist 1891 erschienen, die zweite 1898 (vgl. F. d. M. **29**, 424-426, 1898). Da die zweite Auflage im Jahrbuche eine ausführliche Besprechung erhalten hat, können wir uns auf die Wiedergabe der von dem Übersetzer gelieferten Anzeige der deutschen Ausgabe im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung $\mathbf{20}_2$, 50 beschränken.

Neben den vielen „Elementen der Geometrie" nimmt das vorliegende Werk eine besondere Stelle ein und verwebt die sogenannte ebene Geometrie mit der räumlichen, es dient also der sogenannten „Fusion". Wissenschaftlich durch Monge, Poncelet und von Staudt eingeführt und gefördert, von Gergonne und Crelle für den Unterricht gefordert, ward diese Fusion, abgesehen von einem Versuch Bretschneiders, hauptsächlich in Frankreich (Mahistre und Méray) und in Italien gepflegt. Das italienische Hauptwerk verdiente in Deutschland bekannt zu werden, und obschon mit manchen Einzelheiten, zumal mit solchen der Stoffanordnung, nicht völlig einverstanden, so glaubte Treutlein doch eine unveränderte Übersetzung des Buches geben zu sollen. In sie sind einige Stellen mit aufgenommen, die in der ersten Auflage vorhanden waren, in der zweiten italienischen aber behufs Kürzung weggeblieben sind. Nun steht zu hoffen, daß die deutsche Ausgabe des Buches auch bei uns in Deutschland der „Fusion" Freunde

gewinnen, jedenfalls der methodischen Behandlung des geometrischen Unterrichtsstoffes mannigfache Anregung geben wird. Lp.

M. Linnich. Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie. Leipzig: G. Freytag, 228 S. 8°.

Der vom Verf. im vorigen Jahr erschienenen Arithmetik und Algebra für höhere Lehrerinnenseminare des mathematischen Unterrichtswerkes von Schwab-Lesser folgt mit dem vorliegenden Bande die Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie. Ebenso wie dort hat es sich der Verf. hier angelegen sein lassen, den Forderungen, die man an einen modernen mathematischen Unterricht stellen muß, gerecht zu werden, so z. B. sich bemüht, die funktionalen Beziehungen zwischen den in Betracht kommenden Größen hervorzuheben. In der Planimetrie werden behandelt die Verhältnisgleichheit von Strecken, Ähnlichkeit geradliniger Figuren, Anwendung der Algebra auf die Geometrie, harmonische Punkte und Strahlen, Pol und Polare am Kreise und Transversalen im Dreieck. In der Trigonometrie folgen auf eine einleitende Betrachtung die trigonometrischen Funktionen, die Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke, Erweiterung des Funktionsbegriffes für beliebige Winkel, die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke, die Additionstheoreme und vollständige Dreiecksberechnungen. In Rücksicht auf die praktische Anwendung wird in diesen beiden Teilen auch auf den Meßtisch, den Storchschnabel und die Strecken- und Winkelmessung bei der Feldmessung eingegangen. Nach den Eigenschaften der stereometrischen Grundgebilde und der geschlossenen Körperformen werden im dritten Teile die bekannten Körper näher besprochen. Zahlreiche bunte, gut ausgeführte Figuren unterstützen hier wesentlich die räumliche Anschauung. Ein geschichtlicher Überblick über die obigen drei Gebiete, der nach dem bekannten Tropfkeschen Werke abgefaßt ist, beschließt das Buch, das, wie wir mit dem Verf. hoffen, bei seiner klaren Fassung dazu beitragen wird, „das höhere Lehrerinnenseminar auf die Höhe der Leistungen zu heben, die es nach seiner bisherigen Entwicklung erstreben und erreichen muß, und die es den übrigen Zweigen der weiblichen Bildungsanstalten als völlig gleichwertig erweisen wird". Gd.

K. Schwab. Geometrie II. Teil. Ausgabe A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. Leipzig: G. Freytag, 140 S. 8°.

K. Schwab. Geometrie III. Teil. Ausgabe A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. Leipzig: G. Freytag. 119 S. 8°.

Auch diese beiden Teile des Schwab-Lesserschen Unterrichtswerkes verwenden die heuristische Methode: die an das Vorhergehende anknüpfende Ableitung endigt mit dem durch Fettdruck hervorgehobenen Wortlaut des Lehrsatzes, die Wörter „Voraussetzung" und „Behauptung" kommen überhaupt nicht vor. Der Funktionsbegriff tritt in dem planimetrisch-stereometrischen (II.) Teil zurück, da sich für seine Hervorhebung selten Gelegenheit

findet. Einige Kapitel gehen über das sonst in Lehrbüchern Gebotene hinaus: So die gegenseitige Lage der merkwürdigen Punkte und der Feuerbachsche Kreis im Dreieck, die zweimal — zuletzt nach Steiner — behandelt werden, und die Gergonnesche Lösung des allgemeinen Falles der Aufgabe des Apollonius. In der Stereometrie findet sich ein vollständiger Lehrgang der darstellenden Geometrie bis zu der Bestimmung des kürzesten Abstands von zwei windschiefen Geraden und des Winkels zweier Ebenen, der nicht nur den konstruktiven Bedürfnissen des Mathematikunterrichts, sondern auch dem Unterricht im Linearzeichnen genügen soll; ferner werden Kongruenzsätze und Konstruktionen von Dreikanten behandelt. Die jedem Kapitel beigegebenen Aufgaben sind hier meistens Konstruktionsaufgaben, am Schluß sind 252 Berechnungsaufgaben zusammengestellt.

Im trigonometrischen (III.) Teil wird der Funktionsbegriff und die graphische Darstellung ausgiebig behandelt, so z. B. in der graphischen Lösung von goniometrischen Gleichungen. Erwähnenswert sind die Kapitel über die geodätischen Anwendungen der ebenen und die astronomischen Anwendungen der sphärischen Trigonometrie. Die Zahl der abgeleiteten Formeln ist sehr groß. Illustriert werden sämtliche Teile durch Figuren, die bis auf wenige Ausnahmen gut gezeichnet sind und an Farbenfreudigkeit nichts zu wünschen übrig lassen. Sehr zahlreich sind auch die Fußnoten historischen Inhalts. Nm.

K. Schwab, C. H. Müller. Geometrie I. Teil. Ausgabe B: Für die Unterstufe der Gymnasien. Leipzig: G. Freytag, 196 S. 8⁰.

K. Schwab, C. H. Müller. Geometrie II. Teil. Ausgabe B: Für die Oberstufe der Gymnasien. Leipzig: G. Freytag· 211 S. 8⁰.

Die beiden Bücher sind Bearbeitungen der Schwabschen Geometrie für Realanstalten für die Zwecke der Gymnasien. Alles, was über das Ziel dieser Schulen hinausgeht, ist weggelassen. Hinzugefügt ist nur ein Abschnitt über die analytische Geometrie der Kegelschnitte. Nm.

M. Schuster. Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie nach konstruktiv-analytischer Methode. Herausg. von W. Lietzmann. II. Teil: Trigonometrie. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 118 S. 8⁰.

Die Eigenart der Schusterschen Methodik, aus speziellen Aufgaben oder wenigstens an sie anknüpfend die allgemeinen Sätze herauszuschälen, ist auch in der von Lietzmann besorgten neuen Auflage nicht zerstört. Der Herausgeber hat nur einige Aufgaben über die graphische Darstellung der Funktionen und über die Verwendung des Bogenmaßes hinzugefügt. Neu ist ferner ein kurzer Überblick über die Geschichte der Trigonometrie am Schluß. Nm.

Chr. Schmehl. Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Gießen: E. Roth. VI + 246 S. 8⁰.

Chr. Schmehl. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Gießen: E. Roth. VI + 152 S. 8°.

Im geometrischen Teil wird die entwickelnde Methode eingehalten: Der Inhalt des Lehrsatzes wird aus dem Vorhergehenden entwickelt und dann der Beweis in der alten Form mit Voraussetzung und Behauptung gegeben. Sehr viel Wert wird auf die Veränderlichkeit der räumlichen Gebilde gelegt, wie nicht nur der Text, sondern auch die Figuren zeigen. Den einzelnen Kapiteln sind nicht nur Konstruktions-, sondern auch Berechnungsaufgaben beigegeben.

Im trigonometrischen Teil wird die gesamte Dreiecksberechnung vor der Goniometrie erledigt. Daher werden die meisten Formeln auf geometrischem Wege abgeleitet. Darin und in einer weisen Beschränkung in der Zahl der Formeln bestehen die Vorzüge des Buches. Nm.

K. Schwering und W. Krimphoff. Ebene Geometrie. Freiburg i. Br.: Herdersche Verlagsbuchh. VIII + 142 S. 8°.

Die vorliegende siebente Auflage unterscheidet sich im allgemeinen von den vorgehenden nur durch einige Bemerkungen, die durch Berücksichtigung des Funktionsbegriffes nötig geworden sind. Nm.

F. Hočevar. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Realschulen. Mittelstufe (IV. und V. Klasse). 3. Aufl. Wien: F. Tempsky. 171 S. 8°. Mit 210 Fig.

Das Buch behandelt den auch an unsern Realschulen üblichen Lehrstoff. Als modernes Lehrbuch wendet es besondere Beachtung dem Symmetriebegriff zu. Die letzten 44 Seiten enthalten Übungsaufgaben, zu vielen von ihnen sind die Resultate in Fußnoten angegeben. Ba.

F. Hočevar. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien. Oberstufe (VI., VII. und VIII. Klasse). 7. Aufl. Wien: F. Tempsky. 170 S. 8°. Mit 94 Fig.

Das Buch behandelt in knapper Darstellung die ebene Trigonometrie und die analytische Geometrie der Ebene, also etwa das Pensum unserer Obersekunda und Unterprima. Die letzten 55 Seiten enthalten Übungsaufgaben. Ba.

C. Godfrey and A. W. Siddons. Solid geometry. Cambridge: University Press. IX u. 109 S.

Ein Lehrgang der körperlichen Geometrie. Kap. I-VI: Eigenschaften von Linien und Ebenen. Kap. VII-XIII: Eigenschaften der hauptsächlichen

räumlichen Figuren, Stereometrie. Kap. XIV-XVI: Koordinaten in drei Dimensionen, Grundriß und Aufriß, Perspektive (elementare darstellende Geometrie). [Vgl. Math. Gaz. **6**, 1911, 96; Nature 88, 105-106.] J.

C. Godfrey and A. W. Siddons. Elementary geometry, practical and theoretical, together with solid geometry. Cambridge: University Press. XXXIV u. 498 S. 8°.

Vgl. das vorstehende Referat. Beide Bücher sind hier in einem Band gebunden. J.

O. Lambot. Éléments de géométrie à l'usage des écoles moyennes suivis d'un précis d'arpentage et de nivellement par A. Cambier. Édition revue et complétée. Bruxelles: De Boeck. 234 S. 8°.

Ebene Geometrie, hauptsächlich nach Legendre, doch hat der Verf. die Grenzmethode aufgenommen. Praktische Auseinandersetzung der Messungen von Körperinhalten, ohne Beweise, Feldmessen und Nivellieren. Das Buch ist für Realschulen bestimmt. Mn. (Lp.)

A. Dawidov. Elementare Geometrie (für Gymnasien). Moskau. 31. Aufl. 384 S. 8°.

A. Kisselev. Elementare Geometrie für höhere Lehranstalten. Nebst einer großen Anzahl von Übungen und der Abhandlung: Hauptmethoden zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Moskau. XI + 318 S. 8°

N. Izwolskij. Geometrie der Ebene. (Planimetrie.) Moskau. VI + 266 S.

A. M. Gorst. Elementargeometrie und geometrisches Übungsbuch für höhere Lehranstalten. Kijew. VIII + 210 + 6 S.

Unter den aufgezählten Lehrbüchern der Geometrie für die höheren Schulen war das vom Moskauer Professor A. J. Dawidov lange Zeit das verbreitetste. Es ist im Sinne der Legendreschen Schule abgefaßt. Das Buch von Kisselev wird zurzeit wohl am meisten gebraucht; es ist zwar von dem Verfasser bei den erneuten Auflagen mehrfach überarbeitet und modernisiert, ist aber trotzdem nicht gerade gründlich, besonders nicht in den Prinzipien. Das Buch von Izwolskij ist neu, scheint aber eins der besten russischen Lehrbücher zu sein, wie schon von berufener Seite geurteilt ist. Seine Tendenzen sind aus zwei Hauptpunkten zu erkennen: 1. Keine Figur wird behandelt ohne vorangehende Konstruktionsangabe. 2. Die Theorie der Grenzen ist ausgeschlossen, die Theorie des Irrationalen wird nach Dedekind dargestellt. Si.

D. Morduchaj-Boltovskoij. Über geometrische Konstruktionen, ausgeführt mit Hülfe einer Kreisplatte (Diskus) und Lineal. Warschau, Polyt. Inst. 1911. Lief. II, 1-6. (Russisch.)

Wird die Operation des Ziehens gemeinsamer Tangenten zweier Kurven mit Hülfe des Lineals gestattet oder nicht, so ist mit Hülfe des Lineals und des Diskus (d. h. Kreises ohne Mittelpunkt) die Lösung sämtlicher Aufgaben zweiter Ordnung möglich. Sind die Disken unbeweglich, so müssen zwei gegeben sein. Si.

J. Rüefli. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. Bern: A. Francke. 112 S. 8°.

Die 4. Auflage des für Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten bestimmten Buches unterscheidet sich von den vorhergehenden hauptsächlich dadurch, daß nicht nur die Behandlung des rechtwinkligen Dreiecks und seiner Anwendungen, sondern auch die des schiefwinkligen der Goniometrie vorausgeht. Dies wird durch passende Definition der Funktionen stumpfer Winkel ermöglicht. Nm.

Fr. Bendt. Grundzüge der Trigonometrie. 4. erweiterte Aufl. Leipzig: J. J. Weber. VIII u. 135 S. kl. 8°.

Das Werkchen ist zum Selbstunterricht bestimmt und beschränkt sich daher auf die Elemente, die in üblicher Weise — nur sehr ausführlich — entwickelt werden. Zu bemängeln sind einzelne räumliche Figuren. Wann wird man aufhören in „praktischen" Werken aus fünfstelligen Logarithmen einen Zahlenwert $J = 23\,029\,444$ herauszurechnen? Sk.

R. Suppantschitsch. Lehrbuch der Geometrie. Ebene Trigonometrie und analytische Geometrie. Wien: F. Tempsky. 294 S. 8°.

Der übliche Lehrstoff ist durch zahlreiche Übungsbeispiele (auch „für Fortgeschrittene") sachgemäß erläutert. Sk.

J. Sobotka. Lösung von Aufgaben des dritten und vierten Grades mit Hülfe eines beweglichen rechten Winkels. Časopis **40**, 129-142. (Böhmisch.)

Es wird die allgemeine algebraische Gleichung des vierten Grades $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ mit Hülfe der quadratischen Konstruktionen und eines beweglichen rechten Winkels graphisch aufgelöst. Zu diesem Zwecke wird die Methode von Chasles (C. R., 1880) entsprechend modifiziert. In dieser Lösung ist dann die Auflösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades als Spezialfall ($a_0 = 0$) enthalten.

Als Beispiele werden das reguläre Siebeneck und das reguläre Neuneck konstruiert. Pe.

A. Färber. Bemerkungen über einige geometrische Aufgaben. Korresp.-Bl. f. d. höheren Schulen Württembergs 18, 162-165.

Der Verf. beweist die Unmöglichkeit der geometrisch genauen Lösung einiger Dreiecksaufgaben, indem er zeigt, daß ihre algebraische Lösung auf Gleichungen dritten oder vierten Grades führt oder, was dasselbe ist, schließlich auf die Dreiteilung eines beliebigen Winkels hinauskommt. Die Aufgaben, um die es sich handelt, sind folgende:

1. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus der Halbierungslinie eines Basiswinkels und der zu einem Schenkel gehörigen Höhe.

2. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Grundlinie und aus dem Winkel, den ein Schenkel mit der Halbierungslinie des Gegenwinkels einschließt.

3. Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite, ihrem Gegenwinkel und der Halbierungslinie eines anliegenden Winkels. Lö.

N. Roschdestwenskij. **Über die ersten Sätze der Geometrie.** Kagans Bote Nr. **533**, 128-130. (Russisch.)

N. Izwolskij. **Redaktionsbrief.** Ebenda. Nr. **535**, 185.

Der erste Verf. versucht, eine vereinfachte Darstellung der Sätze zu geben, mit welchen die Geometrie beginnt. Der zweite bemerkt dazu, solche Darstellung sei bereits in dem Lehrbuche von K. Masing: „Geometrie und Auswahl systematischer Aufgaben. Planimetrie (Moskau 1886)“ gegeben. Si.

B. Zomakion. **Varianten zum Beweise einiger elementargeometrischen Sätze.** Kagans Bote Nr. **545**, 116-123. (Russisch.)

1. Satz über die Seiten zweier Dreiecke mit zwei Paaren entsprechend gleicher Seiten und mit ungleichen eingeschlossenen Winkeln. 2. Sätze über Ausmessung der Winkel durch Bogen. 3. Summe der ebenen Winkel eines Körperwinkels. Si.

K. Krüse. **Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks.** Kagans Bote Nr. **546**, 150-151. (Russisch.)

Die drei Dreieckshöhen schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des In- oder Ankreises des durch die Fußpunkte der Höhen gebildeten Dreiecks, je nachdem das gegebene Dreieck spitz- oder stumpfwinklig ist. Si.

I. J. Lewin. **Studien über Dreiecksgeometrie.** Kagans Bote Nr. **539**, 285-288. (Russisch.)

1. Einige Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck. 2. Über das Außendreieck (gebildet durch proportionales Verlängern der Seiten). Si.

N. WLODAWEV. Varianten zum Beweise des Pythogoreischen Lehrsatzes. Kagans Bote Nr. 546, 152-154. (Russisch.)

Drei ziemlich einfache Varianten; doch ist es fraglich, ob sie neu sind. Si.

G. TAUBE. Schemata von Determinationen geometrischer Konstruktionsaufgaben. Progr. Domgymn. Naumburg a. S. 1911, 60 S.

Zu 43 Dreieckskonstruktionsaufgaben werden die Determinationen aufgestellt. Die behandelten Aufgaben zerfallen außer den Elementaraufgaben in solche mit h_c ohne p und q, mit p und q, mit t_c, mit w_c, mit dem Kreis über einer gegebenen Sehne, mit dem Inkreis, Umkreis und den Ankreisen und endlich mit dem Kreis des Apollonius. Ba.

P. MICHELS. Einiges über die Anwendung der ähnlichen Abbildung. Progr. Königl. Gymn. Meseritz 1911, 27 S.

Die Schrift enthält Anweisungen, wie sich mittels der Methode der ähnlichen und der umgekehrten Abbildung eine große Zahl geometrischer Aufgaben elegant lösen lassen. An einer Reihe von Musteraufgaben werden die Vorzüge der Methode dargelegt. Ba.

R. VERCELLIN. Generalizzazione d'alcune proprietà geometriche. Periodico di Mat. (3) 9, 49-73.

Der Verf. zeigt, daß man mittels der Begriffe und der Methoden der neueren synthetischen Geometrie aus den bekannten Sätzen der elementaren Geometrie neue Sätze herleiten kann, und daß auf diese Weise zerstreut liegende Erscheinungen auf eine gemeinsame Quelle zurückführbar sind. Solche Übungen sind ja allen denen geläufig, die sich mit der Lehre von den Verwandtschaften beschäftigt haben; es ist aber für Anfänger vielleicht ganz nützlich, eine größere systematische Zusammenstellung vor Augen zu haben. Am Schluß des Aufsatzes wird ein Schema für die Transformationen gegeben. Lp.

A. SCHÜLKE. Über neuere Geometrie. Unterrichtsbl. f. Math. 17, 22-24.

Der Vorschlag dieses Vortrags geht dahin, „von Obersekunda an die Planimetrie nicht mehr als Selbstzweck zu betreiben, sondern sie durch Perspektive und darstellende Geometrie zu ersetzen". Lp.

A. WITTING. Einige Beweise elementarer planimetrischer Sätze. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 42, 158-159.

Anschauliche Beweise in der Lehre der Flächengleichheit, nach englischen Zeitschriften. Lp.

K. Hagge. Der goldene Schnitt. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 28-31.

K. Hagge. Das regelmäßige Fünfeck. Ebenda, 169-172, 312-313, 433-435, 542-543.

E. B. Escott. Lösung des Problems XXVIII in Lemoines Géométrographie. Ebenda, 432-433.

H. Bodenstedt. Wie der Geometrograph arbeitet. Ebenda, 539-542.

Unter der Überschrift „Zur Geometrographie" hat die Schriftleitung der Zeitschrift eine Abteilung eingerichtet, die von Hagge in Kolsnap (Nordschleswig) geordnet wird. Die oben angeführten Aufsätze gehören dieser neuen Abteilung an. Außerdem erscheinen in ihr Aufgaben (bisher Nr. 1-30) und Lösungen dieser Aufgaben. Die hierbei beteiligten Mathematiker sind (außer den obigen): Güntsche (†), Rupp, Bökle, Kuhn, Stegemann. Lp.

V. G. Cavallaro. Saggio di una teoria sulla divisione aurea di un segmento. Rivista fis., mat. e sc. nat. **23**, 293-326.

Eine ausführliche Monographie über den goldenen Schnitt und dessen Anwendungen. Vi.

R. P. Paranjpye. The equilateral triangle by paperfolding. Journ. Ind. M. S. **3**, 151-152.

Ohne Benutzung des Zirkels gilt folgende Konstruktion für ein gleichseitiges Dreieck über gegebener Basis AB: Hälfte die Basis senkrecht durch CD; nimm nacheinander $CD = AC$, $CE = AD$, $CF = AE$. AFB ist das verlangte gleichseitige Dreieck. — Die Fortsetzung des Verfahrens liefert allgemein die Konstruktion von $a\sqrt{n}$. Gd.

Een merkwaardige eigenschap van een driehoek (Eine merkwürdige Eigenschaft eines Dreiecks). Suppl. Vriend der Wisk. **23**, 124.

Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks ABC und ist $AG = BC$, $BH = CA$, $CK = AB$, während A zwischen D und G liegt usw., so haben die Dreiecke ABC und GHK denselben Schwerpunkt. Sch.

N. Quint. Het vraagstuk van Lehmus voor de buitendeellijnen (Das Lehmussche Problem für die Außenwinkelhalbierenden). Wisk. Tijdschr. **8**, 115-126.

Ist ein Dreieck gleichschenklig, wenn zwei Außenwinkelhalbierenden gleich lang sind? Dies braucht bekanntlich nicht der Fall zu sein. Gezeigt wird aber, daß das Dreieck ABC gleichschenklig ist, falls die Außenwinkelhalbierenden AD und BE gleich lang sind und so liegen, daß entweder A zwischen C und E,

B zwischen C und D fällt, oder C zwischen A und E und zwischen B und D liegt. Weiter wird gezeigt, daß der Satz richtig bleibt, wenn man die Außenwinkelhalbierenden durch Geraden ersetzt, welche die Außenwinkel im gleichen Verhältnis teilen. Sodann bespricht der Verf. die pseudo-gleichschenkligen Dreiecke (die zwei gleich lange Außenwinkelhalbierende haben, ohne gleichschenklig zu sein). Schließlich zeigt er, daß für ein sphärisches Dreieck analoge Sätze gelten. Sch.

P. Barbarin. Le problème de Pappus. Ens. math. 13, 17-23.

Es handelt sich um die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines gegebenen Winkels eine Gerade zu ziehen, auf der die Schenkel des Winkels eine Strecke von gegebener Länge ausschneiden. Die Lösung führt auf eine Gleichung vierten Grades, die unter gewissen Bedingungen zerfällt. Für diese wird die Konstruktion angegeben. Nm.

V. G. Cavallaro. Una nuova serie di teoremi rimarchevoli sul triangolo rettangolo. Rivista fis., mat. e sc. nat. 23, 509-522.

Eine Reihe von 25 Sätzen über das rechtwinklige Dreieck. Vi.

C. Hoffmann. Notiz zum Pythagoreischen Lehrsatz. Korresp.-Bl. f. d. höheren Schulen Württembergs 18, 202-205.

Es handelt sich um einen indischen Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes, der sich bei Bhâskara findet und von S. Günther in seiner Geschichte der Mathematik (Sammlung Schubert XVIII, Leipzig 1908) auf S. 190 erwähnt wird. Lö.

J. Wipper. Sechsundvierzig Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes. Aus dem Russischen von F. Graap. 2. Auflage. Berlin: H. Barsdorf. 51 S. 8°.

Die Sammlung wird durch kurze historische und biographische Bemerkungen eingeleitet. Sie bringt sowohl Abänderungen des Euklidischen Beweises, als auch eine große Anzahl von Zerlegungs- und anderen Beweisen. Nm.

A. Färber. Betrachtungen am Lehrsatz des Pappus. Korresp.-Bl. f. d. höheren Schulen Württembergs 18, 287-290.

Der Verf. betrachtet den speziellen Fall, daß bei der Figur zum Lehrsatz des Pappus eines der Parallelogramme zur Dreiecksseite zusammenschrumpft, und knüpft daran die Lösung einiger Verwandlungsaufgaben, die sonst mit Hülfe des Satzes vom Ergänzungsparallelogramm oder mit Hülfe von mittleren Proportionalen gelöst werden. Lö.

C. Hoffmann. Eine Bemerkung zum Satz des Pappus. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 190-191.

Vereinfachung und Verallgemeinerung des „Methodischen Beitrages zum Lehrsatz des Pappus" (F. d. M. **41**, 559, 1910). Lp.

C. Hoffmann. Erweiterungen zum Lehrsatz des Pappus. Math. naturw. Mitt. (2) **13**, 65-72.

Der Lehrsatz des Pappus kann, wie der Verf. gezeigt hat (Hoffm. Zeitschr. **42**, 190), aus der durch Parallelverschiebung eines Dreiecks entstehenden Figur abgeleitet werden. Ersetzt man nun die Parallelverschiebung durch Drehung um einen im Endlichen liegenden Punkt, so ergibt sich der allgemeinere Satz: Dreht man ein Dreieck um einen Punkt seiner Ebene in dieser, so ist die von einer Seite beschriebene Fläche gleich der Summe der von den beiden anderen Seiten erzeugten Flächen. Diese Flächenbeziehung läßt sich auf beliebige Vielecke ausdehnen und führt z. B. zu folgendem Satze vom Viereck: Unterwirft man ein Viereck einer Parallelverschiebung, so ist entweder eines der von den Seiten beschriebenen Parallelogramme gleich der Summe der drei anderen, oder die Summe zweier gleich der Summe der beiden anderen. Auch für ein Tetraeder läßt sich eine Ausdehnung des Pappusschen Satzes geben: Konstruiert man über drei Seitenflächen eines Tetraeders nach derselben Seite (d. h. nach außen oder nach innen) drei Prismen, und verbindet man den Schnittpunkt ihrer Deckflächen mit der gemeinsamen Tetraederecke, so ist diese Verbindungsstrecke nach Größe und Richtung die Seitenkante eines Prismas über der vierten Tetraederfläche, das entweder der Summe der drei ersten Prismen gleich ist, oder mit einem von ihnen zusammen der Summe der beiden andern gleichkommt. Zch.

Fr. Redl. Einfacher Beweis des Gaußschen Satzes vom ebenen Vierseit. Eine neue Winkelhalbierung. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 13-16.

Über den sogenannten Gaußschen Satz vergleiche man M. Simon Entwicklung der Elementargeometrie, S. 157. Der Verf. gewinnt eine zum Beweise dienende Hülfsfigur durch ein solches Aneinanderlegen zweier gleichwinkligen Parallelogramme, daß die Schenkel zweier gleichen Winkel auf dieselben Geraden fallen, die Parallelogramme also einen Eckpunkt gemeinsam haben. Die nicht zusammenfallenden Eckpunkte der beiden Parallelogramme bilden ein Sechseck, dessen Seiten abwechselnd durch zwei unendlich ferne Punkte gehen, so daß also auch die Verbindungsgeraden der drei Paar Gegenecken durch einen Punkt gehen. Lp.

G. Polvani. Nota sul quadrilatero piano e gobbo. Suppl. al Period. **14**, 67-68.

Es sei $ABCD$ ein ebenes oder ein windschiefes Viereck, und es seien M, N, P, Q die Punkte der Seiten AB, BC, CD, DA, für welche

$$AM : MB = DP : PC, \quad BN : NC = AQ : QD.$$

Dann schneiden sich QN und MP in einem Punkte O, so daß

$$QO : ON = DP : PC, \quad MO : OP = AQ : QD.$$

Lp.

V. G. Cavallaro. Sopra una configurazione di rette e punti notevoli in una classe di infiniti quadrilateri isobaricentrici. Rivista fis., mat. e sc. nat. 23, 214-224.

Von einem konvexen ebenen Viereck $H_1 = A_1B_1C_1D_1$ ausgehend, bildet der Verf. das Viereck $H_2 = A_2B_2C_2D_2$, dessen Ecken die Schwerpunkte der Dreiecke $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ sind; die Seiten von H_2 sind denjenigen von H_1 parallel, und die Längen der letzteren sind $\frac{1}{3}$ der Längen der ersteren. Man kann auf gleiche Weise aus H_2 ein drittes Viereck H_3 ableiten, usw. Alle so erhaltenen Vierecke haben einen und denselben Schwerpunkt. Der Verf. stellt weitere Eigenschaften der gebildeten Konfiguration auf und betrachtet ferner einige besondere Fälle. Vi.

J. N. Visschers. Iets over congruentie. Vriend der Wiskunde 26, 36.

Gezeigt wird, daß bei zwei n-Ecken ($n > 4$) die Seiten und Winkel des einen n-Ecks den Seiten und Winkeln des anderen gleich sein können, ohne daß die n-Ecke kongruent sind. Sch.

C. J. Rueda. Sobre el número de poligonos semiregulares. Rev. Soc. Mat. Esp. 1, 17-21.

Verf. versteht unter halb regulären Polygonen Polygone mit gleichen Winkeln und abwechselnd gleichen Seiten oder mit gleichen Seiten und abwechselnd gleichen Winkeln. Er beweist, daß ihre Anzahl $= \frac{1}{2} n(n-1)$ ist, wenn n die Eckenanzahl bedeutet. Op.

H. Wieleitner. Zur Methodik des Satzes von der Potenz am Kreise und der Ähnlichkeitslehre. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 42, 421-423.

Die Sätze von der Potenz am Kreise können in der Lehre von der Flächengleichheit vor der Ähnlichkeitslehre Platz finden. Der Verf. empfiehlt diesen Gang. Lp.

W. Weber. Lösung zu 280 (O. Schenker). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 196.

Zieht man aus den Schnittpunkten S_1, S_2 und S_3 irgendeiner Geraden (s) mit den Seiten bzw. BC, CA und AB eines ebenen Dreiecks ABC die Kreise

durch die Berührungspunkte bzw. B_1, B_2 und B_3 des dem Höhenfußpunktdreieck ($H_1H_2H_3$) eingeschriebenen Kreises, so gehen dieselben durch die nämlichen 2 Punkte (O_1 und O_2) hindurch, gehören also derselben Kreisschar an. Ba.

F. W. Rectification approchée d'un arc de circonférence d'après Huygens. Mathesis (4) 1, 257-259.

Die Huygenssche Konstruktion läßt sich durch die Formel wiedergeben

$$\varphi = \frac{16}{3}\sin\frac{1}{4}\varphi - \frac{2}{3}\sin\frac{1}{2}\varphi$$

und ist mit einem Fehler behaftet, der etwas unter $\frac{1}{7680}\varphi^4$ liegt, wie schon Newton bemerkt hat. Mn. (Lp.)

A. Wendler. Beiträge zur Berechnung der Zahl π. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 15-16.

Der Verf. meint, er könne durch seine Betrachtungen Aufklärung über das Wesen der Näherungsformel $\pi = \frac{1}{3}(2p_i + p_a)$ geben (vgl. F. d. M. **34**, 555, 1903; **35**, 522, 1904). Referent verweist auf seinen Artikel in Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **9**, 30-38 (F. d. M. **41**, 566, 1910). Lp.

J. Diaz Coronado. Área de la corona ó anillo circular. Rev. Soc. Mat. Esp. **1**, 130-131.

Der Inhalt eines Kreisrings ist $= (L - \pi a)\, a$, wenn L die Länge des äußeren Kreises, a die Radiendifferenz bedeutet. Op.

A. Schülke. Zum Beweise des Pascalschen Satzes. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 477-479.

In seiner Aufgabensammlung hat der Verf. folgenden Gang zum Beweise angedeutet: Man beschränke sich zunächst auf den Fall, daß im Kreise die Gegenseitenpaare parallel sind und projiziere die Figur. Jetzt verteidigt er diesen schon von Gergonne angegebenen Beweis gegen verschiedene Anfechtungen. Lp.

C. Hoffmann. Didaktische Bemerkung zum Kommerellschen Beweise des Pascalschen Satzes. Korresp. Bl. f. d. höheren Schulen Württembergs **18**, 240-242.

K. Kommerell. Erwiderung zu der „didaktischen Bemerkung" des Herrn Hoffmann. Ebenda, 338-339.

C. Hoffmann. Zur Erwiderung des Herrn K. Kommerell. Ebenda, 483.

Es handelt sich um den Beweis, den K. Kommerell für den Pascalschen Satz gegeben hat (Korresp.-Bl. f. d. höheren Schulen Württembergs **16**, 397; F. d. M. **40**, 556, 1909). Die Ausführungen sind zum Teil polemischer Natur. Lö.

W. Stecher. Zum Satz des Brianchon bezüglich des Kreises. Korresp. Bl. f. d. höheren Schulen Württembergs **18**, 478-482.

Der Aufsatz knüpft an die Bemerkungen von C. Hoffmann und K. Kommerell an, über die oben berichtet wurde. Der Verf. gibt für den Satz von Brianchon am Kreise einen Beweis ohne Benutzung der Polarentheorie und des Pascalschen Satzes. Er stützt sich dabei auf eine Reihe von Hülfssätzen aus der Lehre von den Proportionen, die im ersten Teil der Arbeit abgeleitet werden. Lö.

F. Graefe. Beweis des Brianchonschen Satzes bezüglich des Kreises. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 13-14.

Ableitung aus dem Pascalschen Satze mit Hülfe des Sehnensatzes. Lp.

Fr. Weirich. Die Siebenteilung des Kreises. Math. naturw. Bl. **8**, 141-142.

Die Siebenteilung des Kreises wird durch die Kurve $r = a(1 + 2\sin\frac{1}{2}\varphi)$ vermittelt, die in Verbindung mit einer gleichseitigen Hyperbel auch die Siebenteilung eines beliebigen Winkels ermöglicht. Sk.

A. Mitzscherling. Die Siebenteilung des Kreises. Math. naturw. Bl. **8**, 155.

Verf. weist darauf hin, daß die von Weirich benutzte Kurve die Nephroide ist, die schon von Loria zur Teilung des Kreises in $7(2^{2^\mu}+1)$ gleiche Teile verwandt worden ist. Sk.

W. Stegemann und J. v. Sz. Nagy. Lösung zu 328 (J. Neuberg). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 196-198.

Man bezeichne mit B_1, B_2, B_3 die Projektionen der Ecken eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ auf eine beliebige Gerade p; die aus diesen Punkten auf die entsprechenden Dreiecksseiten gefällten Lote treffen sich in einem Punkte P, dem Lotpunkte der Geraden p (Archiv **1**, 179 und 390). Man fälle noch aus P auf p das Lot PQ; dann hat man die Relationen

$$QP = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$\frac{A_2B_2 - A_3B_3}{QB_1} + \frac{A_3B_3 - A_1B_1}{QB_2} + \frac{A_1B_1 - A_2B_2}{QB_3} = 0;$$

α, β, γ bedeuten die Winkel der Geraden p mit den Dreiecksseiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 und R den Radius des Kreises $A_1A_2A_3$. Ba.

E. Müller. Einige Gruppen von Sätzen über orientierte Kreise in der Ebene. Deutsche Math.-Ver. **20**, 168-192.

Emil Müller ist der erste, der in der Zyklographie die Orientierung (orientierter Kreis = „Zykel") grundsätzlich und mit dem Bewußtsein ihrer Wichtigkeit anwendete und dadurch den innigen Zusammenhang dieser Disziplin mit gewissen Untersuchungen von Laguerre dargelegt hat. Die Wichtigkeit des Orientierungsbegriffes zeigt auch die vorliegende Arbeit, aus deren umfangreichem Tatsachenmaterial zunächst der folgende Satz hervorgehoben werden möge (S. 173): Sind T_1, T_2, T_3, T_4 vier (berührende) Speere eines Zykels K, und legt man die Zykel $K_{12}, K_{23}, K_{34}, K_{41}$ so, daß K_{ij} die Speere T_i und T_j berührt, dann haben je zwei in der angegebenen Folge benachbarte Zykel noch einen Speer gemeinsam. Die vier so erhaltenen Speere berühren wieder einen Zykel.

Aus diesem Satze ergeben sich durch Spezialisierungen, indem man z. B. einige der Kreise als Nullkreise wählt oder Tangentenpaare zusammenfallen läßt, eine Menge besonderer Sätze, die an sich Interesse haben, so z. B. die Sätze, welche Plücker zum Beweise von Steiners Lösung des Malfattischen Problems angegeben hat; solche Sätze erscheinen hier aber in allgemeinerer Form, so daß man nicht zwischen innerer und äußerer Berührung zu unterscheiden braucht und sich auch von Figuren unabhängig macht usw.

Es möge noch ein räumliches Analogon zum Feuerbachschen Satz erwähnt werden (zum Satze nämlich, daß die vier Berührungskreise eines Dreiecks den Feuerbachschen Kreis berühren), da bei Fiedler ein verwandter Satz nicht einwandfrei bewiesen ist. B.

V. G. Cavallaro. Nuove formule e teoremi notevoli sulla recente geometria del triangolo. Rivista fis., mat. e sc. nat. **24**, 293-322.

V. G. Cavallaro. Memoria sulla recente geometria del triangolo. Rivista fis., mat. e sc. nat. **24**, 411-437, 485-514.

Die in diesen Abhandlungen aufgestellten zahlreichen Sätze hängen mit den Brocardschen Punkten eng zusammen. Vi.

V. G. Cavallaro. Sul potenziale d'ordine p. Rivista fis., mat. e sc. nat. **24**, 126-134.

V. G. Cavallaro. Sistema di punti potenziali comprendenti i punti di Brocard. Rivista fis., mat. e sc. nat. **24**, 135-142.

Ist M ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, bedeuten ferner D, E, F die Schnittpunkte von AM und BC, BM und CA, CM und AB, so wird M

in der ersten Schrift als „Potenzpunkt“ („punto potenziale“) p-ter Ordnung bezeichnet, wenn:

$$\frac{BD}{CD}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^p,\quad \frac{CE}{AE}=\left(\frac{BC}{BA}\right)^p,\quad \frac{AF}{BF}=\left(\frac{CA}{CB}\right)^p$$

ist; dagegen wird der Potenzpunkt in der zweiten Schrift durch die Gleichungen:

$$\frac{BD}{CD}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^p,\quad \frac{CE}{AE}=\left(\frac{BC}{CA}\right)^p,\quad \frac{AF}{BF}=\left(\frac{CA}{AB}\right)^p$$

definiert. Vi.

V. G. Cavallaro. Sopra una generalizzazione dei punti di Brocard. Rivista fis., mat. e sc. nat. **23**, 432-437.

Liegt ein Dreieck vor, so werden durch eine einfache Konstruktion zwei Punkte erhalten, die als eine Verallgemeinerung der Brocardschen Punkte anzusehen sind. Vi.

V. G. Cavallaro. Sulla determinazione dei punti di Brocard per mezzo del punto di Lemoine. Periodico di Mat. (3) **8**, 306-308.

Einfache Bemerkungen, die an die bekannten Formeln für tg ω und cot ω anknüpfen (ω der Brocardsche Winkel). Lp.

E. Piccioli. Il problema di Brocard. Suppl. al Period. **14**, 52-54.

Zuerst werden bekannte Formeln zur Bestimmung des Brocardschen Winkels ω abgeleitet. Dann werden diese Rechnungen für das Kugeldreieck nachgebildet; dadurch ergeben sich zwei Brocardsche Dreiecke und zwei Brocardsche Dreiseite, zu deren näherer Untersuchung der Verf. auffordert. Lp.

Y. Sawayama. Nouvelles démonstrations d'un théorème relatif au cercle des neuf points. Ens. Math. **13**, 31-49.

Acht neue Beweise für den Satz: Der Feuerbachsche Kreis berührt den Inkreis des Dreiecks von innen und die Ankreise von außen. Nm.

M. Vegas. Generalización del círculo de los nueve puntos. Rev. Soc. Mat. Esp. **1**, 58-62.

Verallgemeinerung des Feuerbachschen Kreises für das vollständige Vierseit. Op.

M. B. Rao. Contact circle touching the nine-point circle. Journ. Ind. M. S. 3, 147-149.

Es sei S der Mittelpunkt eines Kegelschnitts, der die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten D, E, F berührt. Es wird der durch D, E, F gehende Kreis als der „contact circle" des Punktes S in bezug auf das Dreieck ABC bezeichnet. Außer bekannten, von Tucker und Neuberg herrührenden, hier auf eine andere Art bewiesenen Sätzen werden der Ort des Punktes S, wenn der „contact circle" den Neunpunktekreis berührt, und der Ort des Mittelpunktes des „contact circle" in diesem Falle als Kubiken bestimmt.
Gd.

W. Gallatly. Question 16 876. Ed. Times 19, 37.

Die Potenz des Feuerbachpunktes F für den Umkreis (Mittelpunkt O) sei $\frac{1}{4}\sum a^3(a-b)(a-c)/\sum a(a-b)(a-c)$ und OI ($I =$ Inkreismittelpunkt) sei parallel der Simsonlinie im Neunpunktekreis. Ist dann R der Radius des Kreises, der den Umkreis, den Inkreis und den Neunpunktekreis rechtwinklig schneidet, so ist $R = \frac{1}{4}\sum a^3(a-b)(a-c)/\sum a^3(b-c)$. Lp.

W. Gallatly. The isochord. Journ. Ind. M. S. 3, 194-195.

Dieser Name wird für denjenigen Punkt I in dem Dreieck ABC vorgeschlagen, der die Eigenschaft besitzt, daß die durch ihn zu den Seiten gezogenen Parallelen $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ einander gleich sind. Es ist $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \dfrac{4\Delta}{h_1+h_2+h_3}$, und der Punkt I ist in dem Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Seiten durch die Ecken von ABC parallel zu den Seiten des Dreiecks ABC laufen, isotomisch zu dem Inkreismittelpunkt. Gd.

W. Gallatly. Question 16 802. Ed. Times 19, 31.

Es sei O der Umkreismittelpunkt, I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Der Kreis durch A, der OI in I berührt, schneide OA in T; dann ist AT gleich dem Durchmesser des Inkreises, mithin $OI^2 = r(r-2\varrho)$. Beweis von Sanjána. Lp.

W. Gallatly. A group of points. Ed. Times (2) 19, 21-22.

Kurze Angaben über den Zusammenhang zwischen gewissen merkwürdigen Punkten und Geraden eines Dreiecks. Lp.

V. R. Aiyar. Some metrical relations connected with a pair of isogonal conjugates. Journ. Ind. M. S. 3, 141-146.

Es sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und P, P' ein Paar isogonal konjugierter Punkte, R der Radius des Umkreises, α, β die große und

kleine Halbachse, γ der Parameter des eingeschriebenen Kegelschnitts mit den Brennpunkten P, P'; p, q, r die senkrechten Abstände des Punktes P von den Dreiecksseiten, l, m, n die Abstände dieses Punktes von den Dreiecksecken und $\lambda = R^2 - OP^2$, z. B. $2R\varrho = R^2 - OP^2$. $p', q', r', l', m', n', \lambda', \varrho'$ haben die gleichen Bedeutungen in bezug auf P'. Zwischen diesen Größen wird eine Reihe interessanter Relationen aufgestellt, die bei dem Beweis der folgenden Sätze Verwendung finden: 1. Der Umkreisradius des zu P gehörigen zweiten Fußpunktdreiecks von ABC ist $\frac{1}{2}\varrho$. 2. Der Umkreisradius des zu P gehörigen dritten Fußpunktdreiecks von ABC ist $\frac{1}{4}\gamma$. Diese Sätze lassen sich auch so aussprechen: 1. Ist irgendein Dreieck einem Kreise einbeschrieben, so hat das zu irgendeinem Punkte P gehörige zweite Fußpunktdreieck einen konstanten Umkreisradius. 2. Ist irgendein Dreieck einem Kegelschnitte mit dem Brennpunkte S umbeschrieben, so hat das zu S gehörige dritte Fußpunktdreieck einen konstanten Umkreisradius. Gd.

R. C. Archibald. Question 16 944. **Ed. Times (2) 19, 86-88.**

Der Inkreis (Mittelpunkt I) eines Dreiecks ABC berühre die Seiten BC, CA, AB bzw. in D, E, F. Die Gerade AI treffe DE in J, DF in K, dann sind die drei Geraden EF, BJ, CK parallel. — Eine Reihe von Beweisen für diesen Satz. Lp.

M. T. Naraniengar. The foci of an inconic. **Journ. Ind. M. S. 3, 66-71.**

Es werden zahlreiche Dreiecke betrachtet, deren Ecken außer von den Ecken des gegebenen Dreiecks ABC von den Brennpunkten eines diesem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnitts und den daraus auf verschiedenste Art abgeleiteten Punkten gebildet werden. Verf. beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Nachweis der Ähnlichkeit dieser Dreiecke. Gd.

E. Liénard. Sur un théorème de M. Hervey. **Mathesis (4) 1, 89-91.**

Bei den von je dreien von vier Geraden einer Ebene gebildeten vier Dreiecken gehen die vier Mittelsenkrechten des Umkreismittelpunktes und des Höhenschnittes durch einen und denselben Punkt. Mn. (Lp.)

S. Narayanan. Question 16 819. **Ed. Times (2) 20, 109-110.**

Wenn die Simsonlinien dreier Punkte D, E, F bezüglich eines Dreiecks ABC sich in einem Punkte S schneiden, so schneiden sich auch die Simsonlinien von A, B, C bezüglich des Dreiecks DEF in S, und S ist die Mitte der Verbindungsstrecke der Höhenschnitte von ABC und DEF. Lp.

M. B. Rao. Orthopole. Journ. Ind. M. S. 3, 27.

Es seien L, M, N die Projektionen der Ecken eines Dreiecks ABC auf eine Sehne PP' des Umkreises. Die von L, M, N auf die Seiten von ABC gefällten Lote gehen durch den Schnittpunkt der zu P und P' gehörigen Wallaceschen Linien. Gd.

Ch. Méray. Esquisse d'une trigonométrie débarassée de l'intrusion des arcs de cercles. Ens. Math. 13, 5-16.

Da die Trigonometrie sich mit Winkeln zwischen geraden Linien beschäftigt und die trigonometrischen Funktionen Verhältnisse von Stücken gerader Linien sind, will Méray den Kreis und die Zahl π aus der Trigonometrie verbannen. Der zu betrachtende Winkel soll also nicht erst als Zentriwinkel in einen Kreis eingetragen werden, sondern ein Punkt des einen Schenkels soll auf den anderen Schenkel projiziert und an dieser kreislosen Figur sollen die Gleichungen der Trigonometrie bewiesen werden. Er will, kurz gesagt, daß die Winkel nicht mit dem Bogenmaß, sondern mit dem Gradmaß gemessen werden. Nm.

Ch. Méray. Recherche directe des relations de variable à fonctions existant entre la mesure d'un angle et ses rapports trigonométriques. Ens. math. 13, 85-103.

Eine Reihe von Beziehungen stellen die Lehre vom Kreis und Winkel in sehr engen Zusammenhang; alle diese seien jedoch in homogener, wirklich klarer Weise noch nicht dargestellt worden. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesen Fragen. Grb.

H. Bönke. Die Bestimmung der Fehlergrenzen der durch fortgesetztes Radizieren erhaltenen Näherungswerte von π. Unterrichtsbl. f. Math. 17, 35.

Es sei $w_{k+1} = \sqrt{w_k + 2}$, $w_1 = \sqrt{2}$, so ist $\pi = \lim 2^n w_n$ für $n \to \infty$. Lp.

H. G. A. Verkaart. Rondom de vergelijking $a \sin x + b \cos x = c$ (Über die Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$). Suppl. Vriend der Wisk. 23, 22-32.

Der Verf. bespricht zwei Lösungsmethoden der Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$. Bei der ersten werden $\sin x$ und $\cos x$, bei der zweiten wird $\operatorname{tg} x$ berechnet. Fortsetzung folgt. Sch.

M. T. Naraniengar. A trigonometrical note. Journ. Ind. M. S. 3, 237-238.

Bestehen in einem Dreieck ABC die drei Relationen: $a = b \cos C + c \cos B$,

$b = c\cos A + a\cos C$, $c = a\cos B + b\cos A$, so folgt $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.
— Verallgemeinerung für das Tetraeder. Gd.

Meetkundige bewijzen voor de formules van Mollweide in de vlakke driehoeksmeting (Geometrische Beweise der Mollweideschen Formeln in der ebenen Trigonometrie). Suppl. Vriend der Wisk. **23**, 89-91.

Zwei geometrische Beweise der Formel $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$ und der Formel $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$. Sch.

H. Pfaff. Beweis des Tangentialsatzes mittels der Pfeilpunktssehne. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 533-534.

Ein geometrischer Beweis für die Formel:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}.$$

Lp.

H. Concina. Il teorema della proiezione di una poligonale e sue applicazioni alla trigonometria. Alba: Sansoldi. 8 S. 8°.

Ein rein didaktisches Schriftchen. Vi.

C. Stolp. Eenige derde-machts-vergelijkingen uit de leer von den driehoek (Einige kubische Gleichungen aus der Lehre des Dreiecks). Wisk. Tijdschr. **7**, 129-130.

Der Verf. leitet kubische Gleichungen zur Berechnung der Winkel, der Halbmesser der Ankreise und der Seiten eines Dreiecks ab, falls R (Halbmesser des Umkreises), r (Halbmesser des Inkreises) und s (halbe Seitensumme) gegeben sind. Sch.

E. Hernández. Question 16982. Ed. Times (2) **20**, 54-55.

Es seien α und α_1 die Lote aus der Ecke A eines Dreiecks auf die Halbierungslinien der inneren Winkel bei B und C, α' und α_1' entsprechend für die der Außenwinkel bei B und C; ähnlich werden $\beta, \beta_1, \beta', \beta_1'$ und $\gamma, \gamma_1, \gamma', \gamma_1'$ konstruiert. Es sei s der halbe Umfang, Δ der Inhalt, ϱ der Radius des Inkreises; dann gelten die Gleichungen:

$$s^6 = \frac{(\alpha'\beta'\gamma'\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')}{\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1}, \quad \Delta^6 = \alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha'\beta'\gamma'\alpha_1'\beta_1'\gamma_1', \quad \varrho^6 = \frac{(\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1)^2}{\alpha'\beta'\gamma'\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'}.$$

Lp.

E. Eckhardt. Neue Formen für den ersten sphärischen Kosinussatz und ihre Benutzung zur Ableitung aller Formeln der sphärischen Trigonometrie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 282-301.

In der Zeitschrift für Math. u. Phys. **6**, 146-149, 1861 nimmt O. Werner ein ebenes Dreieck mit den Seiten

$$p = \cos\tfrac{1}{2}a \cdot \cos\tfrac{1}{2}b, \quad q = \sin\tfrac{1}{2}a \cdot \sin\tfrac{1}{2}b, \quad r = \cos\tfrac{1}{2}c$$

zu Hülfe, um für das sphärische Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln P, Q, R den Winkel R zu berechnen. Zur Bestimmung von P und Q bedarf er aber einer der Neperschen Analogien für das sphärische Dreieck.

„Daß Werner zu dieser Heranziehung der genannten Formeln gezwungen war, liegt daran, daß er das Vorhandensein von noch elf anderen ebenen Dreiecken nicht erkannt hat, die in analoger Weise zu dem ersten sphärischen Kosinussatz führen und durch geeignete Verbindung mit dem ersten Dreieck die Bestimmung der Winkel ermöglichen. Außerdem müssen wir unwillkürlich die Frage aufwerfen, wie denn das obige Dreieck gefunden wurde. Sie hätte ohne weiteres ihre Beantwortung gefunden, wenn der erste sphärische Kosinussatz selbst den Ausgangspunkt gebildet hätte. In dieser Abhandlung soll nun gezeigt werden, wie durch alleinige Anwendung des ersten Kosinussatzes alle Stücke der in Betracht kommenden zwölf ebenen Dreiecke gewonnen werden können, und wie dann umgekehrt die Formeln von Delambre Neper, L'Huilier aus diesen zwölf ebenen Dreiecken durch Benutzung der Sätze der ebenen Trigonometrie ableitbar sind." Lp.

E. v. Szücs. Ebene und sphärische Trigonometrie auf ganz neuer Grundlage. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 529-533.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

und die Neperschen Analogien nebst den entsprechenden Formeln der ebenen Trigonometrie leitet der Verf. aus den Formeln für das rechtwinklige Dreieck ab und hält diese Herleitung für neu; dies die „ganz neue Grundlage".

Lp.

L. Bouman Jz. De formules voor het spherisch exces. Wisk. Tijdschr. **8**, 128-130.

Einheitliche Ableitung der Formeln für $\sin\frac{1}{4}\varepsilon$, $\cos\frac{1}{4}\varepsilon$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon$. Sch.

Ch. Bertin. Sur une table de point sphérique. C. R. 152, 1292-1295.

Bericht über eine Tafel für rechtwinklige sphärische Dreiecke, die die Lösung der Aufgaben der Navigation unter Umgehung der Formeln der sphärischen Trigonometrie ermöglichen soll. Nm.

G. Kober, E. Jahnke. Lösung zu 349 (Fr. Meyer). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 285-286.

Beziehungen zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln und denjenigen spitzen Winkeln eines Dreikants, die die Kanten des Dreikants mit den entsprechenden Kanten des Polardreikants bilden. Gd.

J. Versluys. Inleiding tot de nieuwere meetkunde der ruimte (Einleitung zur neueren Geometrie des Raumes). Amsterdam: A. Versluys. 67 S. 8°.

Der Verf. behandelt die windschiefen Vierecke, die einfachsten projektivischen Eigenschaften, die Theorie der ähnlichen Figuren, die Theorie der Potenzen, Potenzgeraden und Potenzebenen, die Theorie der reziprok polaren Figuren hinsichtlich einer Kugelfläche, die Theorie der Inversion und die Geometrie auf der Kugelfläche. Zwischen dem Text findet man im ganzen 74 Übungsaufgaben. Sch.

Een eigenschap van een orthogonaal viervlak (Eine Eigenschaft eines orthogonalen Tetraeders). Suppl. Vriend der Wisk. 23, 91.

Ist H der Höhenschnittpunkt, Z der Schwerpunkt und O der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugelfläche eines orthogonalen Tetraeders, so sind H, Z und O kollinear und ist $HZ = ZO$. Sch.

J. Neuberg. Sur le tétraèdre orthocentrique. Brux. S. sc. 35 A, 79-81.

Direkter Beweis des folgenden Lehrsatzes: Wenn bei einem Tetraeder die Höhen sich in einem Punkte (dem Orthozentrum) schneiden, und wenn das Tetraeder einem Paraboloid umbeschrieben wird, so liegt das Orthozentrum in der Mongeschen Ebene, dem Orte der Scheitel der dem Paraboloide umbeschriebenen rechtwinkligen dreiseitigen Ecken. Mn. (Lp.)

J. Neuberg. Sur l'octogone gauche de Paul Serret. Brux. S. sc. 35 A, 177-187.

Eine Gerade t treffe die Seitenflächen eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ in den Punkten B_1, B_2, B_3, B_4. Die Kugeln mit den Durchmessern A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,

A_4B_4 haben zwei Punkte M, M' gemeinsam; die Mitten der Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 liegen in einer Ebene γ. Der Verf. erforscht die Relationen zwischen den Elementen t, M, M', γ. Mn. (Lp.)

J. Neuberg. Sur une transformation unirationnelle. Brux. S. sc. **35** B, 170-178.

In der Ebene wird bei einem Dreiecke eine analoge Transformation untersucht wie die bei einem Tetraeder in dem Artikel über das windschiefe Achteck von Paul Serret. Mn. (Lp.)

J. J. Sylvester. Question 12 638. Ed. Times (2) **20**, 49.

Zwei feste Punkte einer Ebene bewegen sich auf zwei in einer Ebene fest liegenden Kreisen. Dann kann kein anderer Punkt der sich bewegenden Ebene einen Kreis beschreiben, mit Ausnahme des Falles, wenn der Abstand der Kreismittelpunkte, der Abstand der auf der Ebene gegebenen beiden Punkte und die beiden Kreisradien zwei Paare von gleichen Summen bilden. Beweis von Nanson. Lp.

L. Balser. Die Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung (Nachtrag). Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 33-34.

Die beiden doppeldeutigen Dreiecksaufgaben werden auf die andere Aufgabe zurückgeführt: Ein rechtwinkliges Kugeldreieck aus einer Kathete k und ihrem Gegenwinkel α zu konstruieren. Lp.

S. V. Ramamurty. Solution of question 11 887. Ed. Times (2) **19**, 31-32.

Der Verf. gibt eine Lösung der von J. J. Sylvester gestellten und mehrfach behandelten Frage nach dem kleinsten Kreise, der n gegebene Punkte einer Ebene umschließt, und nach der kleinsten Kugel, die n gegebene Punkte im Raume umschließt. Lp.

R. Lieder. Ein Beitrag zur Lehre von den Figuren auf Kugelflächen. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 55-56.

Natani gibt in dem Buche: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung von F. Joachimsthal" eine Formel für den Inhalt eines Vielecks, das von beliebigen Kurven auf einer Kugelfläche gebildet wird. Der Verf. zieht hieraus Folgerungen für den Fall, daß das Vieleck durch Kleinkreisbogen gebildet wird und die Ecken auf einem Hauptkreise liegen. Lp.

Emil Schulze. Die Integralrechnung an Gymnasien. Unterrichtsbl. f. Math. 17, 49-52.

Ersatz der in der elementaren Geometrie üblichen Methoden bei der Quadratur und Kubatur durch die Bezeichnungen der Integralrechnung, erläutert an mehreren Beispielen. Lp.

B. Roussy. Existence d'une loi très simple de la surface du corps de l'homme de dimensions quelconques, démontrée par une nouvelle méthode. C. R. 153, 205-207.

Der Verf. hat sich ein Verfahren erdacht, um die Hautfläche des menschlichen Körpers zu ermitteln. Durch 29 Umfangsmessungen an vorgeschriebenen Stellen gewinnt er den „mittleren Umfang", durch drei Längsmessungen die „mittlere Höhe" des Menschen. Dann ist die Hautfläche des Menschen gleich dem Produkte aus seinem mittleren Umfang und seiner mittleren peripherischen Höhe: $S = P_m \cdot H_m$. Lp.

W. L. Nekrassov. Grundlagen der sphärischen Trigonometrie. Teil I. Theorie. Tomsk. XI + 186 S. 8⁰. (Aus d. Nachr. d. technol. Inst. Tomsk.) (Russisch.)

Kap. I enthält die Geometrie auf der Kugel. Der Verf. hat versucht, dem Verfahren Euklids zu folgen und also keine Konstruktionen zu benutzen, ohne ihre Ausführung vorher zu erklären. Kap. II. Sphärische Dreiecke. Kap. III. Haupt- und abgeleitete Formeln der sphärischen Trigonometrie. Kap. IV. Rechtwinklige und rechtseitige sphärische Dreiecke. Kap. V. Lösung der rechtwinkligen Dreiecke. Kap. VI. Lösung der schiefwinkligen Dreiecke. Zum Schluß einige historische Bemerkungen. Si.

W. L. Nekrassov. Dreieckskonstruktionen auf der Kugel. Tomsk. 19 S. 8⁰. (Aus den Nachr. d. Technolog. Inst. Tomsk.) (Russisch.)

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die Konstruktionen zu bestimmen und anzuführen, welche nur mit Hülfe des sphärischen Zirkels lösbar sind. Wie er erst bei dem Druck bemerkt hat, finden sich die das Zweieck betreffenden Eigenschaften schon bei Delambre (Astronomie théorique et pratique, t. I). Der Verf. betrachtet die zweideutigen Fälle: Konstruktion des sphärischen Dreiecks in den Fällen: a) des rechtwinkligen aus einer Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel, b) des schiefwinkligen aus zwei Seiten und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel, c) des schiefwinkligen aus zwei Winkeln und der dem einen gegenüberliegenden Seite. Si.

Weitere Literatur.

W. Bauer und E. v. Hauxleben. Lehrbuch der Mathematik zum Gebrauche an Studienanstalten. Pensum der Untersekunda. Planimetrie, Trigonometrie und Arithmetik. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. IX, 174 S. 104 Fig. gr. 8°.

W. Bauer und E. v. Hauxleben. Lehrbuch der Mathematik zum Gebrauche an Studienanstalten. Pensum der Obersekunda. Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie und Arithmetik. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. IX, 175 S., 104 Fig. gr. 8°.

W. Bauer und E. v. Hauxleben. Lehrbuch der Mathematik zum Gebrauche an Studienanstalten. Pensum der Prima. Arithmetik, analytische Geometrie, Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. XI, 309 S., 107 Fig. gr. 8°.

A. Bieler. Lehr- und Übungsbuch der Raumlehre für Knaben-Mittelschulen. Zweite, nach den Lehrplänen von 1910 umgearbeitete Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. VII u. 176 S. 8°.

C. Crantz. Planimetrie zum Selbstunterricht. Leipzig: Teubner. IV u. 134 S. 8°. (Aus Natur- u. Geisteswelt Nr. 340.)

R. Edert und M. Kröger. Geometrie für Mittelschulen. Mit besonderer Berücksichtigung der zentrischen und axialen Symmetrie und des geometrischen Zeichnens behandelt. 2. Heft. Veränderte Auflage. Hannover: Meyer. VII u. 113 S. 8°.

F. Enriques. Fragen der Elementargeometrie. I. Teil. Die Grundlagen der Geometrie. Deutsch von H. Thieme. Leipzig: Teubner. X u. 366 S. gr. 8°. (Referat S. 502.)

K. Erdmann. Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Zweite, umgearbeitete Auflage. Dresden: Bleyl und Kaemmerer. VIII u. 283 S. 8°.

M. Focke und M. Krass. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst den Grundlagen der sphärischen Trigonometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen und anderen höheren Lehranstalten. Zwölfte, verbesserte Auflage, besorgt von J. Linneborn. Münster: Universitätsbuchhandlung. IV u. 90 S. 8°.

L. Freymann. Praktische Lösungen mathematischer Aufgaben. Frankfurt a. M.: A. Gerheim. 15 S.

Gajdeczka. Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen. 4. Auflage. Bearbeitet von E. Kaller. Wien: F. Deuticke. V u. 267 S. 8°.

Gajdeczka. Übungsbuch zur Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen. Umgearbeitet von E. Kaller. Wien: F. Deuticke. V u. 225 S. 8°.

A. Genau und J. Krömeke. Geometrie für das Lyzeum und die gymnasialen Kurse der Mädchenbildungsanstalten. Im Anschluß an die Raumlehre für Lehrerinnenbildungsanstalten und höhere Mädchenschulen von A. Genau. Leipzig: Reisland. VIII u. 167 S. 8°.

M. Girndt. Raumlehre für Baugewerkschulen. 4. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 79 S. gr. 8⁰.
(Der Unterricht an Baugewerksschulen. Band 20.)

G. Gothe. Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für Knaben-Mittelschulen. 1. Teil: Raumlehre. Leipzig: Freytag. 192 S. 8⁰.

C. Hecht und K. Klärner. Mathematisches Lehrbuch für Knabenschulen. Raumlehre. (Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie.) Nach den Bestimmungen über die Neuordnung des Mittelschulwesens in Preußen vom 2. März 1910, bearbeitet von K. Klärner. Bielefeld: Velhagen und Klasing. VI u. 230 S. 8⁰.

M. Heinrich. Vereinfachter Gang des Anfangsunterrichts in der Geometrie und Trigonometrie. Leipzig: Quelle u. Meyer. 48 S. 8⁰.

E. Helly. Lösungen der Aufgaben in Suppantschitsch Lehrbuch der Geometrie für die IV. und V. Klasse der Realschulen. Wien: F. Tempsky. 58 S. 8⁰.

E. Helly. Lösungen der Aufgaben in Suppantschitsch Lehrbuch der Geometrie für die IV. und V. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. Wien: Tempsky. 85 S. 8⁰.

K. Hensing. Geometrie. 3. Heft. Leipzig: Hoffmann. S. 115-254. 8⁰.

A. Hess. Trigonometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker. Berlin: Springer. VII u. 128 S. 8⁰.

J. Jacob und Fr. Schiffner. Planimetrie und Stereometrie. Für die 4. und 5. Klasse. Wien: F. Deuticke. 198 S. 8⁰.

W. Knobloch und H. Kühl. Sammlung geometrischer Konstruktionen zum Gebrauche in Gewerbeschulen, Präparandenanstalten, Volks- und Mittelschulen. Altona-Ottensen: St. Carstens. 87 S. 8⁰.

F. Laager. Vereinfachter Lehrgang der Elemente der Trigonometrie. Zürich: Speidel. 40 S. 8⁰.

Heinrich Müller. Die Mathematik auf Gymnasien und Realschulen. B_2. Für reale Anstalten, Oberstufe. Abt. I. Planimetrie, Algebra, Trigonometrie, Stereometrie. 4. Aufl. Leipzig: Teubner. XII u. 308 S. gr. 8⁰.

H. Müller und A. Mahlert. Mathematisches Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen. II. Teil: Planimetrie und Körperberechnungen. 4. Aufl. Leipzig: Teubner. VII u. 122 S. gr. 8⁰.

C. Nielsen und W. Langel. Planimetrie und Stereometrie für Landwirtschaftsschulen. Berlin: Parey. VII u. 159 S. 8⁰.

F. Otto und P. Siemon. Übungsbuch der Geometrie für höhere Mädchenschulen. 3. Auflage. Leipzig: Hirt. 152 S. 8⁰.

M. O. Paul. Mathematisches Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen. 2. Band. Geometrie I. Leipzig: Quelle u. Meyer. VII u. 86 S. 8⁰.

J. Peau. Raumlehre (Geometrie und geometrisches Zeichnen) für Knabenbürgerschulen. 3. Teil. Wien: Pichler. IV u. 96 S. 8⁰.

Rossmanith und Schober. Geometrische Formenlehre. Ein Leitfaden für den geometrischen Anschauungsunterricht. 11. Auflage. Bearbeitet von Fr. Bergmann. (Unveränderter Abdruck der 10. Auflage.) Wien: A. Pichlers Wwe. 45 S. gr. 8°.

Rossmanith und Schober. Grundriß der Geometrie. Lehr- und Übungsbuch für die zweiten und dritten Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Gymnasien und Realgymnasien. Nach dem neuen Lehrplan bearbeitet von Fr. Bergmann. Wien: Pichlers Wwe. II u. 102 S. gr. 8°.

J. Schneider. Geometrie leicht gemacht. Ein Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Bamberg: Buchner. 113 S. 8°.

K. Schwab und O. Lesser. Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an den höheren Lehranstalten für die weibliche Jugend. Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie. Für Lehrerinnenseminare bearbeitet von M. Linnich. Leipzig: G. Freytag. 228 S. 8°.

K. Schwab und O. Lesser. Mathematisches Unterrichtswerk. 2. Band. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. 2. Teil. A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. 140 S. 3. Teil. A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. 120 S. Von K. Schwab. Leipzig: Freytag. 8°.

A. Sickenberger. Leitfaden der elementaren Mathematik. 2. Teil: Planimetrie. 7. Auflage, bearbeitet von A. Schmidt. Nürnberg: Koch. IV u. 126 S. 8°.

Th. Vahlen. Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie. Band XXXIII. Leipzig: Teubner. XII u. 349 S. gr. 8°. (Teubners Sammlung.) (Referat S. 501.)

M. Vollkommer und T. Link. Geometrie für höhere Mädchenschulen. I. Teil. Nürnberg: Korn. IV u. 100 S. 8°.

K. Weber. Lehrbuch der Stereometrie. Wolfenbüttel: Zwißler. 59 S.

K. Weber. Lehrbuch der Trigonometrie. Wolfenbüttel: Zwißler. 39 S.

H. Wilk und E. Haase. Geometrie für Mittelschulen. 2. Auflage. Dresden: Bleyl und Kaemmerer. VIII u. 144 S. 8°.

H. Zuschlag. Planimetrie für Quarta bis Oberprima. 2. Auflage. (Mentor-Repetitorium Nr. 7.) 112 S.

H. Zuschlag. Planimetrische Konstruktionsaufgaben. Für Quarta bis Untersekunda. 2. Auflage. (Mentor-Rep. Nr. 8.) 68 S.

H. Zuschlag. Stereometrie. Anfängerkurs. 2. Auflage. (Mentor-Rep. Nr. 18. Berlin-Schöneberg: Mentor-Verlag. XII u. 64 S.

M. Zwicky. Grundriß der Planimetrie und Stereometrie nebst Übungsaufgaben. Zweiter Teil: Stereometrie. 3. Auflage. Herausgegeben von G. Wernly. Bern: Francke. 72 S. 8°.

H. Allcock. Theoretical geometry for beginners. Revised and rearranged.
C. Part. I. II u. 125 S. Part II — IV. London: Macmillan & Co. XII u. 204 S. [Nature 88, 105.]

R. P. Baker. The problem of the angle bisectors. Chicago: University Press. 98 S.

W. M. Baker and A. A. Bourne. A new geometry. Books I to III. London: G. Bell and Sons Ltd. XXII u. 246 u. VI. S. [Nature **88**, 1911, 207; Math. Gaz. **6**, 303, 1912.]

E. L. Bates and F. Charlesworth. Practical mathematics and geometry. A textbook for elementary students in technical and trade schools. New York: Van Nostrand. 12mo.

E. L. Bates and F. Charlesworth. Practical mathematics and geometry. A text-book for advanced students in technical and trade schools, evening classes, and for engineers, draughtsmen, architects, surveyors, etc. Part III. Advanced course containing numerous practical exercises, with answers, and about 300 illustrations. London: B. T. Batsford. VIII u. 447-776 S. [Nature **89**, 240, 1912.]

W. G. Borchardt and A. D. Perrott (Rev.). Geometry for schools. Vol. I. Stages I and II. VIII u. 52 u. III S. Vol. II. Stage III. (Section I.) VIII u. 53—162 u. IV S. London: G. Bell and Sons, Ltd. [Nature **89**, 656, 1912.]

Champion and Lane. School geometry. London: Rivingtons. [Math. Gaz. **6**, 228, 1912.]

J. V. H. Coates. A first book of geometry. London: Macmillan & Co., Ltd. XI u. 142 S. [Nature 88, 105.]

R. Deakin. New school geometry. London: Mills and Boon. [Math. Gaz. **6**, 228, 1912.]

R. W. K. Edwards. An elementary text book of trigonometry. London: Alston Rivers. XIII u. 251 S.

L. K. Ghosh. Plane trigonometry. (Strictly according to the Syllabus prescribed by the Indian Universities.) Calcutta: G. N. Halder. VIII u. 271 S. [Nature **89**, 657, 1912; Math. Gaz. **6**, 227, 1912.]

A. G. Hall and F. G. Frink. Plane and spherical trigonometry. New York: Holt. X u. 176 S. 8°.

E. W. Hobson. A treatise on plane trigonometry. Third edition. Cambridge: University Press. XV u. 383 S. [Nature **90**, 275, 1912.]

C. A. Hart and D. D. Feldman. Plane geometry. With the editorial cooperation of J. H. Tanner and V. Snyder. New York: American Book Co. 303 S. 12mo.

G. Howe. The model practical mensuration based upon elementary geometric constructions arranged to suit the present gradation of school work. New York: Hinds. 89 S. 12mo.

J. G. Hun and C. R. Mac Innes. The elements of plane and spherical trigonometry. New York: The Macmillan Co.; London: Macmillan and Co., Ltd. VII u. 205 S. [Nature **89**, 656-657, 1912; Math. Gaz. **6**, 305, 1912.]

J. B. Lock and J. M. Child. A new trigonometry for schools and colleges. London: Macmillan & Co., Ltd. XII u. 488 S. [Nature 88, 105; Math. Gaz. **6**, 229-230, 1912.]

D. B. Mair. Junior mathematics. Being a course of geometry for beginners, with portions of algebra. With answers. Oxford: Clarendon Press. VII u. 200 S. [Math. Gaz. 6, 300, 1912.]

C. A. Marsh and H. J. Philipps. College entrance examination papers in plane geometry. New York: Merrill. 178 S. 12mo.

D. A. Murray. Elements of plane trigonometry. London and New York: Longmans, Green and Co. X u. 136 S. 8°. [Math. Gaz. 6, 188-190.]

W. E. Paterson. Elementary trigonometry. Tables. New York: Oxford University Press. 204 + 16 + 18 S.

D. A. Rothrock. Elements of plane and spherical trigonometry, without tables. New York: Macmillan. XI u. 147 S. 8°.

D. A. Rothrock. Logarithmic, trigonometric and other tables. New York: Macmillan. XIV u. 99 S. 8°.

A. Sanders. Key to Sanders' plane and solid geometry. New York: American Book Co. 144 S. 12mo.

H. E. Slaught and N. J. Lennes. Plane and solid geometry; with problems and applications. New York: Allyn. XII u. 470 S. 12mo.

H. E. Slaught and N. J. Lennes. Solid geometry; with problems and applications. Boston: Allyn & Bacon. VI u. 190 S. 12mo.

D. E. Smith. The teaching of geometry. Boston: Ginn. V u. 329 S. 12mo.

E. R. Smith. Plane geometry developed by the syllabus method. New York: American Book Co. 192 S. 12mo.

J. C. Stone and J. F. Millis. Plane and solid geometry. Boston: Sanborn. 400 S. 8°.

F. T. Swanwick. Elementary trigonometry. Cambridge: University Press. XV u. 243 S. [Nature 89, 656, 1912.]

A. T. Warren. Experimental and theoretical course in geometry. 4th edition, revised. London: Clarendon Press. 302 S. 8°.

W. Wells. Complete trigonometry. Revised edition. With tables. Boston: Heath. VI u. 163 + 9 + 23 S.

G. A. Wentworth. Plane and solid geometry. Revised edition. Boston: Ginn. VII u. 470 S. 12mo.

P. M. van Bemmel. De ruimtedriehoek of drievlakshoek. Een hoofdstuk uit de ruimte-meetkunde (Das körperliche Dreieck oder Trieder. Ein Kapitel aus der Stereometrie). Leeuwarden: Meyer en Schaafsma. 26 S. 8° mit 7 Tafeln.

H. C. Derksen. Vlakke meetkunde (Planimetrie). Tweede, herziene en vermeerderde druk. Hoogezand: J. Schaafstal. 171 S. 8°.

J. Kleefstra. Leerboek der meetkunde. Eerste boek: Kennis der figuren. Tweede boek: Berekening van merkwaardige lijnen. Derde boek. Constructie-meetkunde. Groningen: P. Noordhoff. 112, 94, 78 S. 8°.

A. Kylstra en Joh. A. Vreeswijk. Goniometrie en trigonometrie. Zwolle: W. E. J. Tjeenk Willink. IV u. 139 S. 8°.

E. Meyer. Verzameling meetkundige vraagstukken (Sammlung geometrischer Aufgaben). Drie stukjes. Groningen: J. B. Wolters. 56, 62, 64 S. 8⁰.

C. D. Schönfeld. Beknopt leerboek der planimetrie. Zesde druk. Groningen: J. B. Wolters. 124 S. 8⁰.

F. J. Vaes. Leerboek der stereometrie. Deventer: Æ. E. Kluwer. IV u. 175 S. 8⁰.

J. Versluys. Handboek der stereometrie. Amsterdam: A. Versluys. 4 u. 254 S. 8⁰.

C. Wafelbakker. Vlakke driehoeksmeting. Leerboek met vraagstukken (Ebene Trigonometrie. Lehrbuch mit Aufgaben). Amsterdam: van Mantgem & de Does. 100 S. 16⁰.

P. Wijdenes en D. de Lange. Vlakke meetkunde. Twee deelen. Groningen: P. Noordhoff. 135, 184 S. 8⁰.

W. H. Wisselink. Kern van de meetkunde. Zevende herziene druk. Groningen: P. Noordhoff. 96 S. 8⁰.

W. H. Wisselink. Vraagstukken ter oefening in de meetkunde (Aufgaben zur Einübung der Geometrie). Tweede stukje. Tiende druk. Groningen: P. Noordhoff. 80 S. 8⁰

J. S. Hedström och C. Rendahl. Trigonometri för läroverken. Stockholm: Bonnier. VI u. 121 S. 8⁰.

C. Bourlet. Cours abrégé de géométrie avec de nombreux exercices théoriques et pratiques et des applications au dessin géométrique. 3e édition. Paris: Hachette. VIII u. 239 S. 16mo.

H. Chenard. Géométrie pour les écoles pratiques d'industrie et sections industrielles (1re année). Paris: Delagrave. 303 S. 18mo (1910).

H. Commissaire. Leçons d'algèbre et de trigonométrie conformes aux programmes du 27 juillet 1906. (Classes de mathématiques A et B). Paris: Masson. VI + 590 + 9 S. 8⁰.

A. Delille. Éléments de géométrie. Théorèmes et problèmes proposés comme exercices d'application dans les Éléments de Legendre revus par A. Cambier. Démonstrations et solutions par Delille. 4e partie: Géométrie solide. Livres V à VIII. Deuxième édition corrigée et augmentée. Bruxelles: De Boeck. 231 S. 8⁰.

H. Denis-Guibert. Étude sur les cinquante pas géométriques dans nos colonies. Mayenne: Colin. 140 S. 8⁰.

E. Dussaux et A. Béché. Nouveau cours de géométrie. 3e année d'écoles primaires supérieures; préparation aux écoles nationales d'arts et métiers. Paris: Colin. 391 S. 16mo.

E. Eckardt. Éléments de trigonométrie rectiligne. Hoogstraeten: Van Hoof-Roelaus. 35 S. 8⁰.

H. Ferval. Éléments de trigonométrie, rédigés conformément aux programmes de l'enseignement secondaire et de l'enseignement primaire supérieur. 5e édition, revue et corrigée. Paris: Hachette. 304 S. 16mo.

C. Fortin. Cours de trigonométrie conforme aux programmes de 1905. Paris: Desclée. XXII u. 249 S. 16mo.

J. Germeau. Essai d'un cours de trigonométrie rectiligne avec de nombreuses applications. 2e édition. Namur: Wesmael-Charlier. 98 S. 8°.

J. Goffin. Géométrie à l'usage des écoles moyennes. Liége: Dessain. 258 S. 8°.

G. de Groodt. Manuel de trigonométrie rectiligne, suivi d'une série de 200 problèmes de géométrie. Mons: Delporte. 83 S. 4°.

C. Guichard. Traité de géométrie. Tome I. 4e édition. Paris: Vuibert. VIII u. 566 S. 8°.

G. B. Halsted. Géométrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace. Traduction française par P. Barbarin. Paris: Gauthier-Villars. III u. 301 S. 8°.

(Referat S. 503.)

T. Hue et N. Vagnier. Compléments de géométrie. Paris: Delagrave. 144 S. 8°.

R. Javelot. Des procédés pour résoudre les problèmes de géométrie élémentaire, suivis des premiers éléments de géométrie analytique appliqués à ces problèmes. Rennes: Oberthür. 136 S. 8°.

H. Neveu et H. Bellenger. Cours de géométrie théorique et pratique. 3e année. Paris: Masson. 403 S. 16mo.

B. Niewenglowski. Troisième année de géométrie. Premier cycle. Classe de 3e B. Paris: Delagrave. 195 S. 18mo.

J. Pastour. Leçons progressives de géométrie élémentaire théorique et pratique, rédigées conformément au programme du 27 juillet 1905. 2e édition. Paris. 343 S. 12mo.

A. Salomon. Leçons de géométrie à l'usage de l'enseignement secondaire des jeunes filles. Géométrie plane. 5e édition. Paris: Vuibert. 230 S. 16mo.

F. Vaneuken. Éléments de géométrie pratique. Tome 1er. Gand: Vanderpoorten. 304 S. 8°.

A. Amiot. Trattato di geometria elementare. Nuova edizione di A. Socci. 8a impressione. Firenze: Le Monnier. VIII u. 402 S. 8°.

L. Cavazzoni e E. Cercignani. Libro di geometria del piano. Milano: Albrighi. 300 S. 8°.

A. Costa Reghini. Appunti di trigonometria piana e sferica. Ancona: Fogola. 96 S. 16mo.

L. Crosara. Trattato di geometria elementare. Parte I. Venezia: Sorteni e Vidotti. VII u. 119 S. 8°.

L. Crosara. Trattato di geometria piana ad uso delle scuole tecniche e normali. 2a edizione. 160 S. 8°.

F. Enriques e U. Amaldi. Elementi di geometria. Seconda edizione. Bologna: Zanichelli. VIII u. 270 S. 16mo. (Nostrae litterae I.)

F. Enriques e U. Amaldi. Corso completo di geometria ad uso delle scuole medie. Elementi di geometria per le scuole secondarie superiori. 4ª edizione. Bologna: Zanichelli. 16mo.

G. Erede. Manuale di geometria pratica. 5ª edizione, riveduta e corretta. Milano: Hoepli. XVI u. 257 S. 24mo.

A. Faifofer. Elementi di geometria. 17ª edizione. Venezia: Sorteni e Vidotti. 533 S. 8º.

A. Faifofer. Il libro di geometria. 4ª edizione. Venezia: Sorteni e Vidotti. 153 S.

P. Ferraris. Elementi di geometria, ad uso delle scuole medie. Vol. I, II. Torino: Paravia. 192, 174 S. 16mo.

M. de Franchis. Complementi di geometria. Palermo: Sandrom. 215 S. 8º.

G. Lazzeri. Manuale di trigonometria sferica. Seconda edizione riveduta. Livorno: Giusti. IV + 95 S. 16mo.

D. Mori. Elementi di geometria. Firenze: Salani. 71 S. 16mo. (Biblioteca per tutti Nr. 25.)

O. Persiani. Elementi di geometria, compilati ad uso della quarta ginnasiale. Terza edizione, con notevoli aggiunte e modificazioni. Roma: Pontificia. 102 S. 16mo.

G. Riboni. Elementi di geometria, ad uso delle scuole secondarie superiori. Sesta edizione, con aggiunte e correzioni. Bologna: Zanichelli. 523 S. 16mo.

G. Scoto. Elementi di geometria. 3ª edizione. Palermo: Sandron. 252 S. 16mo.

G. A. Serret. Elementi di trigonometria. Per cura di G. Tolomei. 12ª edizione. Firenze: Le Monnier. 150 S. 8º.

G. A. Serret. Trattato di trigonometria. Traduzione, con modificazioni ed aggiunte, da G. Tolomei. Firenze: Le Monnier. 269 S. 8º.

G. A. Serret. Trattato di trigonometria piana e sferica tradotto da F. Grassi. Torino: Gallizio. VIII u. 312 S. 8º.

G. A. Serret. Trattato di trigonometria. Versione autorizzata dell' autore, con aggiunte per L. Fenoglio. (Collezione Paravia.) Terza edizione. Torino: Paravia. 218 S. 8º.

A. Socci e G. Tolomei. Elementi di geometria secondo il metodo di Euclide: libro di testo per i ginnasî e licei. Volume II, per la 1ª classe liceale. 8ª edizione. Firenze: Niccolai. 200 S. 8º.

A. Socci e G. Tolomei. Elementi di geometria secondo il metodo di Euclide. Volume III, per la 2ª classe liceale. 7ª edizione. Firenze: Le Monnier. 149 S. 8º.

G. M. Testi. Corso di matematiche, ad uso delle scuole secondarie superiori e più specialmente degli istituti tecnici. Volume IV: Complementi di geometria. 3ª edizione, riveduta e corretta. Livorno: Giusti. XIII u. 236 S. 8º.

G. M. Testi. Elementi di geometria. 13mo edizione, modificata e corretta. Livorno: Giusti. IX u. 239 S. 16mo.

G. Veronese. Elementi di geometria, trattati con la collaborazione di P. Gazzaniga. Parte II. Edizione quarta. Padova: Drucker. XIV u. 245 S. 8°.

G. M. Bruno. Geometrìa, con numerosos ejercicios. 2ª edición, revisada y aumentada. Tours: Mame. 392 S. 16mo.

G. M. Bruno. Nociones elementales de geometría aplicados al dibujo lineal. 15ᵉ edición. Tours: Mame. 121 S. 16mo.

A. M. Astrjab. Anschauliche Geometrie. Elementarlehrbuch für die drei niederen Klassen der höheren Schulen und für Elementarschulen. Kijew. VII + 141 S. 8°. Mit 209 Fig. (Russisch.)

F. Filippowitsch. Elementargeometrie in Abwicklungen. St. Petersburg. 23 S. 8°. (Russisch.)

Gr. C. Young und W. H. Young. Erstes Buch über Geometrie. Aus dem Englischen übersetzt von A. J. Batschinski. Moskau. VI + 199 S. 8°.

Menkewitsch. Lehrgang der Stereometrie im Stereoskop. Mit 50 Stereogrammen. 47 S. 16° u. 50 Stereodiagramme. (Russisch.)

Jussewitsch. Stereometrie im Stereoskop. (Ser. 2.) St. Petersburg. 17 S. 16°.

S. Wulich. Kurzer Leitfaden der Geometrie und Sammlung geometrischer Aufgaben. 32. Aufl. St. Petersburg. XVIII + 186 S. 8°. (Russisch.)

A. Dawidov. Geometrie für die Distriktschulen nach Diesterweg. 26. Aufl. Moskau. 62 S. 8°. (Russisch.)

A. Malinin. Geometrie und Sammlung geometrischer Aufgaben. Leitfaden für Distrikt- und Bürgerschulen. 18. Aufl. Moskau. 221 S. 8°. (Russisch.)

P. M. Mironov. Vorbereitungskursus der Geometrie nebst einer Sammlung geometrischer Aufgaben und Körperabwicklungen. Leitfaden der 3. und 4. Abteilung. der Bürgerschulen (nach d. Erl. 31. V. 1872). 6. Aufl. Ufa. IV + 122 S. 8° + 11 Taf. (Russisch.)

P. M. Mironov. Geometrie. Lehrkursus der Bürgerschulen. 3. Aufl. Ufa. 2 + II + 176 S. (Russisch.)

J. Pletnev. Lehrbuch der Geometrie für Bürgerschulen. Lehrgang des 3. und 4. Lehrjahres. St. Petersburg. 93 S. 8°. (Russisch.)

M. A. Strachov. Kurzer Leitfaden der Geometrie nebst praktischen Anwendungen. 8. Aufl. St. Petersburg. II + 142 S. 8°. Mit 306 Fig. (Russisch.)

G. J. Jurewitsch. Kurzgefaßte Geometrie. Für zweiklassige Kirchdorfschulen. 27. Aufl. Riga. 96 S. 8°. (Russisch.)

A. Gika und A. Muromzev. Geometrische Aufgaben. Lehrgang der höheren Lehranstalten. Teil I. Planimetrische Aufgaben. 10. Aufl. 1885. Teil II. Stereometrische Aufgaben (Nr. 1774-2813). 8. Aufl. 1825. Moskau. 162 S. (Russisch.)

E. Magalieff. Systematische Sammlung geometrischer Aufgaben. Teil I. Planimetrie. 5. Aufl. Moskau. XII + 118 S. 8°. Teil II. Stereometrie. 4. Aufl. VIII + 120 S. 8°. (Russisch.)

W. P. MININ. Sammlung geometrischer Aufgaben, den Lehrgängen der Gymnasien, Realschulen und anderer höheren Schulen angepaßt. Aufgaben der algebraischen Geometrie. Stoff für die praktischen Übungen der Schüler im Laufe des Lehrjahres und Themata zu schriftlichen Prüfungen. Nebst einer Sammlung von Aufgaben, welche durch vereinigte Anwendung der Geometrie und Trigonometrie gelöst werden. 11. Aufl. Moskau. 202 S. 8°. (Russisch.)

N. RYBKIN. Sammlung geometrischer Rechenaufgaben. Teil I. Planimetrie. 8. Aufl. 2 + 126 S. 8°. Teil II. Stereometrie. 6. Aufl. Moskau. 100 S. 8°. (Russisch.)

A. A. LĬAMIN. Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Algebraische Methode der Lösung geometrischer konstruktiver Aufgaben. (Für Knabengymnasien.) Moskau. 100 S. 8°.

S. GLASENAPP. Ebene Trigonometrie. Teil I. Dreiecksauflösung. St. Petersburg. 115 S. 8°. (Russisch.)

J. DSCHISCHKARIANI. Elementare Trigonometrie. Baku. Selbstverlag. 232 + V + 2 S. 8°.

J. DSCHISCHKARIANI. Elementare Trigonometrie nebst Anwendungen auf Arithmetik, Algebra und Geometrie. 1. Lief. Baku. V + 67 S. 8°. (Russisch.)

A. A. LĬAMIN. Ebene Trigonometrie für höhere Schulen. Moskau. 119 S. 8°. Mit Fig. (Russisch.)

N. RYBKIN. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst Aufgabensammlung. 8. Aufl. Moskau. 170 S. 8°. (Russisch.)

DU SEGNY. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Nach den Programmen und den Anforderungen der Prüfungen zum Eintritt in die technischen Hochschulen. Dritte überarbeitete und verm. Auflage. St. Petersburg. VIII + 184 S. 8°. (Russisch.)

N. P. SLETOV. Ebene Trigonometrie. Lehrbuch nach der induktiven Unterrichtsmethode. Kijew. VIII + 184 S. 8°. (Russisch.)

B. TSCHICHANOV. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 4. Aufl. Minsk. 88 + 4 S. 8°. (Russisch.)

N. A. SCHAPOSCHNIKOV. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 18. Aufl. Moskau. 2 + 120 S. 8°. (Russisch.)

S. WOJTINSKIJ. Sammlung von Fragen und Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie für höheren Schulen und für die Aspiranten der Hochschulen. 3. Liefg. St. Petersburg. V + 168 S. 8°. (Russisch.)

W. IWANOV. Systematische Sammlung von Aufgaben auf Rotationskörpern, welche mit Hülfe der Trigonometrie gelöst werden. Nebst Beweisen einiger Lehrsätze, auf welche abgekürzte Lösungsmethoden gegründet sind. Kijew. III + 192 + 2 S. 8°.

A. A. LĬAMIN. Methodische Aufgabensammlung der ebenen Trigonometrie. Mit einer Wandtafel der trigonometrischen Formeln als Beilage. Moskau. 130 + 1 S. 8°. (Russisch.)

B. ISSATSCHKIN. Sammlung geometrischer Aufgaben, die mit Hülfe der Trigonometrie lösbar sind. St. Petersburg. 83 S. 8°. (Russisch.)

B. Issatschkin. Methoden zur Auflösung von Aufgaben auf Rotationskörpern. St. Petersburg. 51 S. 8°. (Russisch.)

W. P. Minin. Sammlung trigonometrischer Aufgaben für Gymnasien, Realschulen sowie andere höhere Schulen. 8. Aufl. Moskau. 180 S. 8°. (Russisch.)

N. Rybkin. Sammlung stereometrischer Aufgaben, welche die Anwendung der Trigonometrie erfordern. 12. Aufl. Moskau. V + 80 S. 8°. (Russisch.)

C. Alasia. Sulle mediane ed il baricentro del triangolo. Pitagora **17**, 129-135.

P. Aussant-Carà. Sulla discussione dei problemi riducibili al secondo grado. Con varie applicazioni. Livorno: Giusti. 58 S. 8°.

Baker. The problem of the angle-bisectors. Diss. Univ. Chicago. 104 S. 4°.

L. Balser. Beweis eines stereometrischen Satzes. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 32-33.

Geometrische Ableitung der Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfes. Lp.

K. T. Baum. Der Kreis und seine Quadrate, die arithmetische Wage, $\pi = 3,125$ oder $3\frac{1}{8}$ und die Quadratur des Kreises. Saarbrücken. 8°.

W. F. Beard. Feuerbach's theorem. Another proof. Ed. Times (2) **19**, 76-77.

Naraniengar. Feuerbach's theorem. Another proof. Ed. Times (2) **19**, 77-78.

H. Böttcher. Umkehrung des Ptolemäus-Satzes. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 155.

H. Böttcher. Zur Herstellung Heronischer Dreiecke. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 156.

H. Böttcher. Berechnung der Tangensfunktion für 18°, 36°, 54°, 72°. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 113-114.

O. Richter. Bemerkung zu der Berechnung der trigonometrischen Tangenten. Unterrichtsbl. f. Math. **37**, 156.

A. Botto. Soluzione geometrica del problema relativo alla duplicazione del cubo. Torino: Paravia. 13 S. 8°.

S. Catania. Sopra una dimostrazione del teorema di Pitagora. Pitagora **17**, 76-79.

C. H. Chepmell. In a given circle to inscribe the regular polygon of thirty-four sides. Ed. Times (2) **20**, 51-54.

A. Chiari. Alcune relazioni intorno al quadrilatero inscrittibile. Pitagora **17**, 47-48.

F. Ferrari. Sopra i poligoni convessi inscritti e circoscritti. Pitagora **17**, 126-127.

H. Flückiger. Die Flächenteilung des Dreiecks mit Hülfe der Hyperbel. Bern. Mitt. 1910, 14-63.

C. Frenzel. Erwiderung auf den Artikel von W. Lorey auf S. 333 bis 338 des Jahrgangs 41. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 56-58.

Widerlegung einiger Behauptungen Loreys. Lp.

C. A. Fuchs. Die Ähnlichkeitsbeziehungen zweier und mehrerer Kreise. Progr. Komotau. 23 S. 8⁰.

W. Gallatly. Van Aubel's theorem. Ed. Times (2) **20**, 107-108.

W. Gallatly. The inscribed and circumscribed triangles of a given triangle. Ed. Times (2) **20**, 26-29.

A. Goeringer. Der goldene Schnitt (göttliche Proportion) und seine Beziehung zum menschlichen Körper und anderen Dingen mit Zugrundelegung des goldenen Zirkels. Zweite Auflage von A. Hoelzel. München: Lindauer.

M. Haas. Quadratur der Hyperbel. Časopis **40**, 87-91, 237-244. (Böhmisch.)

E. Grünberger. Das Schnittwinkelproblem dreier Kreise. Progr. Plan. 9 S. 8⁰.

Hall. Darstellung des arithmetischen und geometrischen Mittels zweier Strecken in einer Figur. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 191-192.

Vgl. F. d. M. **41**, 210, 1910.

C. Hoffmann. Notiz zur stetigen Teilung einer Strecke. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 53-54.

W. Jaeckel. Gedächtnisregel für Sinuswerte. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 16-17.

A. Jeřábek. Über den inneren Zusammenhang von einigen Aufgaben des Problems des Apollonius. Časopis **40**, 368-384, 511-522. (Böhmisch.)

V. Jeřábek. Über das Viereck, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Časopis **40**, 102-104. (Böhmisch.)

U. S. Laffin. Mathematical construction. Chicago: Flanagan. 129 S.

J. Langr. Einige Bemerkungen zur Dreiecksgeometrie. Časopis **40**, 505-510. (Böhmisch.)

E. Liénard. Rayon de courbure d'une roulette quelconque. Mathesis (4) **1**, 236-238.

W. Fr. Meyer. Über Dreiecksgeometrie. Königsberg Phys.-ökon. Ges. **52**, 239-256.

G. Matera. Alcune costruzioni geometriche: Rettificazione della circonferenza, poligoni regolari, poligoni stellati, costruzione dell' ovolo. Napoli: De Rosa. 16 S. 8⁰.

J. Neuberg. Über die Kiepertsche Hyperbel. Bern. Mitt. 1910, 187-197.

Chr. Nielsen. Nochmals über Zerlegungsbeweise zum Pythagoreischen Satz. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 17.

Literarische Bemerkungen zum vorjährigen Aufsatz (F. d. M. **41**, 560, 1910). Lp.

R. P. Paranjpye. Feuerbach's Theorem. Journ. Ind. M. S. **3**, 193-194.

C. J. Rueda. Sobre el numero de poligonos semicirculares. Rev. Soc. Mat. Española **1**, 17-21. (Vgl. S. 525.)

V. Rychlik. Über das Malfattische Problem. Časopis **40**, 81-91, 245-250. (Böhmisch.)

K. J. Sanjana. A proof of Feuerbach's Theorem. Journ. Ind. M. S. 3, 115-117.

J. Schlesinger. Beitrag zur Lehre von der Proportionalität der Linien. Ein Beispiel von Grenzbetrachtung. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 306-307.

M. Vegas. Generalización del círculo de los nueve puntos. Rev. Soc. Mat. Española **1**, 58-62. (Vgl. S. 529.)

J. Verwey de Winter. Korte afleiding der formule voor de bissectrix. Wisk. Tijdschr. **7**, 128.

D. J. Kruytbosek. De bissectrice formules. Wisk. Tijdschr. **8**, 101-102.

H. Vogt. Geometrie und Ökonomie der Bienenzelle. Breslau: Trewendt & Granier. 63 S. 8°. (Festschrift zur Jahrhundertfeier der Universität Breslau.)

J. Whiteford. The trisection of the angle by plane geometry, verified by trigonometry, with concrete examples. Cambridge: Bowes and Bowes; Greenock: K. McKelire and Sons, Ltd., Edinburgh and Glasgow: J. Menzies and Co., Ltd. 169 S.

Ein approximierendes Verfahren. Vgl. Nature **86**, 581-582. J.

M. Zwerger. Geometrische Ableitung der Gleichung für $\sin\alpha + \sin\beta$. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 17.

Lemme. Geometrische Ableitung der Gleichungen für $\sin\alpha \pm \sin\beta$ und $\cos\beta \pm \cos\alpha$. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 74-75.

H. Böttcher. Noch eine geometrische Ableitung für $\sin\alpha \pm \sin\beta$. Unterrichtsbl. f. Math. 155-156.

Kapitel 4.

Darstellende Geometrie.

F. von Dalwigk. Vorlesungen über darstellende Geometrie. 1. Band: Die Methoden der Parallelprojektion. Leipzig: B. G. Teubner. XVI u. 363 S. 12 Figurentafeln. gr. 8°.

Das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verf. seit Jahren an der Marburger Universität gehalten hat; sie illustrieren daher die Anschauungen über den Unterricht in diesem Zweig der angewandten Mathematik, die v. Dalwigk in dem Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. **15**, 349-376 kurz skizziert hat. Die Darstellungsweise ist ausführlich und ganz elementar gehalten, also offenbar für die ersten Studiensemester bestimmt; sie umgeht daher gern auch grundsätzliche Dinge, sobald diese sich nicht ganz leicht erledigen lassen. Mancher wird jedenfalls das Fehlen eines Beweises für den Pohlkeschen Satz in einem für Mathematiker bestimmten Lehrbuch nicht ganz geringen Umfangs (das Werk ist auf zwei Bände berechnet) als einen Mangel empfinden, und auch die vielfachen Verweise auf andere Lehrbücher stören geradezu den geschlossenen Eindruck des Ganzen. Von projektiven Beziehungen wird nur

wenig Gebrauch gemacht, und jedenfalls ist der Verf. der naheliegenden Versuchung aus dem Wege gegangen, den reizvollen Zusammenhang zwischen projektiver und darstellender Geometrie im einzelnen aufzuzeigen und dadurch die letzteren nicht nur als praktische Disziplin zu behandeln, sondern ihr auch die richtige Stellung im System der theoretischen Geometrie anzuweisen. So paßt sich das Buch in seiner Methode recht gut den Anforderungen der technischen Hochschulen an, wo ja ein allzu tiefes Eingehen auf theoretische Dinge sich von selbst verbietet. Auch der Inhalt, aus dem als weniger bekannte Einzelheit die Rodenbergsche Bestimmung der Lichtgleichen hervorgehoben sei, weicht nicht wesentlich von dem an den deutschen technischen Hochschulen üblichen Lehrgang ab; nur wird grundsätzlich auf die Behandlung praktischer Aufgaben verzichtet. Fast drei Viertel des Buches nimmt die Mongesche Projektion ein; dann wird die schiefe Parallelprojektion einigermaßen ausführlich behandelt, während für die orthogonale Axonometrie ganz kurz die Haupteigenschaften und -konstruktionen erörtert werden und die kotierte Projektion nur im Anhang Aufnahme gefunden hat. Sk.

J. Schlotke. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Teil. Spezielle darstellende Geometrie. 7. Auflage. Herausgegeben von C. Rodenberg. Leipzig: L. Degener. VIII und 169 S. 8°.

Die siebente Auflage unterscheidet sich von ihren Vorgängern nur unwesentlich; hinzugekommen ist die von dem Herausgeber angefügte Konstruktion der Archimedischen Wasserschraube. Mit der Lage der Spitzen in der Aufrißkontur der Serpentine (Fig. 165), die aus den früheren Auflagen übernommen ist, wird nicht jeder einverstanden sein. Überhaupt erfüllt die Ausführung der Figuren nicht die Ansprüche, die man neuerdings an derartige Lehrbücher stellt. Bei der Beliebtheit, die das Buch sich im Kreise der Studierenden erworben hat, ist zu hoffen, daß eine baldige Neuauflage Gelegenheit gibt, diesen oft störend empfundenen Mangel zu beseitigen. Sk.

N. P. Makarov. Vollständiger Kursus der darstellenden Geometrie. St. Petersburg. 6. Aufl. XXXII + 432 S. 8°. Mit 116 Bl. in Atlas. (Russisch.)

Dieses vortreffliche Lehrbuch, dessen 5. Auflage 1903 erschien (F. d. M. 34, 583 erwähnt), ist in der neuen Ausgabe um 50 Seiten und 18 Tafeln vermehrt. Si.

R. Suppantschitsch. Leitfaden der darstellenden Geometrie. Wien: F. Tempsky. 269 S. gr. 8°.

Das Buch reiht sich würdig den zahlreichen guten österreichischen Schullehrbüchern für darstellende Geometrie an. Inhalt und Methode ist die lehrplanmäßig vorgeschriebene. Sk.

Smolik-Heller. Raumlehre und darstellende Geometrie. Bearb. von K. Hahndel. 4. Aufl. Wien: F. Tempsky. 211 S. gr. 8°.

Wie für mathematische Schulbücher schon seit langem, bildet sich allmählich auch für die Leitfäden der darstellenden Geometrie (wenigstens in Österreich, wo diese Literatur eine größere Bedeutung erlangt hat als bei uns) allmählich ein Kanon aus, nach dem Inhalt und Darstellung orientiert sind. Verschwindet so auch einigermaßen das Individuelle, so passen sich die Lehrbücher doch immer besser den Zwecken des Unterrichts an, indem früher häufige methodische Fehler immer mehr vermieden werden. Auch das vorliegende Buch wird sich im Unterricht recht brauchbar erweisen. Der übliche Lehrstoff (im wesentlichen das Grund-Aufrißverfahren, dann, mehr anhangsweise, die Perspektive, kotierte Projektion und Axonometrie) ist hier nach Klassenstufen geordnet. Die nicht immer systematische Anordnung läßt sich stets durch didaktische Rücksichten rechtfertigen. Sk.

W. Rudolphi. Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene in Verbindung mit darstellender Geometrie. Progr. Gymn. u. Oberrealsch. Neumünster. 34 S. 19 Taf. 4°.

Verf. führt den naheliegenden Gedanken durch, daß die analytische Geometrie des Raumes und die darstellende Geometrie parallel zueinander behandelt werden können. Zu diesem Zwecke löst er die Fundamentalaufgaben, die auf lineare Gleichungen führen, sowohl rechnerisch, wie zeichnend. Das Verfahren wird demjenigen sympathisch sein, der als die Krone des darstellend-geometrischen Unterrichts auf der Schule die Konstruktion des kürzesten Abstands zweier Windschiefen ansieht. Sk.

B. Kröger. Perspektivische Abbildungen und ihre Herstellung aus gegebenen Orthogonalprojektionen. Progr. Oberrealsch. a. d. Uhlenhorst. Hamburg. 34 S. 10 Taf. 8°.

Das Büchlein enthält nichts Neues, ist aber als Orientierung über Stoff und Methode ganz brauchbar. Sk.

Th. Schmid. Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. Leipzig: G. J. Göschen. 20 Blätter in Mappe Folio.

Den Übungsvorlagen aus dem Gebiete der Architektur- und Bautechnik, die Emil Müller im Vorjahre herausgegeben hat, folgt hier eine Auswahl von Beispielen aus der Maschinentechnik, wie sie sein Kollege Th. Schmid seinen Übungen an der Wiener Technischen Hochschule zugrunde legt. Die Sammlung, die für alle technisch vorkommenden Körperformen Beispiele liefert, kann benutzt werden zur Konstruktion von Schnitten und Durchdringungen, von Schatten und Isophoten in Grund- und Aufriß, zur orthogonal-

oder schiefaxonometrischen Darstellung der Objekte, während der Natur der Sache nach für Perspektive geeignete Vorlagen nur spärlich vertreten sind. Alles in allem wird jeder Lehrer der darstellenden Geometrie auch aus diesen Aufgaben Anregung für seine eigene Praxis gewinnen, wenn auch unzweifelhaft die Bauwissenschaften im ganzen eine größere Abwechselung und reichere Formenfülle darbieten. Sk.

E. Papperitz. Über das Zeichnen im Raume. Deutsche Math.-Ver. **20**, 307-314.

E. Papperitz. Die kinodiaphragmatische Projektion, ein neues Lehrmittel in der Geometrie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 465-468.

Erläuterung eines vom Verf. ausgebildeten Verfahrens, räumliche Gebilde in ihrer Entstehung und gegenseitigen Verwandtschaft plastisch darzustellen. Eine Rotationsfläche z. B. wird durch eine schnell rotierende Meridiankurve zur Anschauung gebracht; ihre Schnittkurve mit einem Zylinder wird aus ihr durch einen Lichtzylinder ausgeschnitten, der durch einen Lichtspalt passender Form erzeugt wird. Durch Änderung der gegenseitigen Lage beider Flächen kann man die stetige Änderung der Schnittkurve zweier Flächen in überaus anschaulicher Weise demonstrieren. Beide Artikel sind durch instruktive Lichtbilder erläutert. Sk.

E. Ascione. Projezione biassiale normale. Atti Acc. Pontaniana (2) **16**, Nr. I, 40 S.

Wenn im Raume zwei windschiefe Geraden gegeben sind und eine feste Ebene (die Bildebene), so kann man jedem Punkte P des Raumes den Punkt P' entsprechen lassen, der die Spur der die beiden gegebenen Geraden schneidenden Geraden durch P ist. Hieraus entsteht ein System der darstellenden Geometrie auf der Bildebene, das der Verf. sorgfältig untersucht und von dem er einige besondere Fälle hervorhebt. La. (Lp.)

Fr. Schilling. Die geometrische Theorie der Stereophotogrammetrie. Zs. f. Vermessungen **40**, 637-650, 669-682, 701-712, 725-734, 757-763, 785-798, 809-823.

Eine eingehende Diskussion der stereophotogrammetrischen Methoden, die auf der Anwendung des Pulfrichschen Stereokomparators beruhen. Dabei wird auf die nicht ganz leichte — es handelt sich um physiologische Schwierigkeiten — Feststellung der Genauigkeit das gebührende Gewicht gelegt. Sk.

K. Bartel. Über eine Anwendung der axonometrischen Methode in der Zentralperspektive. Lemberg: Czasopisms techniczne, 1909, 8 S. (Polnisch.)

Nach einem bekannten Satze von Pohlke kann man irgend drei Strecken in der Ebene, die von einem Punkte ausgehen, als eine (im allgemeinen schiefe) Parallelprojektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes betrachten. Zur Be-

stimmung der axonometrischen Verkürzungen sind verschiedene Methoden vorgeschlagen worden. Insbesondere hat neuerdings A. Denizot ein Verfahren angegeben, das die sonst übliche Trennung der schiefen und der orthogonalen Axonometrie aufhebt (Wien. Ber. **117**, 231-236; F. d. M. **39**, 598, 1908). Was die Zentralaxonometrie anbetrifft, so können die axonometrischen Verkürzungen nach G. Hauck (Zs. f. Math. u. Ph. **21**, 81-99; F. d. M. **8**, 345, 1876) und G. Loria (Vorlesungen über Darst. Geom. 1907; F. d. M. **38**, 554, 1907) rechnerisch ermittelt werden. Der Verf. bestimmt diese durch Konstruktion unter völliger Ausschaltung jeglicher Rechnung. Es werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem der Projektionsstrahl des Koordinatenursprunges auf der Bildebene senkrecht steht oder nicht. Ltn.

G. Scheffers. Die Grundaufgabe der senkrechten Axonometrie. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. **10**, 88-95.

Es handelt sich um eine Konstruktion des Achsenkreuzes und der Verkürzungsverhältnisse für die allgemeine orthogonale Axonometrie, in einer Anordnung, die trigonometrische Beziehungen vermeidet und mit möglich geringem Aufwand an Konstruktionen. Das Verfahren ist für den Unterricht auf das vorteilhafteste zu verwerten. Sk.

M. Koppe. Beweis des Pohlkeschen Satzes. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. **10**, 108-110.

Drei beliebige, von einem Punkte ausgehende Strecken einer Ebene können stets senkrecht projiziert werden in drei Strecken einer anderen Ebene, für die, wenn man sie als komplexe Zahlenebene interpretiert, die Gaußsche Relation gilt, die für die Orthogonalprojektion eines orthogonalen Achsendreibeins charakteristisch ist. Dieser kurze und elegante Beweis des Pohlkeschen Satzes ist eine hübsche Anwendung der geometrischen Darstellung komplexer Zahlen. Sk.

Wagner. Lösung der Aufgaben des nautischen Dreiecks mittelst darstellender Geometrie. Progr. Oberrealsch. Oberstein-Idar. 2 S. 4°.

Es werden sehr kurz und daher dem Wortlaut nach manchmal nicht immer korrekt zehn Aufgaben aus der messenden Astronomie konstruktiv behandelt. Sk.

E. Müller. Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen. (1. Mitteilung.) Wien. Ber. **120**, 1763-1810.

Inhaltsübersicht: Vorbemerkungen. I. Allgemeine Methode der Abbildung einer Fläche auf eine Ebene. II. Abbildung von Kurven einer Fläche. III. Darstellung von Kurven und Flächen mittels Normalrisses ihrer

Punkte und der Fluchtelemente ihrer Tangenten, bzw. Tangentenebenen. IV. Die Zuordnung. V. Das einer Schraubfläche zugeordnete Nullsystem. VI. Eine Verallgemeinerung der Dreh- und Schraubflächen. VII. Über Eigenschaften von Reziprozitäten, zufolge deren sie Flächen darstellen. VIII. Festlegung des einer Schraubfläche zugeordneten Nullsystems durch E' und $\overline{E}$. IX. Betrachtung einiger Sonderfälle. X. Algebraische Nullsysteme. XI. Polare Schraubflächen.

Gegeben sei eine (horizontale) Bildebene Π und außerhalb ein Punkt O. Die Tangenten einer Fläche werden dann dargestellt durch ihre Fluchtpunkte in Π mit O als Augpunkt; jede Berührungsebene durch ihre Fluchtlinie. Die Fläche selbst ergibt sich durch die eben auseinandergesetzte Abbildung ihrer Tangentialebenen und die Orthogonalprojektion ihrer Punkte; d. h. jede Fläche wird dargestellt durch eine (mehrdeutige) reziproke Verwandtschaft (Konnex) in der Bildebene. Vielfach ist es ratsam, diese Zuordnung noch dadurch zu modifizieren, daß man die Fluchtlinien (bzw. -punkte) noch in bestimmtem Sinne um 90° dreht, wodurch ihr Charakter ungeändert bleibt. Für diese neue Darstellung und unter der Voraussetzung, daß der Abstand des Punktes O die reduzierte Ganghöhe einer Schraubfläche ist, wird die Darstellung dieser Schraubfläche ein Nullsystem, das Drehungen um einen festen Punkt O' gestattet. Drehflächen ergeben sich, wenn jedem Punkte P' der Reziprozität Geraden entsprechen, die zu $O'P'$ parallel sind. Flächen, für die die P' entsprechenden Geraden mit $O'P'$ einen konstanten Winkel bilden, nennt Verf. D r e h a f f i n - f l ä c h e n, deren Gleichung in Zylinderkoordinaten $z = \psi(rc^{c\varphi})$ lautet. Ihre Schnitte mit zu Π parallelen Ebenen sind untereinander ähnliche logarithmische Spiralen, Bahnkurven einer bestimmten eingliedrigen Gruppe von Affinitäten. Unterwirft man eine beliebige Kurve E einer solchen eingliedrigen Gruppe, so entsteht eine allgemeinere Fläche, die S c h r a u b a f f i n f l ä c h e $z = \psi(rc^{c\varphi}) + k\varphi$. Die zu ihnen gehörige Reziprozität gestattet eine Drehstreckung. Nach dieser geometrischen Untersuchung wird jetzt analytisch die Beschaffenheit der Reziprozitäten untersucht, die Flächen darstellen. Dabei ergibt sich die Umkehrung einer Reihe früherer Sätze und als neues Resultat: die Flächen $z = k \log x + \vartheta\left(\frac{y}{x}\right)$ (Drehlogarithmoide) sind die einzigen, die durch Reziprozitäten dargestellt werden, die eine Gruppe von Streckungen gestatten. Diese allgemeinen Sätze werden dann, in den Abschnitten IX-XI auf besondere Fälle angewandt. Sk.

V. Jarolímek. Zur Durchdringung zweier dreiachsigen Ellipsoide. Rozpravy **20**, Nr. 18, 7 S. (Böhmisch.)

V. Jarolímek. Bulletin international **16**, 128-135. (Deutsche Übersetzung.)

Der Verf. gibt eine Konstruktion der Durchdringungskurve von zwei allgemeinen Ellipsoiden in allgemeiner Lage. Inhalt: 1. Konstruktion von homothetischen Schnitten auf zwei Ellipsoiden. 2. Die Konstruktion der Durchdringung. 3. Zu einem gegebenen Ellipsoide ist ein konzentrisches und zweipunktig berührendes Ellipsoid von gegebener Gestalt und Lage zu konstruieren. Pe.

B. Procházka. Ein Beitrag zur Konstruktion der Achsen der Flächen zweiten Grades. Rozpravy **20**, Nr. 21, 4 S. (Böhmisch.)

Eine Vereinfachung der Konstruktion von Fiedler (Die darstellende Geometrie. 3. Ausgabe. II. Teil. S. 39). Pe.

Fr. Kadeřávek. Über die Grenze des eigenen Schattens der windschiefen Schraubenflächen in paralleler Beleuchtung. Rozpravy **20**, Nr. 33, 4 S. (Böhmisch.)

Konstruktion der Tangente und des Krümmungsmittelpunktes der betreffenden Kurve. Pe.

O. Richter. Der Ellipsenreif. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 583-584.

Eine Vorschrift, aus vier Kreisbogen eine Figur zusammenzusetzen, die einer Ellipse von kleiner Exzentrizität sehr nahe kommt.

O. Richter. Eine Maximalaufgabe aus der darstellenden Geometrie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 384-385.

Es handelt sich um die Bestimmung eines Punktes in der Ellipse, die das Schrägbild eines Kreises ist. Lp.

M. Schilling. Katalog mathematischer Modelle. 7. Auflage. Leipzig: M. Schilling. XIV u. 172 S. 8°.

Die neue Auflage des F. d. M. **34**, 1024 (1903) zuletzt angezeigten Katalogs ist in seiner äußeren Anordnung mit der früheren übereinstimmend; neu hinzugetreten sind elf Serien, die sich auf Kinematik, Infinitesimalgeometrie, Analysis situs, Algebra, affine Geometrie und elementare Stereometrie beziehen. Sk.

H. von Sanden. Über eine zweckmäßige Konstruktion des Stangenplanimeters. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 314-318.

Statt der vertikal zu führenden Schneide des Prytzschen Planimeters (Theorie s. C. Runge, Zs. f. Vermessungsw. **24**, 321, 1895; A. Korselt, Zs. f. Math. u. Phys. **43**, 312, 1898) werden zwei in gleichem Abstand von ihr angebrachte Rollen benutzt, deren gegenseitige Verdrehung nach dem Umfahren einer geschlossenen Fläche, mit einer Konstante multipliziert, den Flächeninhalt ergibt. Der mittlere Fehler einer Versuchsreihe ergab sich nicht unwesentlich kleiner als beim Polarplanimeter. Sk.

Weitere Literatur.

H. ADAMS. Theory and practice in designing. New York: Longmans. 257 S. 8°.

F. W. BARTLETT and T. W. JOHNSON. Engineering descriptive geometry: a treatise on descriptive geometry as the basis of mechanical drawing, explaining geometrically the operations customary in the draughting room. New York: John Wiley & Sons; London: Chapman & Hall, Ltd., XII u. 159 S. [Nature 88, 106.]

L. BÉCOURT. Dessin technique. Cours professionnel du dessin géométrique. 7e édition. Paris: Hachette. 16 S. 16mo.

R. BRICARD. Géométrie descriptive. Paris: Doin. XII u. 269 S. 12mo. (Encyclopédie scientifique. Bibliothèque de Mathématiques appliquées.)

F. BUSMANN. Ein neuer Kegelschnittzirkel. Bonn a. R.: Hilgers.

A. E. CHURCH and G. M. BARTLETT. Elements of descriptive geometry; with applications to spherical and isometric projections, shades and shadows and perspective. New York: American Book Co. 286 S. 8°.

A. E. CHURCH and G. M. BARTLETT. Elements of descriptive geometry. Part I: Orthographic projection. New York: American Book Co. 178 S. 8°.

J. DOLEŽAL. Der Dandelinsche Satz und seine Anwendungen. Časopis **40**, 91-98, 237-244. (Böhmisch.)

A. GARNERI. Corso elementare di disegno geometrico. Parte I: Problemi grafici geometrici e ornamentazione geometrica. 24a edizione. Parte II. Proiezioni ortogonali e applicazione alla meccanica, teoria delle ombre, prospettiva parallela. Settima edizione. Torino: Paravia. VI u. 134, 159 S. 16mo.

G. DI GRAZIA. Piccolo trattato di geometria descrittiva. Milano: Vallardi. 38 S. 8°. (1910.)

J. F. HELLER. Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der darstellenden Geometrie für Realschulen. Zwei Teile. 3. Auflage. 1. Teil. Elementaraufgaben. Darstellung und Beleuchtung eckiger Körper. V u. 127 S. 2. Teil. Behandlung der runden Körper. Zentralprojektion. VI u. 100 S. Wien: Hölder. gr. 8°.

KÖRBERS Strahlendiagramm zur vereinfachten Herstellung perspektivischer Zeichnungen. Zum Gebrauch für Architekten, Ingenieure, Kunstgewerbetreibende und Landschaftsgärtner. 3. Auflage. Berlin: Ernst. V u. 104 S.

J. W. N. LE HEUX. Lissajoussche Stimmgabelkurven in stereoskopischer Projektion. Leipzig: Barth. 8 S. 8°.

M. MEHNER. Die Unterrichtspraxis der Fortbildungsschule. II: Projektionslehre und Linearzeichnen, bearbeitet von H. Dillman. Leipzig: A. Hahn. 116 S. 8°.

W. W. MILLER. Descriptive geometry. Champaign, Ill. 127 u. 20 S. 12mo.

E. MÜLLER. Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie. 4. Heft. Wien: F. Deuticke. 10 Bl. 8°.
(Referat F. d. M. **41**, 598, 1910.)

E. Oster. Zentralperspektive, stereographische Projektion und quadratische Binärform. Diss. Straßburg.

E. Reindell. Das Linearzeichnen in Volks-, Mittel- und Fortbildungsschulen. Zweiter (Schluß-) Teil: Projektivisches Zeichnen. Nebst einem Vorwort von E. Timm. Dortmund: Ruhfus. 15 S. 4°.

C. Roubaudi. Cours de géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire. 6e édition, revue, conforme au programme du 27 juillet 1905. Fascicule premier: Second cycle, classe de 1re (Sections C et D). Paris: Masson. VII u. 157 S. 8°.

Fr. Schiffner. Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie an österreichischen Oberrealschulen. 3. Auflage. Einbändige Ausgabe. Wien: F. Deuticke. VI u. 246 S. 8°.

O. H. P. Silber. Leitfaden der Projektionslehre und darstellenden Geometrie. Glauchau. gr. 8°.

H. J. Spooner. Industrial drawing and geometry: an introduction to various branches of technical drawing. With 620 Figures and 320 Exercises. London: Longmans, Green and Co. XIV u. 170 S. 4°.

A. Vitale. Trattato elementare di geometria descrittiva. Avellino: Pergola. 65 S. 8°.

F. Vismara. Le proiezioni ortogonali. Milano: Sonzogno. 62 S. 16mo. (Biblioteca del popolo. Nr. 496.)

E. Vogel. Die darstellend-geometrische Behandlung der Kegelschnitte. 1. Teil: Polarität am Kreise. Progr. Göding. 12 S. 8° (1910).

E. Vogel. Elementarer Nachweis einer Konstruktion der Ellipse aus konjugierten Durchmessern. Progr. Göding. 3 S. 8° (1910).

G. Voltero. Un nuovo ellissografo: teoria, descrizione, applicazione. Torino: Cassone. 7 S. 8°.

M. Wacker. Gleichteilung einer Geraden in der Perspektive. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 85-86.

A. Weil. Sammlung graphischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. Mathematik und Physik. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Gebweiler: Boltze.

F. N. Willson. Theoretical and practical graphics. An educational course on the theory and practical applications of descriptive geometry and mechanical drawing. Princeton N.-J.: Graphics Press. VII + 264 + 29 S. 4°.

Kapitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

J. J. Milne. An elementary treatise on cross-ratio geometry, with historical notes. Cambridge: University Press. XXIII u. 288 S. 8°.

Das erste englische Lehrbuch über die mächtige Methode des Doppelverhältnisses (cross-ratio), deren Entwicklung man Möbius (1827), Steiner (1832) und Chasles (1829-1837, 1852, 1865) verdankt. Einige historische Anmerkungen sind gegeben.

Inhalt: I. Cross-ratio of a range of four points, and of a pencil of four lines. II. Equicross ranges and equicross pencils. Perspective. III. Harmonic ratio. IV. Homographic ranges and homographic pencils. V. Cross-axis. Cross-centre. VI. Metrical properties of homographic ranges. The constant of correspondence. Homographic equations. One-to-one correspondence. VII. Two homographic co-axial ranges. Their common points, and the methods of finding them. VIII. Problems of the three sections. Other problems whose solutions depend on finding the common points of two co-axial homographic ranges. IX. Involution. X. Involution and harmonic section. Harmonic properties of a quadrangle and quadrilateral. Pole and polar. [Appendix I. Pappus' account of the porisms of Euclid and his lemmas (I-XIX) on them.] XI. Anharmonic properties of points and tangents of a conic. The locus ad tres et quatuor lineas. XII. Pascal. Brianchon. Newton. Maclaurin. XIII. Pole and polar. Conjugate points and lines. Circular points at infinity. Desargues' theorem and its correlative. Propositions respecting triangles, quadrangles and quadrilaterals inscribed in- and circumscribed about a conic. Contra-polar conics. XIV. Common chords and common tangents of two or more conics (1) passing through four points, (2) touching four straight lines, i. e., of pencils and ranges of conics. XV. The homologue of a line and conic. Relations between a pair of common chords and the corresponding pair of tangent vertices. Relations between the four constants of homology. XVI. Construction of the common chords, tangent vertices, and common self-conjugate triangle of two conics. XVII. Conics having double contact. XVIII. Construction of a conic satisfying certain conditions. XIX. Homographic generalisation of circles and the circular points at infinity, conics and their foci, and other associated points and lines. [Appendix II. Pascal's theorem proved for the conic and line-pair by the methods of Euclid and Apollonius. Inhaltsverzeichnis.] (Vgl. Math. Gaz. **6**, 225-226, 1912.) J.

W. P. Milne. Projective geometry for use in colleges and schools. London: Macmillan and Co., Ltd. XVI u. 148 S. 8°.

Als Parallelschrift zu dem Buch über „Homogeneous Coordinates" (F. d. M. **41**, 639, 1910) verfaßt. Milne behandelt hier vom geometrischen Gesichtspunkte aus die Fragen, die in dem anderen Buch analytisch erledigt werden. Inhalt: I. The straight line. II. The conic. III. Reciprocation. The principle of duality. IV. General properties of conics. J.

J. Rey Pastor. Correspondencia de figuras elementales. Diss. Madrid. 96 S. (1910).

Die Arbeit gibt eine übersichtliche Zusammenstellung der grundlegenden Begriffe und Sätze, die für den synthetischen Aufbau der algebraischen Geometrie

gebraucht werden. Inhaltsübersicht: Polarität erster Ordnung bei den Figuren von n Elementen (Punkten einer Geraden, Geraden einer Ebene usw.). Höhere geometrische Korrespondenzen. Involutionen. Die quadratische und biquadratische Korrespondenz. Ponceletsche Polygone. Anwendungen auf die allgemeine Theorie der algebraischen Kurven. Kurvenbüschel und -scharen. Ebene Kurven dritter Ordnung. Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Art. Polaritat höherer Ordnung. Stz.

J. Rey Pastor. La involución ciclica en las figuras de 1^a, 2^a, y 3^a categoria. Asociación Esp. Valencia. 14 S.

Nachdem die Eigenschaften der zyklischen Involution n-ter Ordnung in einem einstufigen Grundgebilde geometrisch entwickelt worden sind, wird der Begriff der Polare eines Punktes in bezug auf ein Dreieck auf ein n-Eck ausgedehnt. Hierauf folgt die Untersuchung der zyklischen Involutionen n-ter Ordnung, und insbesondere der zweiten, dritten und vierten Ordnung in zweistufigen Grundgebilden. Mit einigen Worten wird zum Schluß auf die zyklischen Involutionen in einem Grundgebilde dritter Stufe eingegangen. Zch.

N. J. Lennes. Duality in projective geometry. Annals of Math. (2) **13**, 11-16.

Veblen und Young erklären in ihrem Lehrbuch (Projective geometry Vol. I, vgl. F. d. M. **41**, 606, 1910) die Ebene als Mannigfaltigkeit von Punkten, so daß die Behandlung von Punkt und Ebene nicht von vornherein gleichberechtigt erfolgt. Demgegenüber wird eine Anzahl von unabhängigen Axiomen angegeben, die es gestatten, Punkt und Ebene von Anfang an als im Sinne des Dualitätsprinzips gleichberechtigte Elemente zu handhaben. B.

H. B. Newson. Theory of collineations. Kansas Bull. **6**, Nr. 1, 319 S.

Elementare, zusammenfassende Darstellung der projektiven Gruppe in der Ebene und ihrer Untergruppen, die zur Einführung in den Gegenstand sehr wohl geeignet ist. Geometrische und analytische Methoden wechseln ab, zahlreiche Übungsaufgaben am Schluß jedes Kapitels regen zu weiterer Beschäftigung mit dem Gegenstande an. Der Verf., der durch die Lieschen Vorlesungen in Leipzig (1887-88) zur Gruppentheorie geführt wurde, hat dieses seine Lebensarbeit krönende Werk noch selbst zum Abschluß bringen, seine Drucklegung aber nur noch zum Teil überwachen können. Nach seinem Tode (17. Februar 1910) haben P. Wernicke und G. Mitchell die Sorge für die Herausgabe übernommen. Sk.

G. Kohn. Über zwei besondere Arten von Raumkollineationen und die Figur zweier Tetraeder. Wien. Ber. **120**, 111-136.

Zwei Paare ad, bc windschiefer Geraden bestimmen in einer Ebene ε durch ihre Spuren die Gegeneckenpaare eines einfachen Vierecks. Bewegt sich ε, so durchlaufen die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare des Vierecks zwei kollineare Räume. In dieser „Diagonalkollineation $[ad, bc]$" entsprechen einander die Geraden jedes Paares involutorisch. Es gibt drei Diagonalkollineationen, durch welche das Quadrupel der Verbindungslinien homologer Ecken zweier beliebigen aufeinander bezogenen Tetraeder in das Quadrupel der Schnittlinien ihrer homologen Seitenflächen übergeführt wird. Die Betrachtung der drei Diagonalkollineationen, die zu vier windschiefen Geraden gehören, ergibt folgenden Schließungssatz: Legt man von einem beliebigen Punkte P die Transversalen an die Geradenpaare ab, cd, nennt ihre Treffpunkte A, B, C, D, legt weiter von dem Punkte $AC \cdot BD$ die Transversalen an die Geradenpaare ad, bc und nennt ihre Treffpunkte A', D', B', C', legt endlich von dem Punkte $A'B' \cdot C'D'$ die Transversalen an die Geradenpaare ac, bd und nennt ihre Treffpunkte A'', C'', B'', D'', dann fällt der Punkt $A''D'' \cdot B''C''$ mit dem Ausgangspunkte P zusammen. Weiter ergibt sich: Wenn in einer Kollineation zwei windschiefe Strahlen einander involutorisch entsprechen, so gibt es ein ganzes Strahlennetz, das in Paare einander involutorisch entsprechender Strahlen zerfällt. Soll eine Diagonalkollineation $[aa', bb']$ involutorisch ausfallen, so ist notwendig und hinreichend, daß die Strahlen a, a', b, b' derselben Regelschar zweiter Ordnung angehören. Die Kollineation ist dann identisch mit der gescharten Involution, deren Achsen die Doppelstrahlen der durch die Paare aa', bb' in der Regelschar bestimmten Involution sind. Hieraus folgt die einfachste Konstruktion des reellen Vertreters eines konjugiert-imaginären Geradenpaares, das man als Doppelstrahlenpaar einer elliptischen Involution in einer Regelschar ansieht.

Zwei Punkte A, B und zwei Ebenen α, β bestimmen eine Kollineation $[AB, \alpha\beta]$ durch die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare der einfachen ebenen Vierecke, von welchen A, B zwei Gegenecken, die beiden anderen zwei beliebige Punkte von α und β sind. In dieser Kollineation entsprechen einander die beiden Bündel A und B involutorisch, ebenso α und β. Auch dieser Typus der Kollineation findet sich an der Figur zweier aufeinander bezogenen Tetraeder. Die Kollineation $[AB, \alpha\beta]$ ist axial, hat AB zur Ebenen- und $\alpha\beta$ zur Punktachse, und sowohl die Paare entsprechender Punkte der Ebenenachse, als auch die Paare entsprechender Ebenen der Punktachse bilden eine Involution. Jedem Punktpaar der Ebenenachse ist ein Ebenenpaar der Punktachse zugeordnet. Ist A, B ein Paar entsprechender Punkte der Ebenenachse, α, β das zugeordnete Paar entsprechender Ebenen der Punktachse, so ist das Doppelverhältnis der Punkte $A, B, (AB, \alpha), (AB, \beta)$ konstant. Zch.

G. Kohn. Über die Erzeugung einer Kollineation, welche zwei windschiefe Geraden untereinander vertauscht. Deutsche Math.-Ver. **20**, 393-396.

Eine räumliche Kollineation, welche zwei windschiefe Strahlen untereinander vertauscht, vertauscht nach Reye (Math. Ann. **43**, 145-170; F. d. M. **25**, 969, 1893) die Strahlen eines ganzen Strahlennetzes paarweise untereinander.

G. Kohn (Referat vorstehend) hat gezeigt, daß die Paare der entsprechenden Punkte einer solchen Kollineation von dem Paare der Diagonalpunkte eines beweglichen, einfachen, ebenen Vierecks durchlaufen werden, dessen Ecken auf vier windschiefen Geraden gleiten; diese vier Geraden, welche die Erzeugung bestimmen, sind noch auf ∞^3 Arten wählbar.

Für diese von ihm gefundene Erzeugung gibt der Verf. hier einen neuen, einfacheren, direkten Beweis. Zch.

D. P. Peñalver y Bachiller. Construcción de involuciones rectilineas. Asociación Esp. Granada, 1911, 5 S.

Bekannte Beziehungen der Punktinvolutionen einer Geraden zu Kreisbüscheln einer durch die Gerade gehenden Ebene. Zch.

G. Broll. Mehrdeutige Verwandtschaften zwischen Punktfeldern, insbesondere solche, welche durch Raumkurven veranlaßt werden. Diss. Breslau 1911. 86 S. 8°.

Es werden namentlich solche Verwandtschaften behandelt, die durch Raumkurven dritter und vierter Ordnung vermittelt werden. Stz.

A. K. Wlassov. Über rein geometrische Methoden. Moskau Math. Samml. **28**, 188-194. (Russisch.)

Rede gehalten bei der Verteidigung der Doktordissertation „Polarsysteme höherer Ordnungen" usw. (Vgl. F. d. M. **41**, 608, 1910.) Si.

A. K. Wlassov. Polarsysteme höherer Ordnungen in den Formen erster Stufe. Abh. d. Univ. Moskau, phys. Math. Abt. **25**, XII u. 186 S. (Russisch.)

Als Separatabzug 1910 erschienen und F. d. M. **41**, 608 angezeigt. Si.

Weitere Literatur.

P. Del Pezzo. Principi di geometria proiettiva: lezioni dettate nell' Università di Napoli nell' anno 1910/11. Napoli: Alvano. 360 S. 8°.

L. Crelier. Systèmes cinématiques. Paris: Gauthier-Villars. 99 S. 8° (Scientia, Phys.-Mathém. Nr. 31). Avec portrait de Mannheim.

H. Seeman. Projektive Verallgemeinerung metrischer Begriffe. Diss. Gießen. 24 S. 8° (1910).

A. Kleber. Über einige mehrdeutige Verwandtschaften zweier Ebenen. Diss. Rostock.

Boyd. On the perspective Jonquières involutions associated with the (2, 1) ternary correspondence. Diss. Cornell Univ.

J. Fairon. Sur les involutions du quatrième ordre. Bruxelles: Hayez. 68 S. 8⁰.

G. Fontaine. Théorie des opérations segmentaires, édifiée en vue d'éliminer le nombre du domaine de la géométrie pure. Paris. 44 S. 8⁰.

N. J. Lennes. Duality in projective geometry. Amer. Math. Soc. Bull. (2) 17, 391.

B. Besondere ebene Gebilde.

A. F. Gatlich. Synthetische Theorie der Kegelschnitte. Moskau. 81 + 2 S. gr. 8⁰. (Russisch.)

Der zu früh verstorbene Verfasser war einer der Verehrer der reinen Geometrie. Zum Muster nahm er Newtons Darstellung im I. Buch der Principia und Zeuthens Grundriß einer elementaren Kegelschnittslehre. Auf wenigen Seiten wußte er mit großer didaktischer Geschicklichkeit sehr weit in die Theorie vorzudringen, wie die Übersicht des Inhaltes zeigt: Nach den ersten Begriffen und Erklärungen im Kap. I (Zeichen und Teilung der Strecke, Eigenschaften des Kreises) geht der Verf. zu den Kegelschnitten über: Es werden ihre Erklärungen und Haupteigenschaften angegeben, ihre Grenzformen erwähnt; dann folgt die Behandlung der Tangenten, Normalen, Diameter, Direktrizen und der Ähnlichkeit der Kegelschnitte. Daran schließt sich die räumliche Erzeugung der Kurven als ebener Schnitte des geraden Kegels und ihre Bestimmung aus gegebenen Punkten und Tangenten. Eine kurze historische Übersicht über die Entwicklung der Theorie und eine Sammlung von 36 Aufgaben über die Konstruktion von Kegelschnitten schließen die Darstellung.

Si.

W. Erler. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten behandelt. 7. Auflage. Besorgt von M. Zacharias. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. VI u. 66 S. gr. 8⁰.

„In der 7. Auflage ist vor allem der Text in bezug auf Satzbau und Interpunktion einer vollständigen Durcharbeitung unterzogen worden. Die Übersichtlichkeit ist durch Hinzufügung eines Inhaltsverzeichnisses und kurzer Überschriften über den Paragraphen erhöht worden. Einige Abschnitte, die nur Wiederholungen enthielten, wurden weggelassen, andere vereinfacht. Dafür wurden unter anderem die wichtigsten Sätze über Pol und Polare sowie der Beweis, daß jede Parabel, Ellipse und Hyperbel als Schnitt eines geraden Kreiskegels betrachtet werden kann, aufgenommen. Von den Aufgaben wurde eine größere Zahl durch andere ersetzt, einige wurden neu hinzugefügt. Von den Figuren sind nur drei aus der vorigen Auflage herübergenommen; die übrigen wurden sämtlich neu gezeichnet. Eine Figur ist hinzugekommen.“

Lp.

R. Schüssler. Die konstruktive Verwertung einer elementaren einheitlichen Kegelschnittsdefinition. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 469-477.

„Aus der Definition eines Kegelschnittes als Ort jener Punkte, deren Entfernungen von einem Punkte f (Brennpunkt) und einer Geraden L (Leitlinie) in einem konstanten Verhältnisse k stehen, läßt sich für die wichtigsten Aufgaben über Ellipse, Hyperbel und Parabel eine einheitliche Lösung elementar ableiten, wie im folgenden gezeigt wird" (nicht neu, Ref.). „Wenn sich auch das bisher meines Wissens nicht beachtete Resultat: die Bestimmung eines Kegelschnittes aus Leitlinie und Krümmungskreis eines Punktes, ergeben wird, so haben diese Betrachtungen doch vorwiegend pädagogisches Interesse."

Lp.

H. Böheim. Über die Bestimmung der Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt oskulieren. Monatsh. f. Math. u. Phys. **22**, 157-169.

Gegeben sind drei Punkte A, B, C und ein Kegelschnitt k. Um jene Kegelschnitte zu finden, welche durch A, B, C gehen und k oskulieren, suche man den Kegelschnitt, der k in einem willkürlich gewählten Punkte P oskuliert und durch A und B geht. Dieser schneidet k noch in einem Punkte P'. Dann gibt es nach Steiner drei Kegelschnitte, die durch P', B, C gehen und k in einem von P' verschiedenen Punkte oskulieren. Ordnet man die drei Oskulationspunkte P_1, P_2, P_3 dem Punkte P zu, so besteht zwischen jedem von ihnen und P eine drei-dreideutige Zuordnung. Die Anzahl der gesuchten Kegelschnitte ist gleich der Anzahl der Doppelelemente dieser Zuordnung, und die Doppelpunkte sind die gesuchten Oskulationspunkte. Die Konstruktion dieser Kegelschnitte ist daher im allgemeinen eine Aufgabe sechsten Grades. Liegen zwei der drei Punkte A, B, C auf einer Tangente von k, so ist der Berührungspunkt ein doppeltzählender Doppelpunkt der Zuordnung. Liegen nun z. B. A und B auf einer Tangente und A und C auf einer zweiten, so sind außer den Berührungspunkten noch zwei Doppelpunkte vorhanden. Die Zuordnung ist in diesem Falle eineindeutig, und zwar projektiv; die beiden Doppelpunkte lassen sich mit Lineal und Zirkel konstruieren. Diese Konstruktion kann so eingerichtet werden, daß sie auch ausführbar bleibt, wenn A und B oder A und C oder auch beide Punktpaare gleichzeitig konjugiert-imaginär sind.

Zch.

K. Wolletz. Über Systeme von Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 61-70.

Synthetische Behandlung der Systeme von ∞^1 Kegelschnitten, die außer einem Brennpunkt noch gemeinschaftlich haben: 1. zwei Tangenten, 2. eine Tangente und einen Punkt, 3. zwei Punkte. Diese drei Fälle werden einzeln erledigt, und bei jedem Falle werden sowohl allgemeine Eigenschaften der Systeme abgeleitet, als auch besondere Konstruktionen für solche Aufgaben gegeben, bei denen der Kegelschnitt durch Hinzunahme noch eines Elementes bestimmt ist.

Lp.

K. Zahradnik. Einige Eigenschaften der Oskulationstripel am Kegelschnitte. Prag Ber. 1910, Nr. 5, 6 S.

Nach J. Steiner gehen durch jeden Punkt t eines Kegelschnitts drei Krümmungskreise, deren Oskulationspunkte u_1, u_2, u_3 mit t auf einem Kreise liegen. Das Oskulationsdreieck $u_1 u_2 u_3$ hat einen von t unabhängigen, konstanten Flächeninhalt d und den Mittelpunkt des Kegelschnitts zum Schwerpunkt (Zahradnik, Arch. d. Math. u. Phys. **69**, 419, 1883). Zu diesen bekannten Eigenschaften des Tripels $u_1 u_2 u_3$ fügt der Verf. einige neue: Die Normalen des Oskulationstripels schneiden sich in einem Punkte H. Das Dreieck der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte hat konstanten Flächeninhalt D. Das Verhältnis $D : d$ ist nur von dem Achsenverhältnis des Kegelschnitts abhängig. Der Fußpunkt u der vierten von H ausgehenden Normale liegt auf dem Umkreis des Dreiecks $u_1 u_2 u_3$ diametral zu t. Der Ort der Punkte H ist ein dem gegebenen affiner Kegelschnitt. Die Einhüllende der Geraden tH ist eine rationale Kurve vierter Klasse. Der Umkreismittelpunkt S des Dreiecks $u_1 u_2 u_3$ durchläuft gleichfalls einen Kegelschnitt, und die Gerade tS umhüllt ebenfalls eine rationale Kurve vierter Klasse. Die Geraden HS bilden einen Büschel, dessen Scheitel der Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts ist. Ist t ein Scheitel des Kegelschnitts, so liegen t, H, S in einer Geraden (vgl. F. d. M. **41**, 655, 1910).

Zch.

R. Strinivasau. Some examples from Macaulay's conics. Journ. Ind. M. S. **3**, 23-24.

Beweis bekannter Eigenschaften derjenigen Apollonischen Hyperbel, die zu dem Frégierschen Punkte Q einer Ellipse gehört, und Bestimmung weiterer Punkte dieser Hyperbel und Konstruktion der anderen drei von Q ausgehenden Ellipsennormalen.

Gd.

G. Valiron. Sur la théorie des coniques. Ens. math. **13**, 369-377.

Der Verf. beweist elementar den Satz, daß eine bewegliche Kegelschnitttangente auf zwei festen parallelen Tangenten Abschnitte bestimmt, die ein konstantes Produkt besitzen, und leitet aus diesem Satze und seiner Umkehrung den allgemeinen Lehrsatz ab: Sind zwei Punkte A, A' und eine Gerade D, die durch keinen von ihnen geht, gegeben, so ist der Ort der Punkte M, für welche das Produkt der auf D durch die Winkel $MAA', MA'A$ abgeschnittenen Segmente konstant ist, ein Kegelschnitt. Aus diesem Satze folgt unmittelbar der Satz, daß die Projektion eines Kegelschnitts ein Kegelschnitt ist. Zum Schluß wird gezeigt, zu welcher Vereinfachung des vorstehenden Beweisganges der Begriff des Doppelverhältnisses führen kann.

Zch.

G. Valiron. Sur le centre de courbure en un point d'une conique. Nouv. Ann. (4) **11**, 277-278.

Der Krümmungsmittelpunkt eines Kegelschnitts in einem gegebenen Punkte P ist der Schnittpunkt der Normale des Punktes mit der Apollonischen Hyperbel, die den Kegelschnitt in P berührt. Sk.

G. Horn. Della relazione esistente tra il semiasse minore d'una sezione conica ed i raggi delle due sfere che determinano i suoi fuochi. Batt. G. **49** [(3) **2**], 129-130.

Die halbe Nebenachse eines Kegelschnitts ist die mittlere Proportionale zu den Radien der zugehörigen Dandelinschen Kugeln. Sk.

J. Neuberg. Question 16 836. Ed. Times (2) **19**, 28-30, 34.

Kegelschnitte von gleicher Exzentrizität c/a haben einen gemeinsamen Brennpunkt F und berühren dieselbe Tangente t. Dann ist der Ort des zweiten Brennpunktes F' ein Kreis, und die Hüllkurve der beiden Leitlinien sind Kegelschnitte. Wenn die Kegelschnitte durch einen gemeinschaftlichen Punkt M gehen, so ist der Ort von F' Fußpunktkurve eines Kreises, und die beiden Leitlinien umhüllen Kreise. Beweise von E. B. Bowesman und C. M. Ross, an zweiter Stelle von J. Neuberg selbst. Lp.

J. Plane. Recherches géométriques sur les normales à une parabole issues d'un même point. Nouv. Ann. (4) **11**, 241-261.

Die Fußpunkte der drei von einem Punkte ausgehenden Normalen einer Parabel bilden ein eingeschriebenes, die Tangenten in den Fußpunkten ein umgeschriebenes Dreieck. Die Schwerpunkte G_1 und G beider Dreiecke liegen auf der Achse so, daß $SG_1 = -2SG$ ist, wenn S den Scheitel bezeichnet. Der Umkreis des umgeschriebenen Dreiecks geht durch den Brennpunkt F; dieser teilt die Strecke zwischen dem Ausgangspunkt der Normalen und dem Umkreismittelpunkt des genannten Dreiecks im Verhältnis 2 : 1. Der Umkreis des eingeschriebenen Dreiecks geht durch den Scheitel. Liegt der Schwerpunkt eines umgeschriebenen (oder eingeschriebenen) Dreiecks auf der Achse, so schneiden sich die Normalen der Berührungspunkte (bzw. der Ecken) in einem Punkte. Ist eine der drei von einem Punkte ausgehenden Normalen gegeben, so lassen sich die beiden anderen leicht konstruieren. Für einige besondere Fälle werden zum Schluß die Bahnen der Ecken des umgeschriebenen Dreiecks bestimmt, die sich ergeben, wenn der Ausgangspunkt der Normalen gewisse Kurven durchläuft. Des beschränkten Raumes wegen sind im vorstehenden nur einige wenige Ergebnisse der Abhandlung angeführt worden. Zch.

W. F. Beard. On the three normals to a parabola from a point O. (Some new proofs and one or two new theorems.) Ed. Times (2) **19**, 65-71.

Es seien OP_1, OP_2, OP_3 die Normalen aus O an eine Parabel mit dem Scheitel A, dem Brennpunkte S; die Schnittpunkte der Normalen mit der Achse seien G, G_1, G_2. Die Tangenten in P_1, P_2, P_3 bilden das Dreieck TT_1T_2. Der Verf. leitet geometrisch folgende Sätze ab: 1. SO geht durch den Umkreismittelpunkt von TT_1T_2 und ist gleich dem Durchmesser dieses Umkreises. 2. Wenn OH senkrecht zur Direktrix gezogen wird, so ist H der Höhenschnitt des Dreiecks TT_1T_2. 3. Die Schwerpunkte der Dreiecke TT_1T_2 und PP_1P_2 liegen auf der Achse. 4. Der Umkreis von PP_1P_2 geht durch A. 5. Sind OE und TN Lote zur Achse, so ist $OE \cdot AS = TN \cdot AN$. 6. Die Potenzlinie des Umkreises von PP_1P_2 und des Neunpunktekreises von TT_1T_2 ist die Scheiteltangente. 7. Die Verbindungslinie des Umkreismittelpunktes von TT_1T_2 mit dem Höhenschnitt von PP_1P_2 ist parallel zur Achse. 8. Der Umkreis von TT_1T_2 treffe die Achse zum zweiten Male in D; TN und PM seien die Ordinaten von T und P; dann ist $DN = AM$. Sind g und g' die Schwerpunkte von TT_1T_2 und PP_1P_2, so ist $Ag' = 2Ag = \frac{2}{3}AD$. 9. Der Umkreis von PP_1P_2 treffe die Achse zum zweiten Male in m, OE sei die Ordinate von O; dann ist $Em = 2AS$. 10. Die Potenzlinie der Kreise um TT_1T_2 und PP_1P_2 treffe die Direktrix in Z, dann ist OSZ ein rechter Winkel, und die Potenzlinie des Umkreises von PP_1P_2 und des Kreises über OS als Durchmesser geht durch Z und ist senkrecht zu SH. 11. Die gleichseitige Hyperbel durch T, T_1, T_2, S geht durch O, Z, Q, hat ihren Mittelpunkt in Y (Schnittpunkt von HS mit der Scheiteltangente) und ihre Asymptoten parallel den Winkelhalbierenden von OSE. Lp.

W. F. Beard. Questions 16 269, 16 599, 16 632, 16 872. Ed. Times (2) **19**, 78-80.

Sätze über Parabeln, welche die drei Seiten eines Dreiecks berühren. Beweise von C. E. Youngman und anderen. Lp.

Chautrelle. Sur les normales à la parabole. Revue de Math. spéc. **21**, 281-282.

Geometrischer Beweis einer Reihe von Fragen, die „unter verschiedenen Formen in den mündlichen Prüfungen der École Polytechnique" behandelt worden sind. Sk.

V. Ramaswami Aiyar. Normals to an ellipse from any given point. Journ. Ind. M. S. **3**, 75-76.

Konstruktion der vier von irgend einem Punkte Q an die Ellipse gezogenen Normalen: Man fälle von Q auf die beiden Achsen der Ellipse mit den Halbachsen a, b die Lote QM' und QN' und bestimme den auf $M'N'$ gelegenen Punkt P derart, daß $\frac{M'P'}{P'N'} = \frac{a}{b}$. Durch P' wird eine Gerade gezogen, so daß das von den Achsen begrenzte Stück MN gleich $a + b$ wird. Derjenige Punkt P, für den $MP = a$ und $PN = b$ ist, ist der Fußpunkt einer der von Q ausgehenden Normalen. Alle möglichen Lagen von MN liefern die übrigen Normalen. Gd.

C. E. Youngman. Question 15 923. Ed. Times (2) 20, 44-45.

Drei ähnliche Ellipsen berühren ein und dieselbe Gerade und haben ihre Brennpunkte paarweise zusammenfallend in den Ecken eines Dreiecks ABC. Dann bilden die drei anderen gemeinschaftlichen Tangenten ein invers ähnliches Dreieck $A'B'C'$, und ABC ist das erste Brocardsche Dreieck zu $A'B'C'$.
Lp.

E. N. Barisien. Correspondance. (Sur six hyperboles remarquables du triangle.) Nouv. Ann. (4) 11, 87.

Es werden zwei Tripel gleichseitiger Hyperbeln angegeben, von denen jedes drei äquidistante Schnittpunkte auf dem Umkreis besitzt, so daß der vierte notwendig das Umkreiszentrum ist. Sk.

W. F. Beard. Question 16 834. Ed. Times (2) 19, 45-46.

Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC sei O, der Höhenschnitt H. Eine gleichseitige Hyperbel hat AH zum Durchmesser, AO zur Tangente; entsprechende Hyperbeln werden über BH und CH beschrieben. Diese drei Kurven schneiden den Umkreis in denselben drei Punkten P_1, P_2, P_3. Die Fußpunktlinien von P_1, P_2, P_3 sind rechtwinklig bzw. zu P_1H, P_2H, P_3H. Diese Fußpunktlinien bilden ein Dreieck, das in jeder Hinsicht mit $P_1P_2P_3$ übereinstimmt. Lp.

F. R. Scherrer. Détermination du centre de gravité d'un segment parabolique par une méthode élémentaire. Ens. math. 13, 114-121.

Das Parabelsegment wird auf folgende Weise in Dreiecke zerlegt: Man geht aus von der Sehne, die das Parabelsegment begrenzt, zieht durch ihren Mittelpunkt den Durchmesser und verbindet den von diesem ausgestochenen Parabelpunkt mit den Endpunkten der Sehne. Die beiden zuletzt gezogenen Verbindungslinien halbiert man wieder usf. Die so gewonnene Zerlegung des Segmentes in Dreiecke führt auf eine leicht summierbare unendliche geometrische Reihe. Z.

W. P. Milne. The generation of cubic curves by apolar pencils of lines. Lond. M. S. Proc. (2) 9, 235-243.

Es handelt sich um die Lösung und Diskussion des folgenden Problems: Gegeben ist eine kubische Kurve. Gesucht sind zwei einbeschriebene Dreiecke ABC und DEF, so daß, wenn P ein beliebiger Punkt auf der Kurve ist, die beiden Linienbüschel $P(A, B, C)$ und $P(D, E, F)$ für alle Lagen von P auf der Kurve apolar sind. Es wird eine Lösung dieser Aufgabe gegeben, und es werden die genannten Linienbüschel zur apolaren Erzeugung der kubischen Kurve verwendet. Dabei ergibt sich eine Anzahl von Sätzen aus der Theorie der Apolarität, die hier nicht aufgeführt werden können. Der Fall, daß die

kubische Kurve einen Doppelpunkt hat, wird im letzten Paragraphen gesondert untersucht. Es sei noch bemerkt, daß das Beweisverfahren im wesentlichen analytischer Natur ist, und daß auch die doppelt gekrümmten Kurven nicht ausgeschlossen werden. Lö.

W. P. Milne. A symmetrical method of apolarly generating cubic curves. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, 207-210.

Die Aufgabe: Auf einer gegebenen kubischen Kurve zwei eingeschriebene Dreiecke ABC und DEF von der Beschaffenheit zu finden, daß die Büschel $P(A, B, C)$ und $P(D, E, F)$ für jeden Punkt P der Kurve apolar sind, ist von dem Verf. früher (Referat vorstehend) unsymmetrisch gelöst worden. Die vorliegende Note enthält eine symmetrische Lösung. Wenn vier koplanare Punkte A, B, C, U einer durch den Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung erzeugten Raumkurve vierter Ordnung so liegen, daß die Tangenten in A, B, C von einer Geraden durch U getroffen werden, so projiziert sich die Kurve von jedem ihrer Punkte aus in eine ebene kubische Kurve, für welche die Projektionen von A, B, C ein apolares Dreieck bilden. Nennt man das Dreieck ABC in diesem Falle apolar und die Gerade durch U seine Achse, so lautet die symmetrische Lösung: Sind ABC und DEF zwei apolare Dreiecke von der Beschaffenheit, daß die Achse eines jeden durch den Pol der Schnittlinie ihrer beiden Ebenen in bezug auf das andere geht, so projiziert sich die Raumkurve vierter Ordnung von jedem ihrer Punkte aus in eine ebene kubische Kurve, für welche die Projektionen von ABC und DEF ko-apolare Dreiecke sind. Zch.

B. Sporer. Über eine besondere Gruppe von Kurven dritten Grades. Math. naturw. Mitt. (2) **13**, 72-74.

Ist D der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC und P ein beliebiger fünfter Punkt, so gibt es eine Kurve dritter Ordnung, die P zum Doppelpunkt und in diesem zwei aufeinander senkrechte Tangenten PQ und PQ_1 hat, durch A, B, C, D und durch die Fußpunkte der von P auf die sechs Verbindungslinien der vier Punkte gefällten Lote geht. Auf derselben Kurve liegen noch verschiedene andere Punkte, die mit der gegebenen Konfiguration in Zusammenhang stehen. PQ und PQ_1 sind die Achsen mehrerer Kegelschnitte, die zu den Punkten A, B, C, D in gewissen Beziehungen stehen. Zch.

M. Long. On Geiser's method of generating a plane quartic. Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 205-230.

In dieser Abhandlung werden einige Eigenschaften der Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung bewiesen nach der Methode von Geiser, der bekanntlich die Tatsache zugrunde liegt, daß der Tangentialkegel, der an eine Fläche dritter Ordnung von einem ihrer Punkte gelegt wird, von der vierten Ordnung ist, und daß sein Schnitt mit einer beliebigen Ebene eine allgemeine C_4 bildet. Die Verfasserin beweist besonders Eigenschaften derjenigen Gruppen

von Doppeltangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, oder die einen Kegelschnitt berühren, oder die sich paarweise in kollinearen Punkten schneiden. Die Ergebnisse führen zu einer Reihe von bisher unbekannten Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung. Die behandelten Eigenschaften der Doppeltangenten sind zwar größtenteils schon von anderen Gesichtspunkten aus eingehend erörtert worden. Aber die Verwendung der Geiserschen Methode liefert auf synthetischem Wege häufig ganz elementare Beweise für Sätze, deren Begründung mit anderen Mitteln oft umständliche Rechnungen erfordert. Namentlich ergeben sich dabei die Anzahlen und gegenseitigen Beziehungen einzelner, durch besondere Merkmale ausgezeichneter Gruppen von Doppeltangenten in sehr anschaulicher Weise, und überdies gibt die Verfasserin nicht selten zwei oder drei voneinander unabhängige Methoden an, um die fraglichen Abzählungen auszuführen. Die folgende Aufzählung der behandelten Gegenstände wird am besten über die Arbeit orientieren. I. Einleitung. II. Die syzygetischen Tripel. III. Die Steinerschen Gruppen. IV. Die Konfiguration von Brianchon (Gruppe von sechs Doppeltangenten, die einen Kegelschnitt berühren). V. Die azygetischen Gruppen. VI. Das Aronholdsche vollständige System. VII. Die sog. Dreisechs. VIII. Die Cianische Dreidrei. IX. Die Konfiguration von Caporali. X. Die Aronholdschen Linien und Geiserschen Punkte. XI. Die Kummersche Konfiguration. XII. Literaturnachweise über die Arbeiten, in denen die Geiserschen Methoden schon benutzt worden sind. Lö.

T. J. Richards. A geometrical proof of some of the properties of nodal quartics. Quart. J. 42, 236-240.

Der Verf. benutzt zur Untersuchung der im Titel genannten Kurven eine Art verallgemeinerter Inversion. Es sei O ein fester Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts K; ferner seien w und w' die Berührungspunkte der Tangenten von O an K; P_1 und P_2 endlich seien zwei konjugierte Punkte, welche mit O in einer Geraden liegen. Durchläuft P_1 eine Kurve, so beschreibt P_2 eine andere, die zu der ersten konjugiert heißt mit Bezug auf den Kegelschnitt und den Punkt O. Nachdem der Verf. einige Eigenschaften dieser Verwandtschaft aufgestellt hat, beweist er durch geometrische Betrachtungen die folgenden drei Sätze: I. Jede Quartik mit einem Doppelpunkt ist in bezug auf einen und nur einen Kegelschnitt zu sich selbst konjugiert. II. Jede Kurve dritter Ordnung ist zu sich selbst konjugiert mit Bezug auf unendlich viele Kegelschnitte. III. Es gibt sechs Kegelschnitte, in bezug auf welche eine Quartik mit zwei Doppelpunkten zu sich selbst konjugiert ist.

Aus diesen drei Sätzen leitet der Verf. eine Reihe bekannter Eigenschaften der mit Doppelpunkten behafteten Kurven vierter Ordnung als einfache Zusätze ab. Lö.

C. E. Youngman. Question 16815. Ed. Times (2) 19, 18-19.

Ein auf einem gleich großen Kreise rollender Kreis (Radius $= r$) berührt die durch einen seiner Punkte erzeugte Kardioide in Punkten, deren Abstand

von der Spitze $\frac{1}{4}r$ ist, und schneidet sie rechtwinklig im Abstande $\frac{7}{4}r$; die vier Punkte liegen in einer Geraden. Beweis von T. Naraniengar. Lp.

C. E. Youngman. Question 16 833. Ed. Times (2) **19**, 24-26.

Wenn die Fußpunkte P, Q, R der Normalen aus N an eine Kardioide mit einem vierten Punkte M auf der Kurve in einer Geraden liegen, und wenn $Mpqr$ eine hierzu senkrechte Sehne ist, so treffen sich die Tangenten in p, q, r in einem Punkte T, und NT geht durch das Zentrum der Kardioide. Analytischer (nicht der gewünschte rein geometrische) Beweis von T. Naraniengar. Lp.

C. E. Youngman. Question 16 921. Ed. Times (2) **20**, 21-22.

Die Seite AB eines Rhombus $ABCD$ hat eine feste Seite. Durch die Mitte O von AB werden zwei gleichseitige Hyperbeln gelegt, von denen die eine den Winkel C hälftet, die andere die Winkelhalbierenden von D zu Achsen hat. Der Ort für die drei anderen gemeinschaftlichen Punkte der Hyperbeln ist eine Kardioide; die Hüllkurve der Hyperbel durch C besteht aus zwei gleichen Kreisen. Beweis von M. T. Naraniengar. Lp.

V. Ramaswami Aiyar. On Steiner's tricusp. Journ. Ind. M. S. **3**, 235.

Aus einem Lemoineschen Satz ergibt sich als unmittelbare Folgerung, daß der Ort der „Orthopole" der Tangenten des Umkreises des Dreiecks ABC die Steinersche dreispitzige Hypozykloide ist, die von den Simsonsche Linien dieses Dreiecks eingehüllt wird. Gd.

B. Sporer. Über Tangenten algebraischer Kurven, welche mit der Basis drei Punkte gemein haben, von denen einer die Mitte der Strecke zwischen den beiden anderen ist. Math. naturw. Mitt. (2) **13**, 39-55.

Der Verf. hat früher (Zs. f. Math. u. Phys. **37**, 358) gezeigt: Wenn eine Tangente eine algebraische Kurve C^n in A berührt und außerdem mit der Kurve die Punkte B, C, D usw. gemein hat, so gibt es $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+4)$ solche Tangenten T_0, bei denen der Berührungspunkt A von zwei weiteren Schnitten B und C, $n(n-2)(n-3)(n+4)$ Tangenten T_1, bei denen ein Schnitt B vom Berührungspunkt A und einem anderen Schnitt C, und endlich $n(n-2)(n-3)(n-4)(n+2)$ solche Tangenten T_2, bei welchen ein Schnitt B von zwei anderen Schnitten C und D gleichweit entfernt ist. In der vorliegenden Abhandlung untersucht der Verf., welche Änderungen an diesen Zahlen vorzunehmen sind, wenn die Kurve von bestimmtem Grade ist und in Kurven niederer Ordnung zerfällt. Zunächst wird der Fall einer C^4

untersucht, die in eine C^3 und eine Gerade, oder in zwei C^2, oder in eine C^2 und zwei Geraden zerfällt. Hierauf folgt eine ähnliche Betrachtung der C^5. Auf Anführung von Einzelheiten muß mit Rücksicht auf den beschränkten Raum verzichtet werden. Zch.

G. Majcen. **Über eine Methode zur Behandlung gewisser ebener metrischer Probleme.** Monatsh. f. Math. u. Phys. **22**, 195-205.

Räumliche Beweise für zwei Steinersche Sätze (Werke II, S. 373, Aufg. 1 und 2). Sk.

Weitere Literatur.

O. Lesser. Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte. Ausgabe A. Berlin: Salle.

R. Holz. Über die Bestimmung der Schnittpunkte von Geraden und Kegelschnitten. (Zyklographische Grundgedanken.) Progr. Teplitz-Schönau. 8 S. 8°.

M. Wacker und Moudon. Tangenten- und Achsenkonstruktionen für Ellipse und Hyperbel mit Hülfe von Brennpunkt und Leitgerade. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 28-31.

Diesing. Elementare Konstruktion der Parabel aus vier Punkten A_1, A_2, A_3, A_4. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 303-304.

J. T. Dufton. Conic template. (Parabola, 1 in. unit. Hyperbola, asymptotes at 60°. Ellipse directrices coincide with latera recta of parabola and hyperbola.) Transparent celluloid or nickel plated. London: Macmillan and Co., Ltd.

J. Vaň. Analogie des Satzes von Pascal, resp. Brianchon in der Theorie des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschar. Progr. Realsch. Prag I. 12 S. (Böhmisch.)

Biddle. Constructive theory of the unicursal plane quartic by synthetic methods. Diss. California Univ. 1911.

V. Jeřábek. Über die Horopterkurve. Časopis **40**, 15-21. (Böhmisch.)

C. Besondere räumliche Gebilde.

W. Blaschke. **Über die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden in der Ebene. I.** Arch. der Math. u. Phys. (3) **18**, 132-140.

Die Gesamtheit der Speere in der elliptischen Ebene läßt sich durchaus eindeutig umkehrbar auf die Punkte eines Ellipsoides abbilden, die Gesamtheit der Speere in der hyperbolischen Ebene auf die Punkte eines geradlinigen Hyperboloids (vgl. Am. Trans. **11**, 414-448; F. d. M. **41**, 536, 1910). Als Grenzfall beider Abbildungen erscheint in der vorliegenden Arbeit die Ab-

bildung eines Kontinuums orientierter Geraden der euklidischen Ebene auf die Punkte eines Zylinders. Insbesondere entsprechen sich gleichsinnig parallele Speere und Punkte einer Erzeugenden, orientierte Kreise und Kegelschnitte auf dem Zylinder usw. Weitgehende Beziehungen zur Moebiusschen Geometrie der Kreisverwandtschaften. B.

J. A. Barrau. De omwentelingsoppervlakken of cilinders van den tweeden graad der niet-euclidische ruimte. Amst. Ak. Versl. **19**, 1426-1431.

Im hyperbolischen Raume ist jede Fläche zweiter Ordnung, deren Schnittlinie mit der absoluten Fläche Ω in zwei Kegelschnitte zerfällt, sowohl Umdrehungsfläche als Zylinder, und zwar ist die Schnittlinie der Ebenen jener beiden Kegelschnitte Zylinderachse, ihre reziproke Polare bezüglich Ω Umdrehungsachse. Man erhält drei Klassen solcher Flächen, je nachdem die Zylinderachse reell, ideell oder (im Übergangsfalle) Tangente von Ω ist. Jede Ebene durch die Zylinderachse schneidet die Oberfläche in einem Ω doppeltberührenden Kegelschnitt, d. h. einem Kreise in hyperbolischer Metrik. Ist dieser Durchschnitt metrisch reell, so ist er ein eigentlicher Kreis, ein Grenzkreis oder eine Abstandslinie, je nachdem die Fläche der ersten, dritten oder zweiten Klasse angehört. Damit ist eine erste Reihe von Kreisschnitten der Fläche gegeben. Von den vier Reihen von Kreisschnitten einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung fallen in der soeben genannten Reihe zwei zusammen; es gibt also außer dieser noch zwei weitere Reihen, die entweder ideell oder imaginär sein oder sich vereinigen können. Auf diese allgemeinen Bemerkungen folgt eine erschöpfende Übersicht der möglichen Typen von Flächen. In jeder der drei Klassen ergibt sich eine weitere Einteilung auf Grund der Beschaffenheit der Ebenen der beiden Kegelschnitte, welche entweder reell oder ideell oder Minimalebenen sein können.

Im elliptischen Raume ist Ω imaginär. Wegen der Endlichkeit des Raumes ist jede Oberfläche geschlossen. Ferner sind beide Achsen stets reell, so daß jeder Zylinder ebenso natürlich Umdrehungsfläche ist. Die Einteilung nach den Ebenen der Kegelschnitte ergibt sechs Typen. Zch.

A. Jopke. Die kollineare Abbildung linearer Systeme zweiter und dritter Stufe von Flächen zweiten Grades in Ebene und Raum. Arch. der Math. u. Phys. (3) **18**, 113-131.

Bezieht man ein allgemeines F^2-Netz N kollinear auf eine Ebene σ, so daß den Flächen und Büscheln des Netzes die Punkte und Geraden der Ebene entsprechen, so bilden sich die ∞^1 Kegel von N in die Punkte einer allgemeinen Kurve vierter Ordnung von σ ab. Besitzt das Netz ein Ebenenpaar, so hat die Bildkurve einen Doppelpunkt; dasselbe tritt ein, wenn zwei Grundpunkte des Netzes (auf bestimmter Verbindungsgeraden) unendlich benachbart sind. Durch weitere Spezialisierung ergeben sich Netze, deren Bildkurven Rückkehrpunkte besitzen. Alle neun Arten der nicht zerfallenden Kurven vierter Ordnung

mit Doppelpunkten können durch Abbildung von F^2-Netzen erzeugt werden. Ist ein Netz definiert durch vier Grundpunkte und die Bestimmung, daß ein Punkt P und eine Ebene π bezüglich aller Netzelemente polar sind, so zerfällt die Bildkurve in eine Gerade und eine Kurve dritter Ordnung. Bei gewissen anderen Netzen besteht die Bildkurve aus zwei Kegelschnitten oder einem Doppelkegelschnitt.

Bezieht man ein allgemeines F^2-Gebüsch G kollinear auf den Punktraum, so daß den Flächen, Büscheln und Netzen des Gebüsches die Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes entsprechen, so bilden sich die ∞^2 Kegel von G in die Punkte einer speziellen Fläche vierter Ordnung und 16. Klasse ab. Den zehn Ebenenpaaren von G entsprechen Knotenpunkte der Fläche. Der von einem solchen Knotenpunkte an die Fläche gelegte Berührungskegel sechster Ordnung zerfällt in zwei Kegel dritter Ordnung, deren Schnittgeraden die Verbindungslinien des Scheitels mit den neun anderen Doppelpunkten sind. Durch jeden etwa vorhandenen Grundpunkt des Gebüsches erhöht sich die Zahl der Doppelpunkte der Bildfläche um 1. Dem Gebüsch mit sechs Grundpunkten entspricht die Kummersche Fläche vierter Ordnung. Sind zwei der sechs Grundpunkte unendlich benachbart, so enthält die Bildfläche eine Doppelgerade und außerhalb dieser noch acht Doppelpunkte. Diese Fläche ist von Plücker (Neue Geom. d. Raumes) gefunden worden. Ersetzt man die vier übrigen Grundpunkte der Reihe nach durch je ein Paar konjugierter Punkte in allgemeiner Lage, so reduziert sich die Zahl der Doppelpunkte der Bildfläche der Reihe nach auf 7, 6, 5, 4. Nach Betrachtung der Gebüsche, deren Bildfläche zwei Doppelgeraden besitzt, folgt die Steinersche Fläche mit drei in einem Punkte zusammenlaufenden Doppelgeraden. Sind zwei Grundpunkte unendlich benachbart, während die vier anderen in einer Ebene liegen, so ist die Bildfläche eine windschiefe Regelfläche; auch hier folgt eine Reihe von besonderen Fällen. Zum Schluß ergeben sich zwei Typen von Gebüschen, deren Bildfläche in eine Ebene und eine Fläche dritter Ordnung zerfällt. Diese besitzt im ersten Falle vier, im zweiten zwei, drei oder vier Knotenpunkte. Zch.

R. Sturm. Zur Jacobischen Erzeugung der Flächen zweiten Grades. J. für Math. **140**, 33-47.

Jacobi hat (J. für Math. **12**, 137; Werke Bd. **7**, 7 u. 42) eine Fläche zweiten Grades auf folgende Weise erzeugt: In zwei Räumen Σ, Σ' sind je drei Punkte A, A_1, A_2; B', B'_1, B'_2 gegeben; durch einen Punkt X' von Σ' werden die Kugeln um B', B'_1, B'_2 gelegt, darauf um A, A_1, A_2 bzw. die gleichen Kugeln, die sich in X und $\bar{X}$ schneiden. Diese Punkte $X, \bar{X}$ beschreiben eine Fläche zweiten Grades, wenn X' eine Ebene durchläuft. Φ^2 sei die Fläche, die der Ebene Φ' der Punkte B', B'_1, B'_2 entspricht. Die Ebene Ω der Punkte A, A_1, A_2 ist eine Hauptebene der Fläche.

Die beiden Kugelgebüsche (Ω) und (Φ'), deren Kugeln ihre Mittelpunkte in Ω und Φ' haben, sind derart kollinear, daß zwei entsprechende Netze dieser Gebüsche zu Grundpunktpaaren entsprechende Paare der zwei-zwei-deutigen Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ der Punkte $X\bar{X}$, $X'\bar{X}'$ (der Schnittpunktpaare entsprechender Kugeltripel) haben. Die eigentlichen Kugeln, welche in dieser Kollineation

ihren entsprechenden gleich sind, bilden in jedem der beiden Gebüsche ein zweifach unendliches System, von dem sich in jedem Büschel zwei befinden. Das Gebüsch Ω besitzt ∞^1 spezielle Büschel konzentrischer Kugeln, welche sämtlich den entsprechenden gleich sind. Die Mittelpunkte jener speziellen Büschel von Ω erzeugen in Ω einen durch A, A_1, A_2 gehenden Kegelschnitt (A); ihm entspricht in der durch die beiden Punkttripel A, B' bestimmten Affinität (A, B') ein Kegelschnitt (B') in Φ', der durch B', B_1', B_2' geht. An Stelle der beiden Tripel A, A_1, A_2 und B', B_1', B_2' können also beliebige drei Punkte von (A) und ihre entsprechenden von (B') treten. (A) ist Fokalkurve von Φ^2 und (B') Fokalkurve der der Ebene Ω entsprechenden Fläche Ω'^2 von Σ'.

Die Verbindungslinien n, n' der Paare entsprechender Punkte von $\mathfrak{T}$ tragen nicht bloß je ein Paar, sondern je eine gleichseitig hyperbolische Involution solcher Punkte, die zur anderen projektiv ist. Die Fußpunkte F, F' von n, n' entsprechen einander in einer Affinität (F, F'). Diese Affinität führt zur Bestimmung der Hauptschnitte von Φ^2 und Ω'^2 in Ω und Φ'. Der Hauptschnitt von Φ^2 ist stets reell und Hyperbel oder Ellipse, je nachdem die Affinität (F, F') reelle oder imaginäre entsprechende Geraden mit gleichen Punktreihen hat. Die Klassifikation der Flächen Φ^2 hängt sodann davon ab, ob die inneren Punkte des Hauptschnitts innere oder äußere Potenzpunkte der drei Kreise um A, A_1, A_2 sind. Der reelle Hauptschnitt und die reelle Fokalkurve von Φ^2 in Ω haben keine reellen Punkte gemein. Weiterhin ergeben sich in Σ und Σ' zwei je in bezug auf Ω und Φ' symmetrische Komplexe zweiten Grades T^2, T'^2 von der Beschaffenheit, daß zwei symmetrische Geraden des einen zwei symmetrischen Geraden des anderen entsprechen, die Tangentenkomplexe von Φ^2 und Ω'^2. Den Ebenen eines Büschels um eine in Φ' liegende Gerade e' entspricht in Σ ein Büschel von Flächen zweiten Grades (e^2), die sich längs des e' entsprechenden Kegelschnitts e^2 berühren. Zum Schluß werden die Arten der in (e^2) vorkommenden Flächen und ihre Reihenfolge im Büschel festgestellt.
Zch.

J. Kounovský. Konstruktion einer Fläche zweiten Grades, welche einen gegebenen Kegelschnitt vierpunktig berührt. Časopis **40**, 29-34. (Böhmisch.)

Außerdem enthält die Fläche zweiten Grades noch fünf gegebene Punkte oder andere den fünf Punkten äquivalente Elemente. Pe.

L. Klug. Lösung zu 345 (St. Jolles). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 202.

Berühren die Flächen eines F^2-Büschels im Punkte M eine Ebene μ, so bilden alle nicht mit μ inzidenten auf den Flächen des Büschels gelegenen Strahlen, welche eine beliebige Gerade d von M schneiden, eine kubische Regelschar mit der Doppelpunktsgeraden d. Ba.

R. Araujo. Homologia de superficies de secundo orden. Rev. Soc. Mat. Esp. 1, 167-171.

Betrachtungen über Flächen zweiter Ordnung in ähnlicher Lage. Op.

C. Juel. Sur les surfaces cubiques simples. C. R. 152, 1219-1221.

Der Verf. macht in der vorliegenden kurzen Notiz darauf aufmerksam, daß die Theorie der Geraden einer kubischen Fläche, soweit es sich um reelle Elemente handelt, gänzlich unabhängig von dem algebraischen Charakter der Fläche ist. Bezeichnet man mit dem Ausdrucke „einfache Fläche“ eine stetige und im projektiven Sinne geschlossene Fläche, deren Berührungsebenen und Hauptkrümmungsradien sich auf der Fläche stetig ändern, und mit „Ordnung“ die größte Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden, so kann man zunächst das Vorhandensein einer Geraden auf jeder einfachen Fläche dritter Ordnung beweisen. Ferner ergibt sich, daß eine solche Fläche ohne Doppelpunkt immer ein Dreiseit enthält. Durch eine Gerade von F^3 können nicht mehr als fünf Ebenen gelegt werden, die sich noch in zwei Geraden treffen. Daraus folgt als Maximalzahl der Geraden auf der Fläche 27. Eine genauere Untersuchung der Flächen mit mehr als drei und weniger als 27 Geraden wird zeigen, daß die ganze Geometrie der Lage auf einer algebraischen Fläche dritter Ordnung ohne wesentliche Änderung auf eine einfache Fläche dritter Ordnung ohne Doppelpunkte ausgedehnt werden kann. Zch.

A. Terracini. Di alcune superficie del 3° ordine, che sfuggono a una generazione data da Steiner. Batt. G. 49 [(3) 2], 40-42.

Nach J. Steiner ist der Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem festen Punkte an eine Fläche zweiter Ordnung, die einen Büschel durchläuft, eine Fläche dritter Ordnung (R. Sturm, Synth. Unters. über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867, S. 16). Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß irgend eine gegebene Fläche dritter Ordnung auf diese Weise erzeugt werden kann, besteht, wie der Verf. analytisch nachweist, darin, daß entweder ein von Geraden der Fläche gebildetes Dreiseit existiert, von dessen Ecken mindestens eine kein Doppelpunkt der Fläche ist, oder daß die Fläche längs einer ihrer einfachen Geraden eine nicht oskulierende Tangentialebene besitzt. Daher lassen sich auf die angegebene Weise nicht erzeugen: 1. die kubischen Flächen mit $3B_3$, 2. mit einem B_6, 3. mit einem U_8 und 4. die geradlinige Fläche von Cayley. Hier bedeutet B einen biplanaren, U einen uniplanaren Doppelpunkt und der Index die Anzahl der Einheiten, um welche die Klassenzahl der Fläche durch das Vorhandensein des betreffenden Punktes erniedrigt wird. Zch.

C. Servais. Propriétés des tangentes communes à deux quadriques homofocales. Ann. Ac. Polyt. Porto 6, 77-81.

Fortsetzung von Betrachtungen früherer Arbeiten (F. d. M. 38, 577, 1907). Wir führen folgendes Resultat an: Man betrachte die Familie geodätischer Linien einer ersten Fläche zweiter Ordnung Σ_1, deren Schmiegungsebenen die zu Σ_1 konfokale zweite Fläche zweiter Ordnung Σ_2 berühren. Die konjugierten Kurven (G) dieser geodätischen Linien haben folgende Eigenschaften: Jede Kurve (G) ist die Direktrix einer Normalie von Σ_1. Wenn M_1 einen Punkt von (G) bezeichnet, N_1 die Spur der Normale in M_1 auf einer Symmetrieebene von Σ_1, A_1 den Zentralpunkt der Normalie in bezug auf die Erzeugende M_1N_1, so ist das Verhältnis $M_1A_1 : M_1N_1$ für alle Kurven (G) konstant. Die Striktionslinien dieser Normalien liegen auf ein und derselben Oberfläche zweiten Grades, der reziproken Polare von Σ_1 in bezug auf Σ_2. Wenn Σ_1 ein Paraboloid ist, so ist die Projektion des Segmentes M_1A_1 auf die Symmetrieachse der Oberfläche längs der Kurven (G) konstant. Lp.

C. Servais. Analogies dans la courbure des courbes et des surfaces du second ordre. Ann. Ac. Polyt. Porto 6, 220-232.

Der Verf. entwickelt mittels der Methoden der projektiven Geometrie eine Reihe von Sätzen zunächst für die Kegelschnitte, danach analoge für die Oberflächen zweiten Grades. So lautet der erste Satz bezüglich der Kegelschnitte: Sind Q, R, S drei beliebige Punkte der Tangente m im Punkte M eines Kegelschnittes Σ, M_1 der zu M gehörige Krümmungsmittelpunkt, so ist

$$MM_1 = S_{q_1}S_{r_1}\frac{MQ\cdot MR}{SM\cdot QR},$$

wo S_{q_1} und S_{r_1} zwei auf der Normale m_1 in M liegende, durch eine gewisse Konstruktion bestimmte Punkte sind. Der analoge Satz für die Flächen zweiter Ordnung ist: Sind Q, R, S drei beliebige Punkte der Tangente m der Quadrik Σ im Punkte M, s die durch S gezogene Parallele zu der zu m konjugierten Tangente s', M_1 der Zentralpunkt der Erzeugenden m_1 auf der Normalie (Δ), so ist

$$MM_1 = S_{q_1}S_{r_1}\frac{MQ\cdot MR}{SM\cdot QR}.$$

Solche sich entsprechenden Satzpaare werden in je 13 Nummern abgeleitet. Lp.

C. Servais. Sur les cubiques gauches. Ann. Ac. Polyt. Porto 6, 138-141.

„Sind μ_1, μ_2, μ_3 die Schmiegungsebenen von einem Punkt M an eine kubische Raumkurve, t_1, t_2, t_3 die zugehörigen Tangenten, so werden die Ebenen μ_1, μ_2, μ_3 von den Geradenpaaren t_2 und t_3, t_3 und t_1, t_1 und t_2 bzw. geschnitten in den Punkten C_2 und B_3, A_3 und C_1, B_1 und A_2, die von einer beliebigen Achse s der kubischen Raumkurve nach der Involution von Ebenen $s\,(C_2B_3, A_3C_1, B_1A_2)$ projiziert werden. Die durch die Achse s gehenden Schmiegungsebenen sind

in dieser Involution konjugiert. Eine Doppelebene dieser Involution geht durch den Punkt M.“ Dies ist der erste der vom Verf. für die Figur abgeleiteten fünf Sätze, die im Original nachzulesen sind. Lp.

M. Zacharias. Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Arch. der Math. u. Phys. (3) 18, 289-315.

Nach einem von St. Jolles bewiesenen Satze haben zwei auf einem Strahlenkegel zweiter Ordnung liegende kubische Raumkurven stets den Mittelpunkt des Kegels und zwei reelle Bisekanten gemein und rufen auf diesen dieselben Involutionen konjugierter Punkte hervor (Reye, Geom. d. Lage, II, 4. Aufl., 299-300). Auf Grund dieses Satzes können, wie im ersten Teile der vorliegenden Untersuchungen gezeigt wird, sämtliche F^3 mit vier Doppelpunkten rein geometrisch konstruiert werden. Zwei Punkte einer solchen F^3 lassen sich nur durch eine einzige die Doppelpunkte enthaltende kubische Raumkurve der Fläche verbinden. Alle durch einen Flächenpunkt gehenden derartigen Kurven liegen paarweise auf den Kegeln eines Kegelbüschels, dessen Scheitel jener Flächenpunkt ist. Die Theorie des Kegelbüschels führt im zweiten Teile der Arbeit zu dem Nachweis der neun Geraden auf der Fläche, von denen bekanntlich sechs die Kanten des Doppelpunkttetraeders und die übrigen drei die Seiten eines Dreiecks δ bilden, die durch je zwei Gegenkanten des Tetraeders gehen. Aus der Klassifikation der Kegelbüschel folgt im dritten Teile der Abhandlung eine erschöpfende Einteilung der F^3 mit vier Doppelpunkten und die Möglichkeit der Konstruktion jeder Art. Der letzte Teil enthält die Polarentheorie der F^3 mit vier Doppelpunkten. Die Hessesche Fläche H^4 einer solchen F^3 hat mit dieser außer den sechs Kanten des Doppelpunkttetraeders, in denen sie F^3 berührt, und von denen zwei gegenüberliegende stets reell sind, keinen Punkt gemein. Die oben genannte Dreiecksebene δ ist eine stets reelle Ebene des Sylvesterschen Pentaeders der F^3. Sie enthält zwei stets reelle Ecken desselben, durch welche zwei ebenfalls stets reelle Kanten gehen. Diese liegen auf H^4. Die kubische Polfläche Δ^3 der Ebene δ hat mit dieser die Seiten des Dreiecks δ gemein. Die Fläche Δ^3 berührt die Fläche H^4 in sechs geraden Linien, von denen zwei stets reell sind; es sind die reellen Kanten des Pentaeders. Δ^3 hat ebenso wie F^3 vier Doppelpunkte; das sind die vier nicht der reellen Ebene δ angehörenden Pentaederecken, die reell oder paarweise konjugiert-imaginär sind. Die kubische Polfläche von δ in bezug auf Δ^3 ist F^3, und das Pentaeder von Δ^3 besteht aus der Ebene δ und dem Tetraeder der Doppelpunkte von F^3. Die beiden Doppelpunkttetraeder von F^3 und Δ^3 befinden sich in vierfach perspektiver oder „desmischer“ Lage. Die F^3 mit vier Doppelpunkten ist zu der Römerfläche Steiners dual. Zch.

D. J. Rey Pastor. Cuárticas de 1ª y 2ª especie sobre cuádricas alabeadas. Asociación Esp. Valencia, 22 S.

Nach einer kurzen einleitenden Übersicht über die Eigenschaften der 2-2-deutigen und der 1-3-deutigen Verwandtschaft werden die Raumkurven

vierter Ordnung erster und zweiter Art als Erzeugnisse derartiger Verwandtschaften auf einer Fläche zweiter Ordnung definiert und nach dem Vorkommen singulärer Punkte in Gruppen eingeteilt. Auf die allgemeine Theorie der beiden Kurvenarten folgt eine Betrachtung der Fälle mit singulären Punkten. Zch.

C. Servais. Sur la courbure des biquadratiques gauches de première espèce. Nouv. Ann. (4) **11**, 289-302.

Erweiterung der Untersuchungen des Verf. über die Krümmung der Kegelschnitte und kubische Raumkurven (Mém. Ac. Roy. de Belgique (2) **1**; F. d. M. **37**, 610, 1906). Ein Kegelschnitt ist bestimmt durch ein Polardreieck, einen Punkt P und die Tangente in diesem; dann läßt sich der Krümmungsradius der Kurve im Punkte P ziemlich einfach herleiten. Unter Benutzung dieses Ergebnisses kann man die Krümmung und Torsion in einem Punkt P der Schnittkurve zweier Flächen zweiten Grades bestimmen, wenn die Kurve durch ein gemeinsames Polartetraeder der beiden Flächen, den Punkt P und seine Tangente bestimmt ist. Sk.

B. Kalicun. Beiträge zu den Regelflächen fünfter Ordnung. (1. Mitteilung.) Wien. Ber. **120**, 1299-1326.

Der Verf., der bereits früher (Wien. Ber. **119**, 1351, 1910) die Eigenschaften der Erzeugnisse der ein-vierdeutigen Gebilde der Ebene untersucht hat, wendet sich in der vorliegenden Abhandlung den Erzeugnissen der entsprechenden Gebilde im Raume zu. Die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier ein-vierdeutigen Ebenenbüschel mit windschiefen Achsen erfüllen eine Regelfläche fünfter Ordnung. Dieselbe kann auch durch Verbindung entsprechender Punkte zweier ein-vierdeutigen Punktreihen erzeugt werden, deren Träger die Achsen des vierdeutigen und des eindeutigen Büschels sind. Durch jeden Punkt der Fläche geht im allgemeinen eine einzige Erzeugende. Der eindeutige Büschel besitzt sechs Verzweigungselemente, denen ebensoviele Doppelelemente im vierdeutigen entsprechen. Die Fläche besitzt daher sechs singuläre Erzeugende erster Ordnung, welche paarweise imaginär sein können. Sie kann auch in besonderen Fällen ein bis drei singuläre Erzeugende zweiter Ordnung oder ein bis zwei singuläre Erzeugende dritter Ordnung besitzen. Der ebene Schnitt der Fläche ist im allgemeinen eine Kurve fünfter Ordnung achter Klasse, der umgeschriebene Kegel ist von der fünften Klasse und achten Ordnung. Ordnung und Klasse erniedrigen sich für bestimmte singuläre Lagen der Ebene oder des Kegelscheitels. Nach der Realität der Doppelelemente und dem etwaigen Vorhandensein mehrfacher Elemente erfolgt die Einteilung der Flächen in Arten und Gattungen. Zch.

Fr. Kadeřávek. Über eine besondere windschiefe Fläche. Časopis **40**, 21-29, 156-162. (Böhmisch.)

Die Fläche, von der verschiedene Eigenschaften bewiesen werden, ist auf folgende Weise bestimmt: Es ist ein Kreiszylinder und auf ihm ein leuchtender Punkt gegeben. Die Fläche enthält alle vom gegebenen Zylinder in den Punkten eines Kreises einmal reflektierten Strahlen. Pe.

Ch. Halphen. **Sur l'enveloppe d'une droite.** Revue de Math. spéc. **21**, 131-132.

Um auf geometrischem Wege zu entscheiden, ob eine Regelfläche abwickelbar ist oder nicht, projiziere man ihre Erzeugenden auf zwei zur Horizontalebene senkrechte Ebenen. Die Fläche ist abwickelbar, wenn entsprechende Punkte der Hüllkurven der Projektionen in gleicher Höhe gelegen sind. Sk.

O. Danzer. **Über Kurven, die sich zyklographisch als Zykloiden abbilden.** Monatsh. f. Math. u. Phys. **22**, 170-176.

Die nach irgend einem Gesetz gegen eine ebene Kurve einfallenden Lichtstrahlen ergeben reflektiert eine Hüllkurve, die Katakaustik. Eine orthogonale Trajektorie der reflektierten Lichtstrahlen heißt Antikaustik der gegebenen Kurve. Nach E. Müller ist die Antikaustik einer ebenen Kurve K' für parallele Strahlen das zyklographische Bild der Schnittkurve des projizierenden Zylinders durch K' mit einer Pseudominimalebene, deren Spur E zur Strahlenrichtung senkrecht steht. Ist K' ein Kreis und E ein Durchmesser von K', so wird die Schnittellipse als Epizykloide abgebildet. Jede Zykloide kann als zyklographisches Bild einer Raumkurve K aufgefaßt werden, wobei die orthogonale Projektion K' der feste Kreis der Zykloide wird. Es werden allgemein die Gleichungen der Raumkurve K aufgestellt, deren zyklographisches Bild aus der Epizykloide und der Hypozykloide besteht, die durch Rollen eines Kreises auf einem anderen entstehen. Von diesen allgemeinen Gleichungen werden einige besondere Fälle untersucht. Zch.

G. Koenigs. **La loi de courbure des profils superficiels conjugués.** C. R. **152**, 1463-1465.

Gehört eine gegebene Fläche F einem starren Systeme S an, das in bezug auf ein zweites starres System S' beweglich ist, so wird F von einer dem Systeme S' angehörenden Fläche F' eingehüllt, welche sie in jedem Augenblick längs einer Kurve (c) berührt. Die Krümmungselemente der Fläche F' in einem Punkte M von (c) hängen von der Bewegung und von den entsprechenden Elementen der Fläche F in demselben Punkte ab. Das Gesetz dieser Abhängigkeit läßt sich, wie der Verf. zeigt, mittels einer Homographie mit zusammenfallenden Doppelelementen in eine einfache Form bringen. Auf der gemeinsamen Normale MN der Flächen F, F' liegen zunächst die Elemente der Krümmung von F, nämlich die Hauptkrümmungsebenen Π_1, Π_2 und die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte C_1, C_2 sowie die analogen Elemente Π_1', Π_2', C_1', C_2'

für F'. Auf derselben Normale liegt aber auch die Korrelation H, welche jedem Punkte P von MN diejenige Ebene Π des Büschels MN zuordnet, welche in P die Fläche berührt, die von der Normale erzeugt wird, wenn M die Kurve (c) beschreibt. Aus dieser Korrelation H entsteht eine zweite, G, wenn man Π um MN sich um 90^0 drehen läßt. In dieser Korrelation G sind C_1', Π_1' und C_2', Π_2' Paare entsprechender Elemente. Diese Korrelation G kann auch unabhängig von der erzeugenden Fläche definiert und konstruiert werden. Zu ihr gehören unendlich viele Flächenpaare F, F', die sich durch die Diederpaare Π_1, Π_2 und Π_1', Π_2' unterscheiden. Zu jedem derartigen Flächenpaare gibt es ein Paar paralleler Flächen F_0, F_0', welche sich in dem Mittelpunkt O der Korrelation G berühren. Die gemeinsame Tangente Oy in O ist für jede der beiden Flächen eine asymptotische Tangente. Die zweiten asymptotischen Tangenten OA, OA' sind nun entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel mit zusammenfallenden Doppelstrahlen. Ist OV die Geschwindigkeit von O in der Berührungsebene, OU die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf diese Ebene und OW der harmonisch konjugierte Strahl zu Oy bezüglich OV und OU, so ist OW der einzige Doppelstrahl der Homographie. Die Gleichung dieser Homographie wird zum Schluß aufgestellt. Zch.

G. Koenigs. **Sur les surfaces qui, au cours d'un mouvement donné, sont continuement osculatrices à leur profil conjugué.** C. R. **153**, 998-999.

In einer Abhandlung über die konjugierten Kurven (Rec. des Sav. étrang., Bd. 35) hat der Verf. den Begriff der stationären Normalen eingeführt, d. h. der Geraden, welche in zwei unendlich benachbarten Augenblicken normal zu den Trajektorien ihrer Punkte sind. Diese Geraden bilden eine lineare Kongruenz, welche im Verlaufe der Bewegung einen Komplex erzeugt. Die Flächen, welche in jedem ihrer Punkte zu einer Geraden dieses Komplexes normal sind, besitzen, wie a. a. O. gezeigt wird, die Eigenschaft, ihr konjugiertes Profil, d. h. die bei ihrer Bewegung entstehende Hüllfläche, längs der ganzen Berührungskurve zu oskulieren. In einer anderen Mitteilung (Referat vorstehend) hat der Verf. die Aufgabe gelöst, die Krümmungselemente des konjugierten Profils aus denen der gegebenen Fläche und den Daten der Bewegung derselben zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe führte den Verf., wie er in der vorliegenden Notiz mitteilt, zu dem Satze, daß die in der erstgenannten Abhandlung bezeichneten Flächen die einzigen sind, welche im Verlaufe einer gegebenen Bewegung in jedem Augenblick ihr konjugiertes Profil längs der ganzen Berührungslinie oskulieren. Zch.

G. T. Bennett. **The composition of finite displacements and the use of axodes.** Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 273-285.

Bei der Untersuchung der stetigen Bewegung eines Körpers betrachtet man gewöhnlich die Flächen, welche die Achse der augenblicklichen Schraubenbewegung im Raume und in dem Körper beschreibt. Beide Flächen berühren einander längs einer gemeinsamen Erzeugenden, der Achse der augenblicklichen Schraubenbewegung. Man nennt die beiden Flächen die Raum- und

Körperaxode. Dieselbe Bezeichnung führt der Verf. auch für den Fall von Bewegungen ein, die eine endliche Zahl verschiedener Stellungen verknüpfen. Irgend zwei Stellungen sind durch eine Schraubenbewegung verknüpft. Die Gruppe der Schraubenachsen im Körper und im Raume bildet die Axode. Im Falle dreier Stellungen sind Raum- und Körperaxode kongruente Figuren. Wird der Begriff der Axode von Anfang an eingeführt, so folgt aus ihm sofort das bekannte Gesetz der Zusammensetzung zweier Bewegungen. Es gibt ferner semikongruente Triaden von Axoden, d. h. solche, die zwar in ihren drei Linienpaaren übereinstimmen, aber nicht im ganzen kongruent sind. Diese Triaden führen zu gewissen Zykeln von sechs Stellungen, deren Beziehungen näher untersucht werden. Drei Achsen dieser Art können als gemeinsame Normalen entsprechender Kanten zweier willkürlich angenommenen und aufeinander bezogenen rechtwinkligen Dreikante angesehen werden. Der allgemeine Fall der Axoden für vier Stellungen wird kurz betrachtet und der Zusammenhang mit der Konfiguration zweier gegenseitig eingeschriebenen Tetraeder beleuchtet.

Zch.

Weitere Literatur.

R. Gidály. Die Hauptmethoden der Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten. Progr. Wiener-Neustadt. 40 S. 8°.

B. Procházka. Eine Bemerkung zur projektiven Erzeugung der Flächen zweiten Grades. Prag. Ber. 1911, Nr. 12, 5 S. (Böhmisch.)

J. Melichar. Bestimmung des geometrischen Ortes der Pole von Schnitten einer Fläche zweiten Grades in bezug auf einen Strahlenbüschel. Prog. Realsch. in Kremsier. 4 S. (Böhmisch.)

V. Hruška. Konstruktion der Inflexionspunkte des Schlagschattens der windschiefen Fläche dritten Grades. Časopis **40**, 562-570. (Böhmisch.)

F. Rulf. Behandlung des Plückerschen Konoides auf Grund einer neuen Definition. Progr. Wien. 28 S. 8°.

Fr. Kadeřávek. Die Bestimmung der einen gegebenen Punkt enthaltenden Oskulationshyperboloide zu den windschiefen Flächen dritten und vierten Grades. Časopis **40**, 570-574. (Böhmisch.)

V. Jarolímek. Über eine bestimmte Strahlenkongruenz [44]. Časopis **40**, 152-156. (Böhmisch.)

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

P. H. Schoute. De vijfhoekige projecties van de regelmatige vijfcel en van de halfregelmatige polytopen uit haar afgeleid. Amst. Ak. Versl. **20**, 39-49.

Verf. bedient sich zur Ableitung der zum regulären Fünfzell des vierdimensionalen Raumes gehörigen halbregulären Polytope der von A. Boole Stott in der Abhandlung „Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes

and space fillings“ gegebenen Methoden. Er nimmt das reguläre Fünfzell in einer solchen Aufstellung zum Koordinatensystem, dessen Achsen x_1, x_2, x_3, x_4 seien, an, daß es sich sowohl in die x_1x_2-Ebene als in die x_3x_4-Ebene als reguläres Fünfeck projiziert, und zwar so, daß die Kanten, welche in der einen Projektion als Seiten erscheinen, in der anderen zu Diagonalen werden. Dadurch werden auch die Projektionen der abgeleiteten Polytope sehr anschaulich.
Stz.

P. H. Schoute. Over de kenmerkende getallen van het prismotoop. Amst. Ak. Versl. **20**, 430-434.

Sind in einem Raum von $m+n$ Dimensionen zwei Polytope P_1, P_2 von m, bzw. n Dimensionen gelegen, die einen Punkt gemein haben und keinem Raume von weniger als $m+n$ Dimensionen zugleich angehören, und wird P_2 parallel mit sich so bewegt, daß ein mit P_2 festverbundener Punkt nacheinander mit jedem Punkte von P_1 zusammenfällt, so überstreicht P_2 ein Polytop P von $m+n$ Dimensionen, welches ein „Prismotop mit den beiden Konstituenten P_1, P_2“ genannt wird. In gleicher Weise kann aus p Polytopen $P_1, \cdots, P_p$ von $n_1, \cdots, n_p$ Dimensionen ein solches von $n_1 + \cdots + n_p$ zusammengesetzt werden; die Reihenfolge der Konstituenten ist auf das Resultat ohne Einfluß. Ordnet man jedem n-dimensionalen Polytop diejenige ganze rationale Funktion $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ zu, deren Koeffizient a_k die Anzahl der k-dimensionalen Grenzelemente bezeichnet, so entspricht jedem Prismotop das Produkt der Funktionen, die seinen Konstituenten zugeordnet sind. Stz.

C. J. Keyser. A sensuous representation of paths that lead from the inside to the outside of an ordinary sphere in point-space of four dimensions without penetrating the surface of the sphere. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 18-22.

„Zweck dieser Note ist der Nachweis, wie die Existenz der Wege der Anschauung und sogar dem Gesichts- und dem Tastsinn dargetan werden kann. Der Zweck wird erreicht durch eine einfache Transformation, welche die Punkte des vierdimensionalen Raumes R_4 mit den Kugeln des gewöhnlichen Raumes einschließlich aller Kugeln mit reellem Mittelpunkt und mit rein imaginärem Radius in Beziehung setzt. Auf diese Weise werden nicht zu veranschaulichende Lagen im R_4, wie die der in Rede stehenden Wege, durch anschauliche analytische Äquivalenzen im R_3 dargestellt, und diese Äquivalenzen können durch leicht herzustellende physische Modelle wahrnehmbar gemacht werden.“ Lp.

H. Mohrmann. Über die windschiefen Linienflächen im Raume von vier Dimensionen und ihre Haupttangentenflächen als reziproke Linienflächen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **18**, 66-68.

Die Erzeugenden einer Linienfläche im R_4 können 1. Doppel- oder Rückkehrerzeugende (überhaupt mehrfache Erzeugende), 2. Torsallinien, d. h. Erzeugende

sein, die von (wenigstens) einer unendlich benachbarten Erzeugenden geschnitten werden, 3. hyperbolisch, d. h. mit zwei konsekutiven Erzeugenden einem Raume von drei Dimensionen angehören, und 4. regulär sein. Als reguläre Quadrupel werden solche Systeme von vier Geraden bezeichnet, von denen keine zwei in einer Ebene und keine drei in einem dreidimensionalen Raume liegen. Drei gerade Linien allgemeiner Lage in einem Raume von vier Dimensionen bestimmen eine und nur eine Schnittgerade. Ein reguläres Quadrupel hat daher vier Tripelschnittgeraden. Bilden diese ein windschiefes Quadrupel, so heißt das reguläre Quadrupel von allgemeiner Lage. Die vier Tripelschnittgeraden eines regulären Quadrupels allgemeiner Lage bilden ein reguläres Quadrupel allgemeiner Lage. Schneiden zwei Tripelschnittgeraden einander, so liegen drei der vier Tripelschnittgeraden mit einer Quadrupelgeraden in einer Ebene, die von der vierten Tripelschnittgeraden nicht getroffen wird: Quadrupel von singulärer Lage. Fallen alle vier Tripelschnittgeraden zusammen, so heiße das Quadrupel Quadriga. Eine reguläre Erzeugende einer Linienfläche im R_4 soll von allgemeiner oder singulärer Lage oder aber Quadrigallinie heißen, je nachdem sie mit drei konsekutiven Erzeugenden ein Quadrupel von allgemeiner oder singulärer Lage oder eine Quadriga bildet.

Haupttangente einer windschiefen Linienfläche heiße eine Tangente, welche drei (oder mehr) einander unendlich benachbarte Punkte mit ihr gemein hat, ohne (im allgemeinen) in einem Punkte einer (etwa vorhandenen) Doppel- (oder mehrfachen) Kurve der Fläche zu berühren. Die Haupttangenten einer windschiefen Linienfläche ohne Leitgerade im R_4 bilden im allgemeinen eine windschiefe Linienfläche, und zwar stehen die gegebene Fläche und ihre Haupttangentenfläche in wechselseitiger Beziehung zueinander: die Erzeugenden der einen Fläche sind eindeutig auf die Erzeugenden der anderen Fläche bezogen, und die Haupttangenten der einen Fläche sind die Erzeugenden der anderen Fläche. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Haupttangentenfläche einer windschiefen Linienfläche im R_4 ohne Leitgerade developpabel ist, besteht darin, daß ihre Erzeugenden der Kongruenz der Schmiegungsstrahlen einer (dreifach gekrümmten) Kurve angehören. Zch.

M. G. Shine. Little journeys into the invisible: a woman's actual experience in the fourth dimension. Richmond Va. Allshine. 71 S. 16mo.

E. Abzählende Geometrie.

P. H. Schoute. Oppervlakken, ruimtekrommen en punktgroepen als meetkundige plaatsen van toppen van bepaalde stelsels van kegels. Amst. Ak. Versl. **20**, 574-583.

Der geometrische Ort der Punkte P, die nach $(n+2)_2$ willkürlich gegebenen Paaren windschiefer Geraden Transversalen aussenden, die einem Kegel n-ter Ordnung angehören, ist eine Fläche mit der Ordnungszahl $4\,(n+2)_3$, für welche die gegebenen Geraden n-fache und die Transversalen der aus je zwei gegebenen Geradenpaaren gebildeten Geradenquadrupel einfache Geraden sind.

Der geometrische Ort der Spitzen der Kegel n-ter Ordnung, die durch $(n+2)_2$ willkürlich gegebene Punkte gehen, ist eine Fläche vom Grade $(n+2)_3$, für welche die gegebenen Punkte n-fache Punkte sind.

Für den Fall $n = 2$ ergibt sich ferner: Der geometrische Ort der Punkte P, die nach $(n+2)_2 + 1 = 7$ willkürlich gegebenen Geradenpaaren Transversalen aussenden, die auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen, ist eine Raumkurve ϱ^{146}, die mit jeder der gegebenen 14 Geraden 16 und mit jeder der 42 Transversalen der aus je zwei Paaren gebildeten Quadrupel 12 Punkte gemein hat. Sie geht durch die Doppelpunkte der zu je 6 Geradenpaaren nach dem ersten Satze gehörenden Fläche O^{16} und berührt in diesen Punkten den Berührungskegel der Fläche.

Die Anzahl der Punkte P, die nach 8 willkürlich gegebenen Geradenpaaren einem quadratischen Kegel angehörende Transversalen aussenden, ist 996.

Zch.

P. de Lepiney. Sur une application du principe de correspondance. Mathesis (4) 1, 113-116.

Zwei Scharen von Kurven von der Ordnung m_1 und m_2 mit den zugehörigen Indizes bzw. M_1 und M_2 erzeugen, wenn sie in einer (μ_1, μ_2)-Verwandtschaft stehen, eine Kurve von der Ordnung $M_1 m_2 \mu_2 + M_2 m_1 \mu_1$. Mn. (Lp.)

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Kapitel 1.

Lehrbücher, Koordinaten, Prinzipien.

G. A. Gibson and P. Pinkerton. Elements of analytical geometry. London: Macmillan and Co. XXI u. 475 S. 8°.

Diese Einleitung in die analytische Geometrie unterscheidet sich von den meisten Werken ähnlicher Tendenz durch das Hineinziehen der Kurven höherer Ordnung und die graphische Behandlung algebraischer Gleichungen. Über den Inhalt berichten die Verf. in dem ausführlichen Vorwort, aus dem wir das folgende entnehmen:

„Kap. 1—9 handeln von den Geraden, dem Kreise und einigen einfachen Kurven, die aus ihrer Definition leicht gewonnen werden können ohne ausgedehntere algebraische Analysis. Diese ersten Kapitel sollen den Studierenden mit den Hauptformeln (Schnitt, Abstand, Winkel) bekannt machen, die in allen Anwendungen häufig vorkommen ... Kap. 10—17 behandeln die graphische Darstellung von Gleichungen. Das Ziel dieser Abschnitte ist, die Form der durch nicht zu komplizierte algebraische Gleichungen dargestellten Kurven schnell zeichnen zu lehren. Besonderer Nachdruck ist auf die Methode sukzessiver Näherungen gelegt worden. Der Rest des Buches, Kap. 18—24, enthält eine ziemlich vollständige Behandlung der Kegelschnitte. Viele Eigenschaften der Kurven ergeben sich sehr einfach durch synthetische Methoden, und wir haben nicht gezögert, diese anzuwenden, sobald sie einen entschiedenen Vorteil boten.“ — Das Werk ist, wie die meisten englischen Lehrbücher, mit einer Fülle von Übungsbeispielen ausgestattet. Zu bedauern ist, daß die Behandlung der Geraden durch eine ungerechtfertigte Festsetzung des Sinnes (Geraden sind hiernach Speere, deren Projektion auf die x-Achse positiv gerichtet sind) an Symmetrie und Einfachheit eingebüßt hat. Sk.

D. A. Gravé. Grundlagen der analytischen Geometrie. Teil 1. Geometrie der Ebene. Kiew VIII + 492 S. 8°. (Auch in Kiew Univ. 1911—1912 erschienen.) (Russisch.)

Vorliegendes Lehrbuch gibt die Darstellung des Unterrichtsstoffes, wie er vom Verfasser an der Universität Kijew vorgetragen wird. Der Inhalt und die Darstellungsmethode des Buches haben nichts Gemeinsames mit dem 1893 veröffentlichten „Kursus der analytischen Geometrie" desselben Verfassers, wie er es ausdrücklich in der Vorrede bemerkt. Übersicht des Inhaltes: Einleitung. I. Hauptformeln und Aufgaben. II. Gerade Linie. III. Koordinatentransformation. IV. Kreis. V. Geometrische Örter. VI. Kegelschnitte. VII. Klassifikation der Linien zweiter Ordnung. VIII. Allgemeine Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung. IX. Theorie des Mittelpunktes. X. Invarianten der Koordinatentransformation. XI. Theorie der Durchmesser. XII. Theorie der Tangenten. XIII. Brennpunkte. XIV. Projektive Verwandtschaft der Ebenen. XV. Erweiterung des Tangentenbegriffs. Abgekürzte Methode. XVI. Fälle der Involution der kollinearen Verwandtschaften. XVII. Büschel und Netze der Linien zweiter Ordnung. XVIII. Einige Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung. Inversion. XIX. Haupteigenschaften der algebraischen Kurven höherer Ordnungen. Si.

G. SALMON. A treatise on the analytic geometry of three dimensions. Revised by R. A. P. Rogers. Fifth edition, in 2 vols. Vol. I. London: Longmans, Green & Co. XXII u. 470 S. 8°.

Es sind halb getönte Illustrationen der meisten verschiedenen Arten der Quadriken mit den Erzeugenden oder den Krümmungslinien hinzugefügt, ebenso eine begrenzte Anzahl von Beispielen zur Beleuchtung der allgemeinen Prinzipien. Der zweite Band wird vorbereitet. J. (Lp.)

K. DÜSING. Leitfaden der Kurvenlehre. (Analytische Geometrie der Ebene.) Hannover. M. Jänecke. IX u. 144 S. 8°.

Das Buch ist für technische Lehranstalten bestimmt, verzichtet daher auf systematische Vollständigkeit und Strenge zugunsten der für seinen Leserkreis besonders wichtigen Anwendungen. In der Hand eines vorsichtigen Lehrers werden diese auch auf unseren höheren Lehranstalten manches zur Belebung des Interesses beitragen können. Behandelt wird alles, was für den Ingenieur von Interesse ist, Kegelschnitte, Rollkurven, Verzahnung, Krümmungstheorie. Sk.

M. SIMON. Analytische Geometrie der Ebene. Dritte Auflage. Leipzig: G. J. Göschen, 195 S. 12mo. (Sammlung Göschen Nr. 65.)

Die vorliegende dritte Auflage ist ein verbesserter Abdruck der zweiten. Die Verbesserung besteht hauptsächlich in der Verminderung der zahlreichen Druckfehler. Sonst hat das Büchlein seine Vorzüge behalten: Durch Kombination der analytischen, der synthetischen und der konstruktiven Methode

wird die Rechnung auf ein Mindestmaß gebracht. Außer den Kegelschnitten werden auch die bekanntesten höheren Kurven mit den einfachsten Mitteln behandelt.
Nm.

L. Tits. Résumé du cours de géométrie analytique plane. Lierre: Van In. 160 S. gr. 8°.

H. Mandart. Leçons de géométrie analytique à deux dimensions à l'usage de l'enseignement moyen. Namur: Wesmael-Charlier. 334 S.

Werke, die dem Programm der ersten wissenschaftlichen Klasse der belgischen höheren Schulen entsprechen: Koordinaten, Gerade, Kurven zweiten Grades. Das zweite enthält etwas mehr als das erste (Tangentialkoordinaten).
Mn. (Lp.)

K. B. Penionschkewitsch. Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Kursus der siebenten Klasse der Realschulen. Nach dem Programm von 1907. St. Petersburg VI + 198 S. 8°. (Russisch.)

„Vom gelehrten Komitee des Ministeriums des öffentlichen Unterrichts mit dem kleinen Preise des Kaisers Peters des Großen gekrönt." Eins der besten Lehrbücher, wenn auch nicht ganz einwandfrei. Ausführlicher habe ich das Buch in Kagans Bote Nr. 557-8 besprochen.
Si.

K. Raschevskij. Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Lehrbuch der siebenten Klasse der Realschulen. Dritte, durchgesehene Aufl. Moskau. 138 + II S. 8°.

In meiner Rezension (Kagans Bote Nr. 559) urteilte ich, das Buch sei ungeachtet einiger Versehen und Mängel sehr brauchbar.
Si.

A. Woinov. Elemente der analytischen Geometrie. Kursus der siebenten Klasse der Realschulen. Fünfte Aufl. Moskau. 98 S. mit Fig. 8°. (Russisch.)

Das Lehrbuch des im Herbst 1913 verstorbenen Verf., welcher als Direktor der Realschule in Pawlovsk am Don tätig war, gelangte 1911 schon zur fünften Auflage.
Si.

W. Gebel. Anfangsgründe der analytischen Geometrie des Raumes und Sammlung von Aufgaben. Für die mittleren technischen Schulen und zum Selbstunterricht. Moskau. III + 59 + 1 S. 8°.

Brauchbar trotz einiger Mängel für den ersten, nicht aber für den zweiten Zweck.
Si.

R. Fischer. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, in denen die Quadratwurzeln aufgehen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 342-364.

Für Schüler zusammengestellt in der Meinung, „daß sich die Schüler mehr für solche Aufgaben interessieren, in denen die zu berechnenden Quadratwurzeln aufgehen, als wenn das Resultat durch eine irrationale Zahl ausgedrückt wird“. Lp.

P. B. Fischer. Koordinatensysteme. Leipzig: G. J. Göschen. 123 S. kl. 8°. (Sammlung Göschen Nr. 507.)

Die Absicht des Verf. ist es, den Koordinatenbegriff in seiner Allgemeinheit zu entwickeln, so wie er heute in der geometrischen Forschung angewandt wird. Naturgemäß wird zuerst der Begriff der kartesischen Koordinaten entwickelt, daran werden die projektiven, weiter die krummlinigen Koordinaten angeschlossen, zum Schluß der Koordinatenbegriff in der mehrdimensionalen Geometrie erläutert. Das Werk ist zur Einführung in den Gegenstand sehr geeignet; für weitere Studien sind Literaturnachweise gegeben, in denen man aber nur ungern den Hinweis auf die fundamentalen Untersuchungen von Study vermißt, der ja wie kaum ein zweiter die Bedeutung der allgemeinen Koordinaten ins rechte Licht zu setzen verstanden hat. Nicht ganz einverstanden wird man sein, wenn der Geradenraum kurzweg als vierdimensional bezeichnet wird: bekanntlich ist es nicht möglich, ihn durch vier unabhängige Koordinaten darzustellen; vielmehr ist er eine quadratische Mannigfaltigkeit im Raum von fünf Dimensionen, ebenso wie die Mannigfaltigkeit der Kugeln, die Verf. offenbar versehentlich (S. 121) gelegentlich als fünfdimensional bezeichnet (auf S. 15 steht es richtig) und gar mit der Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte einer Ebene in Beziehung setzen will. Sk.

N. Jogiches. Ebene analytische Geometrie im System von Lobatschevskij. Kasan Ges. (2) **17**, Nr. 4, 59-80. (Russisch.)

Formeln der Koordinatentransformation; Gleichungen der geraden Linie und der elementaren Kurven, des Kreises, des Orizykels, der Linie gleicher Abstände. $\mathrm{th}^2 x + \mathrm{tg}^2 y = 1$ ist die Gleichung des geometrischen Ortes der unendlich entfernten Punkte (Orizykels mit Zentrum O). Einige Bemerkungen über den Inhalt der folgenden Abhandlung. Si.

J. Haag. Sur les coordonnées pentasphériques générales. Nouv. Ann. (4) **11**, 49-67.

Gewissermaßen schiefwinklige pentasphärische Koordinaten, d. h. die fünf Fundamental„kugeln“ sind nicht mehr paarweise orthogonal. B.

G. B. Mathews. Theory of complex cartesian coordinates. Nature 88, 278.

Die vom Verf. in Lond. M. S. Proc. **10** (Referat nachstehend) gegebene Theorie des komplexen Punktes $(a + di, b + ei, c + fi)$ ist unabhängig hiervon durch E. W. Davis in den Nebraska University Studies (Lincoln, 1910) ausgesprochen worden. Die Abhängigkeit der Darstellung von der v. Staudtschen Theorie wird hervorgehoben. Lp.

G. B. Mathews. A cartesian theory of complex geometrical elements of space. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, 173-190.

Der komplexe Punkt mit den kartesischen Koordinaten $(a + iA, b + iB, c + iC)$ wird durch den reellen Pfeil gedeutet, dessen Anfangspunkt die Koordinaten (a, b, c) hat, während der Endpunkt $(a + A, b + B, c + C)$ heißt. Der nicht uninteressante Versuch muß aber erfolglos bleiben, sobald es sich um die Deutung der einfachsten Mannigfaltigkeiten komplexer Punkte handelt (und in der Tat ist auch das reelle Bild einer geraden Linie nicht ausgeführt), weil die angegebene Konstruktion keinen invarianten Charakter hat. Schon zwei Punkte, deren reelle Bildpfeile entgegengesetzt sind, stehen in ganz verwickeltem Zusammenhang. Vgl. das folgende Referat über Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Heft I. B.

E. Study. Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Erstes Heft: Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. Leipzig: B. G. Teubner. 126 S. 8°.

Der Titel ist nicht besonders glücklich gewählt. Es handelt sich um gewisse Kapitel der elementaren komplexen Geometrie der Ebene.

Um uns möglichst kurz fassen zu können, erinnern wir zunächst an einige Begriffe der komplexen Geometrie. Es gibt in der Ebene, die ja jetzt vierfach ausgedehnt ist, Örter von ∞^1, ∞^2 und ∞^3 komplexen Punkten, von denen wir hier nur die (in Anlehnung an italienische Literatur) vom Verf. sogenannten Membranen erwähnen, Örter von ∞^2 komplexen Punkten. Ein analytisches Membranstück wird durch zwei Gleichungen $\xi = \xi(\sigma, \tau), \eta = \eta(\sigma, \tau)$ dargestellt, wo die reellen und die vom Faktor i befreiten imaginären Bestandteile der Koordinaten (ξ, η) sich in einem gemeinsamen Existenzbereich nach Potenzen zweier reellen Parameter σ und τ entwickeln lassen; dabei ist aber noch zu fordern, daß nicht alle Funktionaldeterminanten einer gewissen Matrix gleichzeitig identisch verschwinden.

Durch das Doppelintegral

$$\iint \left(\frac{\partial \xi \partial \eta}{\partial \sigma \partial \tau} - \frac{\partial \xi \partial \eta}{\partial \tau \partial \sigma} \right) d\sigma d\tau$$

erklärt man den „Flächeninhalt" eines Membranstücks. Es gibt Membranen, deren sämtlichen Stücken ein reeller Flächeninhalt zukommt. Eine solche ist

der reelle Zug einer reellen Ebene. Ist der Flächeninhalt auf einer Membran identisch Null, so ist die Membran eine Kurve. Der Begriff der Membran ist also umfassender als der der Kurve, die ja ebenfalls ∞^2 komplexe Punkte besitzt.

Die Eigenschaft einer analytischen Membran, Kurve zu sein, ist invariant gegenüber allen analytischen Punkttransformationen. Gegenüber konformen Transformationen gibt es ferner eine (reelle) Differentialinvariante, deren identisches Verschwinden eine besonders interessante Klasse von Membranen definiert; diese werden „ausgezeichnet" genannt.

Ein komplexer Punkt einer reellen Ebene wird (nach Laguerre) abgebildet auf ein Paar wohlgeordneter reeller Punkte dieser Ebene („Erstes Bild" des komplexen Punktes). Kehrt man die Reihenfolge dieser beiden Punkte um, so erhält man das erste Bild des konjugiert-komplexen Punktes. Übt man die fragliche Konstruktion auf einen reellen Punkt aus, so fallen beide Punkte des ersten Bildes mit ihm (also auch miteinander) zusammen. Die Beziehung zwischen einem komplexen Punkt und seinem ersten Bilde wird nicht zerstört durch reelle eigentlich-konforme Abbildungen.

Konstruiert man nun zu jedem Punkte einer analytischen Membran das erste Bild, also die Figur zweier geordneten reellen Punkte, so werden den ∞^2 reellen Punkten der Ebene (oder eines Stücks von ihr) zugeordnet ∞^2 weitere reelle Punkte; mit anderen Worten, es wird (in der Regel) eine Transformation geliefert.

So gelangt der Verf. zu den Sätzen:

Das erste Bild einer ausgezeichneten Membran ist eine eigentlich-konforme Abbildung des reellen Gebietes, und umgekehrt. Das erste Bild einer analytischen Kurve ist eine uneigentlich-konforme Transformation. Ist die Kurve ein Kreis, so erhält man eine Kreisverwandtschaft, die zu einer Ähnlichkeitstransformation wird, wenn der Kreis in eine Gerade ausartet.

Dreht man das Punktepaar, welches als erstes Bild eines komplexen Punktes fungiert, durch 90^0 so, daß die Ecken eines Quadrats entstehen, so kann das neue wohlgeordnete Paar reeller Punkte ebenfalls als reelles Bild des komplexen Punktes angesehen werden („Zweites Bild"). Die Beziehung zwischen einem komplexen Punkte und seinem zweiten Bilde wird durch reelle Affinitäten nicht zerstört. Jetzt hat man:

Das zweite Bild einer analytischen Membran, deren sämtlichen Stücken ein reeller Flächeninhalt zukommt, ist eine eigentlich-flächentreue Abbildung, und umgekehrt; wird die Membran zu einer analytischen Kurve, so spezialisiert sich die flächentreue Abbildung in gewisser Weise; z. B. wird sie affin von der Periode vier für komplexe Gerade.

Der Prozeß, vermöge dessen aus dem ersten Bild eines komplexen Punktes das zweite Bild hervorgeht, wird „Schwenkung" genannt. Der Schwenkungsprozeß läßt aus einer reellen eigentlich-konformen Abbildung eine ebensolche, aus einer uneigentlich-flächentreuen Abbildung eine ebensolche hervorgehen. Dagegen verwandelt er eine uneigentlich-konforme Transformation in eine spezielle eigentlich-flächentreue und umgekehrt.

Diese interessante Tatsache ist die Grundlage für die eingehenden Untersuchungen zur Theorie der flächentreuen Abbildungen, aus der wir noch ein Resultat hervorheben. So wie das erste Bild einer analytischen Kurve für reelle Kurven involutorisch wird [ein spezieller Fall davon ist, wenn nämlich die

Kurve einen reellen Zug besitzt, die Schwarzsche Spiegelung], definiert auch jeder reelle krumme analytische Kurvenzug als zweites Bild eine „flächentreue Spiegelung". Auch ist ein Zusammenhang zu erwähnen, der zwischen flächentreuen Abbildungen und der Lehre von den Translationsflächen hergestellt wird. —

Bei der Betrachtung zweier komplexen Punkte erweisen sich als besonders interessant solche, für die das Quadrat des Abstandes reell oder rein-imaginär ist, schließlich solche, deren Verbindungsgerade eine reelle Richtung hat. Daraus resultieren beim ersten Bilde die Begriffe zweier Punktepaare in „Kreuzlage", in „Trapezlage", schließlich „isometrische" Punktepaare. Punktepaare in Kreuzlage bleiben solche auch nach der Schwenkung; Punktepaare in Trapezlage werden durch die Schwenkung in isometrische Paare verwandelt und umgekehrt.

Von den hieraus fließenden Anwendungen auf reelle Differentialgeometrie erwähnen wir den Satz:

Durchlaufen zwei gegenüberliegende Ecken eines veränderlichen Quadrates zwei isometrische Kurven, so sind die Bahnkurven der beiden anderen Ecken durch parallele Tangenten aufeinander bezogen und umgekehrt. —

Im Schlußkapitel findet man Ausblicke nach verschiedenen Richtungen. Anwendungen auf geometrische Optik werden angedeutet, ebenso auf Kinematik; eine sehr interessante Abbildung der projektiven Geometrie des Raumes auf die euklidische Ebene ist mittlerweile bereits von anderer Seite fortgesetzt [1]). Das zweite Bild eines komplexen Punktes wird auf den Raum übertragen. Dabei werden unebene analytische Kurven auf Paare von Translationsflächen abgebildet, die durch parallele Normalen flächentreu aufeinander bezogen sind. Minimalkurven sind dabei assoziierte Minimalflächen zugeordnet.

Zahlreiche Beispiele. Vor der analytischen allgemeinen Kurve werden die Geraden und Kreise sehr eingehend behandelt, später noch Ellipse und Kettenlinien. Es werden so ziemlich alle vorkommenden Begriffe erklärt. Eleganter Zusammenhang zwischen konformen und flächentreuen Abbildungen.

Ausführliche Behandlung aller jener Dinge, an die die Lehrbücher der Differentialgeometrie nur ungern heranzugehen pflegen. Präzisierung des Begriffs der analytischen Kurve. Sehr eingehende Behandlung der Parameterdarstellungen (Begriff des regulären Parameters).

Eine Besprechung dieses Buches (von Carathéodory) in Deutsche Math. Ver. 22, 137-139 (1913). B.

C. Cailler. Sur la pentasérie linéaire de corps solides. C. R. **152**, 504-506.

Eine Mannigfaltigkeit von ∞^5 Somen des hyperbolischen Raumes, die wohl besser als quadratisch bezeichnet wird. Ein Teil des Inhaltes findet sich bereits in der Dissertation von H. Beck (F. d. M. **36**, 730, 1905). B.

G. F. Gundelfinger. On the geometry of line elements in the plane with reference to osculating circles. American J. **33**, 153-174.

[1]) W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, Zeitschr. für Math. und Phys. **60** (1912); W. Blaschke, Ein Beitrag zur Liniengeometrie, Rendiconti di Palermo **33** (1912).

Vermöge der Lieschen Abbildung der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes werden bekanntlich die Kreise der Ebene auf die Geraden eines Gewindes abgebildet. In der vorliegenden Arbeit werden nun die Flächen des Raumes gegenüber der zehngliedrigen Gruppe, die das Gewinde in Ruhe läßt, klassifiziert (ebenso auch die Kurven); die gewonnenen Ergebnisse werden dann wieder rückwärts in die Ebene übertragen. B.

J. Rabinowitsch. Theorie der linearen Vektorfunktionen. Odessa. X + 196 S. 8°. (Russisch.)

Axiomatische Begründung der Vektorenrechnung. Die geometrische Entstehung hält der Verf. für überflüssig vom wissenschaftlichen Standpunkt, und nur in der Einleitung wird sie angegeben, um die Auffassung der abstrakt gewordenen Theorie zu erleichtern. Kap. 1. Haupteigenschaften der Vektoren (Existenzbeweis des Vektorensystems, Vollständigkeit des Systems der Axiome, Unbestimmtheit des Vektorensystems). II. Hauptsätze: Bestimmung der linearen (Vektor-)Funktionen, alternierende Funktionen zweier und dreier Veränderlichen, Rotation und konjugierte Funktion; Zerlegung einer Funktion in einen symmetrischen und einen alternierenden Teil; zwei Formen des Gradienten; Rotation in gelöster Form. III. Bereich der Funktionswerte, Nullwerte, invariante Bereiche und Hamiltonsche Gleichung. Als neu betrachtet hier der Verf. die Methode der Aufstellung der zumeist bekannten Resultate mit Hülfe der Sätze von Kap. II. Kap. IV. Invarianten (Erklärung und Eigenschaften der Stereofunktion, deren invariante Bereiche, Kongruenz der Gebilde und der Funktionen, Kongruenzkennzeichen einer symmetrischen, dann beliebigen Funktion; Indifferenz). Damit ist der erste Teil abgeschlossen. Der zweite Teil (Kap. V u. VI) behandelt den Zusammenhang der linearen Vektorfunktion mit der Theorie der Operatoren, indem die ersteren als distributive Operatoren betrachtet werden. Kap. V. Rechnung mit linearen Vektorfunktionen. VI. Die Gruppen der linearen Vektorfunktionen. Si.

A. D. Bilimowitsch. Vektoranalyse. Physik. Rundschau XI. (Russisch.)

Kurze bibliographische Übersicht der Arbeiten über Vektoranalyse; es sind nur Arbeiten allgemeinen Charakters, besonders Lehrbücher aufgezählt. Si.

A. A. Wolkov. Mathematische Grundlagen der Nomographie. Moskau 30 S. 8°. Separatabz. aus den Nachrichten d. Kaiserlich-Moskauer Ingenieurschule 1911, Teil II, Lief. 5. (Russisch.)

Probevorlesung, gehalten in der Sitzung der Ingenieurschule (jetzt Institut der Wegebauingenieure). Mathematische Prinzipien, die der Nomographie zugrunde liegen, sowie deren Anwendung zur Lösung der Gleichungen. R. Mehmkes Apparat. Si.

Weitere Literatur.

L. Berzolari. Geometria analitica I: Il metodo delle coordinate. Milano: U. Hoepli. 409 S. 16mo (Manuali Hoepli).

O. Dziobek. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Teil I: Analytische Geometrie der Ebene. Aus dem Deutschen übers. von G. Fichtenholz unter d. Redaktion und mit Anmerkungen von W. J. Schiff. Odessa Mathesis. VIII + 390 + 10 S. 8°. Mit 87 Fig. (Russisch.)

W. P. Ermakov. Analytische Geometrie. Vorlesungen am Polytechnischen Institut Kijew. Teil II. Geometrie des Raumes. 3. Aufl. 187 S. 8°.

P. Frost. An elementary treatise on curve tracing. Second edition. London: Macmillan. 8°.

Gljebow. Koordinaten; eine mathematische Abstraktion. Band I. St. Petersburg. 128 S. 8°. (Russisch.)

A. Haase. Die Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene. Kursus der siebenten Klasse der Realschulen. St. Petersburg. 81 S. 8°. (Russisch.)

A. Hochheim. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 1. Heft. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. A. Aufgaben. B. Auflösungen. 4. Aufl., bearb. von O. Jahn u. Fr. Hochheim. Leipzig: Teubner. VI u. 104 S., 136 S. 8°.

A. Hochheim. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. III. Heft. Die Kegelschnitte. 2. Abt. 2. vermehrte Aufl., bearb. von Fr. Hochheim. A. Aufgaben. B. Lösungen. Leipzig: B. G. Teubner. IV u. 69 S., 100 S. 8°.

V. und K. Kommerell. Analytische Geometrie. Für den Schulgebrauch bearbeitet. I. Teil. Tübingen: Laupp. VIII u. 192 S. 8°.

Hubert Müller. Koordinatenbegriff und Kegelschnittslehre. In Aufgaben dargestellt. Metz: Scriba. VI u. 79 S. (Kleinere Ausgabe: IV u. 47 S.) gr. 8°.

B. Niéwenglowski. Cours de géométrie analytique. 2e édition. Tome 1er: Sections coniques. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 496 S. 8°.

M. P. Nikonov. Elementares Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. St. Petersburg. 117 S. 8°. (Russisch.)

N. F. Runquist. Repetitionskurs i analytisk geometri. Malmö. Envall. IV u. 86 S. 8°.

M. F. Simin. Analytische Geometrie. Zweite Auflage. Rostow. 348 S. 8°. (Russisch.)

J. H. Tanner and J. Allen. Brief course in analytic geometry. New York: American Book Co. 316 S. 12mo (Modern mathematical series).

B. Bluhm. Über konjugierte Kurven und Flächen. Diss. Königsberg. 89 S. 8°.

O. Foerster. Über Cassinische Kurven auf der Pseudosphäre. Diss. Münster.

A. Kiefer. Die Einführung der homogenen Koordinaten durch K. W. Feuerbach. Diss. Straßburg. 55 S. 8° (1910).

A. Kisselev. Graphische Darstellung einiger in der elementaren Algebra betrachteten Funktionen. Unterrichtsmittel für Kadettenkorps und andere Lehranstalten. **Moskau. 51 S. 8°. Mit 28 Fig.**

G. Pirondini. Essai d'une théorie analytique des lignes non-euclidiennes. **Ann. Ac. Polyt. Porto 6, 19-38, 105-125, 166-187, 235-254.**

Vgl. F. d. M. **41**, 540-541, 1910.

J. M. Shelly. Coordenadas hyperboloidales y su aplicación al estudio de las conicas y cubicas contenidas en una cuadrica alabeada. **Madrid: Alemana.** 57 S. 8°.

Kapitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven.

J. Hjelmslev. Contribution à la Géométrie infinitésimale de la courbe réelle. **Kopenhagen, Vid. Selsk. Overs. 1911, 433-494.**

Das Hauptziel dieser Arbeit ist: die allgemeinste ebene Jordankurve zu untersuchen, die in jedem ihrer Punkte eine bestimmte Tangente hat, indem zugleich verlangt wird, daß die Halbtangenten im Punkte entgegengesetzte Richtungen haben. Solche Kurven werden als „ordinäre" bezeichnet. Die Stellung der Tangente zur Umgebung des Berührungspunktes auf dem Bogen gibt zu drei Arten von Punkten Anlaß: „Konvexpunkte", „Wendepunkte" und „Undulationspunkte", d. h. solche Punkte, deren Tangente unendlich viele Punkte mit der Umgebung des Punktes auf dem Bogen gemeinschaftlich hat. Unter den bewiesenen Sätzen über die ordinären Bogen (ohne gerade Linienstücke) seien folgende hervorgehoben: Der Bogen hat eine überall dichte Menge von Konvexpunkten; wenn er nur eine endliche Anzahl von Wendepunkten hat, ist er abteilungsweise konvex. Eine geschlossene ordinäre Kurve ohne Wendepunkte ist konvex (Erweiterung eines bekannten Satzes von Möbius). Gibt es eine gerade Linie, die drei Punkte mit einem ordinären Bogen gemein hat, und folgen diese auf dem Bogen und der Linie in derselben Ordnung nacheinander, so muß der Bogen wenigstens einen Wendepunkt haben. Jeder Undulationspunkt ist Verdichtungspunkt für Wendepunkte. Ein ordinärer Bogen, der keinen Konvexbogen enthält, muß eine überall dichte Menge von Wendepunkten haben und eine überall dichte Menge von Undulationspunkten. Jeder ordinäre Bogen, der mit keiner geraden Linie unendlich viele Punkte gemeinschaftlich hat, muß aus einer endlichen Anzahl oder einer abzählbaren Menge von Konvexbogen und ihrer Verdichtungsstellen bestehen.

In den beiden letzten Abschnitten dieser Abhandlung sind Untersuchungen über die sogenannten Grenzsekanten zur allgemeinen Jordankurve enthalten (eine Grenzsekante in einem Punkt P der Kurve wird als Grenze einer geraden Linie definiert, welche zwei Punkte Q und R verbindet, die auf dem Bogen gegen P von entgegengesetzten Seiten konvergieren); jede Grenzsekante kann mit einem bestimmten Umlaufssinn auf dem Bogen orientiert werden). Hier gilt z. B. folgender Satz: Wenn eine Jordankurve zwei Punkte P und Q

enthält, für welche es, einem bestimmten Umlaufssinn auf dem Bogen entsprechend, orientierte Grenzsekanten gibt, deren Umlaufssinne mit Rücksicht auf einen Punkt O in der Ebene entgegengesetzt sind, so muß der Bogen PQ wenigstens einen Punkt enthalten, der eine Grenzsekante durch O sendet. Insbesondere werden solche Bogen untersucht, welche höchstens eine endliche Anzahl von Grenzsekanten durch denselben Punkt senden, und es wird bewiesen, daß ein solcher Bogen notwendig ordinär ist und überall kontinuierlich varriierende Tangenten hat. Der Schnittpunkt zwischen der Tangente im Punkte P und der Tangente in einem konsekutiven Punkte hat seine Grenzlage immer in P. Die Kurve wird von jeder geraden Linie in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten.

Schließlich wird auf die besondere Bedeutung aufmerksam gemacht, die das Dualitätsprinzip auf diesem Untersuchungsgebiete hat. P. H.

L. Fr. Braude. Über einige Verallgemeinerungen des Begriffs der Mannheimschen Kurve. Diss. Heidelberg 1911, 50 S.

Ist s die Bogenlänge, R der Krümmungshalbmesser und $f(s, R) = 0$ die natürliche Gleichung einer Kurve C, so stellt bekanntlich $f(x, y) = 0$, wo x und y als kartesische Koordinaten gedeutet werden, die Mannheimsche Kurve dar, d. h. den Ort des Krümmungsmittelpunktes für den jeweiligen Berührungspunkt, falls C auf einer Geraden rollt. Der Verf. verallgemeinert zunächst diesen Begriff der Mannheimschen Kurve in der Weise, daß er C nicht auf einer Geraden, sondern auf einer beliebigen Kurve C_1 rollen läßt. Für den Fall, daß C_1 ein Kreis ist, wurde die Frage schon von H. Wieleitner und P. Ernst (F. d. M. 38, 599, 1907) untersucht. Der Verf. diskutiert außer den bekannten Fällen noch die folgenden:

1. Die natürlichen Gleichungen von C und C_1 haben die Form $\varrho = \mu f(s)$ und $R = f(s)$, wo μ eine Konstante bedeutet.
2. C ist ein Kreis, C_1 eine beliebige Kurve.
3. C ist eine natürliche Konchoide von C_1.

Nach einigen Bemerkungen über die allgemeine Mannheimsche Kurve und nach Angabe der Tangenten- und Normalenkonstruktion in einem ihrer Punkte betrachtet der Verf. den Fall 1. Zwei Kurven dieser Art nennt er Kurven proportionaler Krümmung; die Mannheimsche Kurve von C in bezug auf C_1 heißt die Zwischenevolute von C_1, weil sie dadurch entsteht, daß vom Kurvenpunkt aus auf der Normale zum Krümmungsmittelpunkt hin ein bestimmter Bruchteil $\mu\varrho$ des Krümmungshalbmessers abgetragen wird. Die Bedeutung dieser Zwischenevoluten beruht vor allem darauf, daß sie, falls man die Normale zeichnen kann, häufig die einfachste Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes liefern. Als Grenzfall entsteht aus der Zwischenevolute durch eine Ähnlichkeitstransformation die Radiale von C_1. Durch Anwendung der allgemeinen Erörterungen auf spezielle Kurven und Kurvengattungen, wie z. B. die logarithmische Spirale, die Zykloiden, die Kreisevolventen, gelangt der Verf. zu einer großen Zahl teils bekannter, teils neuer Sätze, die hier nicht angeführt werden können.

Eine weitere Verallgemeinerung der Mannheimschen Kurve besteht darin, daß man C auf C_1 abrollen läßt und den Ort des zu dem jeweiligen Be-

rührungspunkt gehörigen Krümmungsmittelpunkts n-ter Ordnung bestimmt. Da die Untersuchung des allgemeinen Falles sehr umständlich wäre, so betrachtet der Verf. spezielle Fälle, so z. B. die Fälle, daß C_1 eine Gerade ist, und daß C und C_1 durch einige spezielle transzendente Kurven ersetzt werden. Endlich werden noch Zusammenhänge zwischen Rollkurven und Fußpunktkurven abgeleitet und daraus Beziehungen zwischen der Mannheimschen Kurve und den Zwischenevoluten gewonnen. Dabei ergeben sich neue Beweise und Erweiterungen von Sätzen, die Steiner, Habich und Bonnet gefunden haben, nebst einigen allgemeinen Sätzen, von denen der folgende erwähnt sei: Jede Kurve kann mit Hülfe ihrer Zwischenevolute auf ∞^1-fache Weise als Rollkurve dargestellt werden.

Die Arbeit ist reich an Einzelresultaten und enthält manche Hinweise auf Wege, die noch zu weiteren Sätzen und Entdeckungen führen können. Lö.

E. Turrière. Sur l'interprétation géométrique, d'après Mannheim, de l'équation intrinsèque d'une courbe plane. Ens. math. **13**, 24-26.

Verf. erläutert den Begriff der Mannheimschen Kurve $y = f(x)$ einer durch ihre natürliche Gleichung gegebenen Kurve $\varrho = f(s)$ und verallgemeinert ihn in derselben Weise wie vor ihm Wieleitner und Ernst. (Vgl. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908, S. 320.) Sk.

H. Wieleitner. Sur quelques généralisations de la Courbe de Mannheim, à propos d'un article de M. Turrière. Ens. math. **13**, 393-394.

Die Note knüpft an den vorstehend angezeigten Artikel von E. Turrière an und macht darauf aufmerksam, daß die dort ausgesprochene Verallgemeinerung der Mannheimschen Kurve nicht neu ist. Der Verf. selbst sowie P. Ernst haben unabhängig voneinander ähnliche Verallgemeinerungen gegeben (vgl. Math.-naturw. Mitt. (2) **9**, 1-9 und Monatsh. f. Math. **18**, 315-316; F. d. M. **38**, 599, 1907). Der Verf. verweist noch auf die Dissertation von L. Braude, in der noch weitergehende Verallgemeinerungen behandelt werden, und gibt einige Resultate daraus an. Ein Bericht über diese Dissertation findet sich vorstehend. Lö.

W. J. Risley and W. E. Macdonald. Envelopes of one-parameter families of plane curves. Annals of Math. (2) **12**, 73-102; Amer. Math. Soc. (2) **17**, 299.

Zweck der Arbeit ist, festzustellen, unter welchen Bedingungen eine von einem Parameter abhängende Kurvenschar eine Enveloppe besitzt. Erschöpfend ist die Diskussion durchgeführt für den Fall, daß die Kurvenschar in der expliziten Form $y = f(x, \alpha)$ gegeben ist, wo $f(x, \alpha)$ eine analytische Funktion der

beiden unabhängigen Variabeln x und α in der Nähe des Punktes (x_0, α_0) und $f_\alpha(x, \alpha) \not\equiv 0$ in dieser Umgebung. Für den Fall, daß die Kurvenschar in der Form $F(x, y, \alpha) = 0$ vorliegt, wird eine hinreichende Bedingung für das Auftreten einer Enveloppe mitgeteilt. Wenn nämlich $F(x, y, \alpha)$ eine in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0, α_0) analytische Funktion der drei unabhängigen Variabeln x, y und α ist, und wenn

(1) $$F(x_0, y_0, \alpha_0) = 0 \text{ und } F_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0,$$

(2) $$\frac{D(F, F_\alpha)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} & \frac{\partial F_\alpha}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ für die angegebene Stelle,}$$

(3) $$F_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0,$$

dann hat die Kurve eine Enveloppe. Ba.

G. Loria. Sur la détermination de la courbure d'une ligne plane considérée comme enveloppe de ses tangentes. Ens. math. **13**, 104-108.

Verf. gibt eine Ableitung für die Formel des Krümmungsradius einer in Plückerschen Koordinaten gegebenen ebenen Kurve, die in Pascals Repertorium fehlt. (d'Ocagne hat diese schon 1891 in S. M. F. Bull. **19**, 26 gegeben.) Grb.

E. Turrière. Remarque relative au calcul du rayon de courbure d'une courbe plane. Ens. math. **13**, 278-279.

Im Falle, daß die Gleichung einer Kurve in der Form $dx = Y(y)\,ds$ gegeben ist, wird der Krümmungsradius $\varrho = 1 : \left|\frac{dY}{dy}\right|$. Sk.

A. C. L. Wilkinson. Curvature referred to moving axes. Journ. Ind. M. S. **3**, 25-26.

1. Man betrachte ein Paar rechtwinkliger Achsen, die gleichförmig um den Ursprung rotieren. Sind (u, v) die Koordinaten eines Punktes in bezug auf die beweglichen Achsen und θ der von dem beweglichen und dem ruhenden Achsensystem gebildete Winkel, so ist die Krümmung im Punkte (u, v) für $u' = \frac{du}{d\theta}$ usw.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{(u' - v)(v'' + 2u' - v) - (u + v')(u'' - 2v' - u)}{\{(u' - v)^2 + (u + v')^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Anwendung: Eine ovalförmige Kurve vom Flächeninhalte Ω besitzt einen Mittelpunkt O, durch den irgendein Durchmesser AB geht. G ist der Schwerpunkt eines der beiden Teile des Ovals, die durch AB gebildet werden. Die Tangente im Punkte G der Ortskurve C ist parallel zu AB, und der Krümmungsradius in diesem Punkte hat den Wert $\frac{\overline{AB}^3}{6\Omega}$. Gd.

A. B. Basset. Singularities of curves and surfaces. Nature 85, 336, 440.

T. J. J'a Browmich. Singularities of curves and surfaces. Nature 85, 336, 440.

Auseinandersetzungen über die Begriffe „singuläre“ und „vielfache“ Punkte, veranlaßt durch die Besprechung von Bassets Buch: „A treatise on the geometry of surfaces“ (1910). Lp.

P. Suchar. Sur les courbes planes qui sont à elles-mêmes leurs polaires réciproques. Nouv. Ann. (4) 11, 433-448.

Bestimmung der Kurven, die sich selbst in der durch einen Kreis vermittelten Korrelation entsprechen, und derer, die aus ihren korrelativen bei einer Drehung um den Mittelpunkt des Kreises hervorgehen, durch Benutzung eines Satzes der Mechanik. B.

K. Lademann. Figuren von konstanter Breite. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 42, 304-306.

„Unter Figuren von konstanter Breite versteht man solche, bei denen der Abstand zweier zueinander parallelen Tangenten für sämtliche Tangentenpaare konstant ist. Es läßt sich nun das folgende interessante Gesetz nachweisen: Der Umfang einer Figur von konstanter Breite b ist gleich dem Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser gleich der Breite b ist.“ Lp.

C. Hoffmann. Lösung zu 365 (L. Braude). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 372.

Welche Kurve ist ihren sämtlichen Parallelkurven kongruent? Die gegebene Antwort ist nicht richtig (vgl. F. d. M. für 1912). Gd.

J. Puzyna. Über Systeme von Kurven mit der Gruppe pseudolinearer Substitutionen. Krakauer Anz. (A) 1911, 371-416.

Es werden Systeme ebener Kurven untersucht, die mit Gruppen G folgender Art verbunden sind. Sei $h(x, y)$ eine absolute Invariante von G, und seien

(A) $x_s = \varphi_s(x, y, h)$, $y_s = \psi_s(x, y, h)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die Fundamentalsubstitutionen von G, so daß h bei der Bildung von G als konstante Größe behandelt werden kann. Im besondern mögen φ_s, ψ_s die lineare Gestalt besitzen: (B) $x_s = A_s x + B_s y$, $y_s = -B_s x + A_s y$, wo die Koeffizienten A_s, B_s nur von h abhängen; dann heißen die Substitutionen und ihre Gruppe pseudolinear.

Es wird von der Aufgabe ausgegangen: Für O als Anfangspunkt sei $g(x, y) = 0$ eine gegebene Kurve. Es soll der Ort (P') der Punkte $P' = (x_1, y_1)$ gesucht werden, sodaß für ϱ als kleinste Entfernung zwischen P und der Kurve die Relation (1) $OP' = \tau\varrho$ $(\tau > 0)$ besteht. Der Ort $(P') = E_{\tau+1}$ wird als ein aus $g = 0$ nach dem Parameter τ abgeleiteter „Stern" bezeichnet. $P = (x, y) = (r, \varphi)$ sei ein Punkt auf der Kurve g, und Pn die Normale der Kurve in P. Ist γ der Winkel OPn, so sind je nach den Werten von γ drei Fälle zu unterscheiden, der elliptische, der hyperbolische und der parabolische.

Besitzt der ganze Wertevorrat von $\sin^2\gamma$ längs g die obere Grenze τ_0^2, und ist $\tau \geqq \tau_0$, so ist die ganze Kurve g fähig, Punkte P' des Sternes $E_{\tau+1}$ zu erzeugen. Wird hingegen $\tau < \tau_0$, so zerfällt g in zwei Klassen von Abschnitten; die einen eignen sich zur Erzeugung von Punkten P', die andern dagegen — die „toten" Abschnitte — vermögen keine reellen Punkte P' zu erzeugen; das letztere kann nur im elliptischen Falle eintreten. Sei (r) ein erzeugender Abschnitt, so entstehen aus (r) in $E_{\tau+1}$ zwei Züge $(R_1), (R_2)$, da sich auf Pn zwei Punkte $P' = R_1, R_2$ vorfinden. Setzt man $OR_1 = l_1$, und nennt ω den Winkel (r, l_1), so wird $\sin\omega = \frac{\sin\gamma}{\tau}$. Die Koordinaten x_1, y_1 der Punkte P' werden explizit aufgestellt. Offenbar ist die Aufsuchung des Ortes $E_{\tau+1}$ eine Verallgemeinerung der Bildung eines Kegelschnitts, von dem gegeben sind ein Brennpunkt mit Leitlinie sowie die numerische Exzentrizität τ.

Wird im besondern als Kurve g eine Gerade genommen, so ist der (elliptische) Stern eine Ellipse. Daraus folgt, daß in diesem Sinne die Ellipse für ihre Nebenachse dieselbe Bedeutung besitzt wie ihre Leitlinie für die Ellipse selbst.

Gehen von irgendeinem Punkte R außerhalb der Kurve g an diese s Normalen von den Längen ν_α, so finden sich in R genau s Werte des Parameters $\tau = \frac{OR}{\nu_\alpha}$. Dies führt zu einer genaueren Untersuchung eines elliptischen Sternes; die Ellipse als Grundkurve dient hier als Muster.

Nunmehr wird die umgekehrte Aufgabe behandelt. Es sei $f(x_1, y_1) = 0$ die Gleichung des Sternes $E_{\tau+1}$ der Grundkurve $g(x, y) = 0$; man bestimme den Ort $Z_{\tau+1}$ der Punkte $P = (x, y)$ so, daß er $f(x_1, y_1) = 0$ als Stern zu erzeugen vermag. Der Ort $Z_{\tau+1}$ erscheint dann als Enveloppe eines Kreises $K_\tau = 0$, dessen Mittelpunkt sich auf $f(x_1, y_1) = 0$ bewegt. Die Gleichung von $Z_{\tau+1}$ ergibt sich durch Elimination. In $Z_{\tau+1}$ gibt es immer zwei Punkte P, P', die einem Punkte R entsprechen.

Der Kreis K durch die Punkte P, P', R enthält auch den Anfangspunkt O. Die weitere Ausführung der Konstruktion von $Z_{\tau+1}$ führt zu dem grundlegenden Satze, daß die Wertfolgen (γ) auf $f(x_1, y_1) = 0$ und $Z_{\tau+1}$ identisch sind, und entsprechend auf $g(x, y) = 0$ und $E_{\tau+1}$. Als Beispiel wird die Ellipse (als Grundkurve) behandelt.

Nunmehr läßt sich die frühere direkte Aufgabe des Sternes $E_{\tau+1}$ auf eine neue Art lösen. Schneiden sich die Normalen $R_1\nu$, $R_2\nu'$ von $E_{\tau+1}$ in S, so

kann der Stern $E_{\tau+1}$ auch als Enveloppe des Kreises mit dem Mittelpunkte S und dem Radius $SR_1 = SR_2$ aufgefaßt werden. Die Gleichung des Kreises ist keine andere als die obige: $K_\tau = 0$, nur daß jetzt (x, y) die Koordinaten der Grundkurve $g(x, y) = 0$ und (x_1, y_1) laufende Koordinaten sind. Somit können bei gegebener Grundkurve $g(\xi, \eta) = 0$ ihre Sterne $E_{\tau+1}$, $Z_{\tau+1}$ nach einheitlicher Methode abgeleitet werden; stellt man die Gleichungen zusammen: (a) $K_\tau(x_1, y_1; x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, so ist $E_{\tau+1}$ Enveloppe des Kreises $K_\tau = 0$; (b) stellt man die Gleichungen $K_\tau(x_1, y_1; x, y) = 0$, $g(x_1, y_1) = 0$ zusammen, so ist $Z_{\tau+1}$ Enveloppe des Kreises $K_\tau = 0$.

Man fasse jetzt (a), resp. (b) als ein allgemeines Integral einer Differentialgleichung $\Phi\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}\right) = 0$, resp. $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ mit einer willkürlichen Konstante x, resp. x_1 auf, so stellt $E_{\tau+1}$, resp. $Z_{\tau+1}$ alle singulären Lösungen von $\Phi = 0$, resp. $\Psi = 0$ dar.

Daraufhin kann der Begriff der Sterne verallgemeinert werden. Wird einer Gleichung $F(x_1, y_1, x, y, \tau) = 0$ eine andere $g(\xi, \eta) = 0$ zugeordnet, so lassen sich zwei Enveloppen bilden, jenachdem man in $g = 0$ die ξ, η durch die x, y oder aber durch die x_1, y_1 ersetzt. Die erste Enveloppe heißt ein Stern $E_{\tau+1}$, die zweite ein Stern $Z_{\tau+1}$ der Grundkurve g.

Im besondern werden jetzt die Sterne $E_{\tau+1}$, $Z_{\tau+1}$ einer und derselben Grundkurve g in ihren gegenseitigen Beziehungen untersucht. Es wird zu dem Behuf ein symbolischer Kalkül eingeführt, indem die Reihe der Operationen, durch die aus g sein $E_{\tau+1}$, resp. $Z_{\tau+1}$ abgeleitet wird, mit (ZE), resp. (EZ), bezeichnet wird. So sind (ZE), (EZ) miteinander vertauschbar, usf. Die wiederholt angewandten Operationen (EZ), (ZE) bestimmen dann die Vielfachheiten der auftretenden Züge. Man kann aber den Algorithmus auch dahin abändern, daß jeder Zug nur einmal entsteht; dann gelangt man zu einem „vollständigen Systeme" einfacher Sterne. Die Überführung der Punkte eines Sternes in die „kongruenten" Punkte eines andern geschieht nun eben durch die im Eingange erwähnten pseudolinearen Substitutionen S, und es existiert der grundlegende Satz, daß das vollständige Sternensystem die unendliche Gruppe H solcher S mit zwei Fundamentalsubstitutionen von der Form $\Sigma = \begin{pmatrix} A_\gamma & B_\gamma \\ B_\gamma & -A_\gamma \end{pmatrix}$, $\Theta = \begin{pmatrix} -A'_\gamma & -B'_\gamma \\ B'_\gamma & -A'_\gamma \end{pmatrix}$ besitzt. Die Koeffizienten $A_\gamma, B_\gamma, A'_\gamma, B'_\gamma$ nebst $\sin\gamma$ sind dann absolute Invarianten eines Sternepaares. Darüber hinaus erweist sich jede algebraische Funktion der veränderlichen Stelle (x, y) von g als absolute Invariante des Sternepaares.

Die Behandlung allgemeiner Sterne auf Grund der singulären Lösungen von Differentialgleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ wird noch weiter verfolgt unter der Annahme, daß die Gleichung $F(x_1, y_1; x, y) = 0$ in beiden Paaren von Variabeln rational und g eine algebraische Grundkurve ist.

Bei geeigneter Verallgemeinerung gelangt man zu einer pseudolinearen Gruppe eines Sternesystems von $2m$ Fundamentalsubstitutionen Σ, das Produkt aller Multiplikatoren der Σ ist konstant. Ist jedoch im besondern die Grundkurve eine logarithmische Spirale (einschließlich Kreis mit Mittelpunkt O, und Gerade durch O), so sind die Σ nicht mehr pseudolinear, sondern wirklich linear, und das Sternesystem besteht aus lauter ähnlichen Figuren mit konstanten Drehungen.

Für $m = 1$ tritt ein interessanter Zusammenhang mit einer Hermiteschen Form hervor. Am Schlusse wird gezeigt, daß die benutzten Substitutionen Berührungstransformationen sind, und zwar der ganzen Ebene, wenn sie für jede Grundkurve g gültig sind; andernfalls beziehen sie sich auf die Elementmannigfaltigkeiten von g.

Die Bezeichnung „Sterne" ist gewählt, weil diese Gebilde nach einem ähnlichen Gesetze konstruiert sind, wie die „Sterne" von Mittag-Leffler (F. d. M. **30**, 364, 1899). My.

E. J. Wilczynski. One-parameter families and nets of plane curves. American M. S. Trans. **12**, 473-510; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 296-297.

Zu jedem eigentlichen ebenen Kurvennetz mit den Parametern u, v läßt sich ein System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen der Form

$$y_{uu} = ay_u + by_v + cy, \quad y_{uv} = a'y_u + b'y_v + c'y, \quad y_{vv} = a''y_u + b''y_v + c''y$$

finden, denen die homogenen Koordinaten irgendeines Netzpunktes genügen. Zwischen den Koeffizienten $a, \ldots, c''$ müssen die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein. Alle projektiven Eigenschaften des Netzes lassen sich durch die Koeffizienten und Variabeln des obigen Systems ausdrücken. Der Verf. untersucht die Invarianten des Systems hinsichtlich einer Laplaceschen Transformation und bringt diese mit den geometrischen Eigenschaften des betrachteten Kurvennetzes in Zusammenhang. Schließlich werden die Eigenschaften der oskulierenden Kegelschnitte der Netzkurven untersucht. Re.

G. D. Valentine. A method of investigating the geometry of families of curves, with examples. Edinb. M. S. Proc. **29**, 17-34.

Die Gleichung $f(\xi, \eta, x, y) = 0$ liefert eine Kurve in der (x, y)-Ebene, wenn ξ und η konstant sind, und eine andere Kurve in der (ξ, η)-Ebene, wenn x und y konstant sind. Je durch die Veränderlichkeit der beiden anderen Größen werden zwei Kurvenfamilien erhalten, und es werden Beziehungen zwischen den beiden Familien ermittelt. Wenn $f(x, y, \xi, \eta)$ die Form hat $\xi x + \eta y - 1$, so ergibt sich die Theorie von Pol und Polare. Die hauptsächlichen Anwendungen betreffen jedoch den Fall, bei welchem $f(\xi, \eta, x, y) = \xi x^n + \eta y^n - 1$, und verschiedene Sätze werden für „Dreiecke" aufgestellt, die durch Kurven $\xi x^n + \eta y^n = 1$ begrenzt sind, und die den Sätzen in der gewöhnlichen ebenen Geometrie entsprechen. Gbs. (Lp.)

P. V. S. Aiyar. Pedals and Envelopes. Journ. Ind. M. S. **3**, 235-237.

8 Sätze über die schiefe Fußpunktkurve und die n-te schiefe Fußpunktkurve einer Kurve. Gd.

D. Morduchaj-Boltovskoy. Über reziproke metrische Sätze. Warschau Univ. 1911, 22 S.

Sätze, welche entstehen durch Deutung der Resultate der Substitution der tangentialen Koordinaten anstatt der Punktkoordinaten in den Formeln

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \text{ und } \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Der zur Evolute duale Begriff — die Orthogonalie. Si.

Weitere Literatur.

C. Cailler. Sur les notions de courbure et sur quelques points de géométrie infinitésimale non-euclidienne. Paris: Fischbacher. 60 S. 4°.

E. Kasner. Conformal and equilong invariants of horn angles. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 393.

E. Kasner. The subdivisions of curvilinear angles. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 517.

S. Lefschetz. On the existence of loci with given singularities. Diss. Clark Univ.; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 61-62.

S. Lefschetz. On some topological properties of plane curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 62.

G. Loria. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fr. Schütte. Zweiter Band: Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 384 S. gr. 8°. Mit 6 Taf.

Referat F. d. M. **41**, 642, 1910.

M. T. Naraniengar. Flexion in Polar Coordinates. Journ. Ind. M. S. **3**, 26-27.

B. Theorie der algebraischen Kurven.

E. Beutel. Algebraische Kurven. II. Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Leipzig: G. J. Göschen. 135 S. kl. 8°. (Sammlung Göschen Nr. 436.)

Verf. hat versucht, einen umfangreichen und nicht ganz leichten Stoff in einem sehr engen Rahmen zu bewältigen. Über die Art, wie er sich dabei mit den in der Natur der Sache begründeten Schwierigkeiten abgefunden hat, kann man sehr verschiedener Meinung sein. Die „Theorie" beschränkt sich meist auf die einfachsten Fälle, indem wegen des allgemeinen Beweises auf die schon vorhandene Literatur verwiesen wird (z. B. Schnittpunktsätze, Unikursalkurven, Auflösung höherer Singularitäten). Manches fehlt ganz, so der Hinweis auf das Euler-Cramersche Paradoxon, das für den Hauptsatz der S. 59 eine nicht zu übergehende Ausnahme feststellt. Anderes ist recht an-

sprechend: so die Entwicklung der verschiedenen Formen der C_3 und C_4 aus den zerfallenden Typen.

Inhalt: 1. Polare und Hessesche Kurve. 2. Das Dualitätsprinzip in der analytischen Geometrie der Ebene. 3. Höhere Singularitäten. 4. Kurven dritter Ordnung. 5. Kurven vierter Ordnung. Sk.

C. Juel. Om simple cykliske Kurver. (Über einfache zyklische Kurven.) Kopenhagen, Vid. Selsk. Skr. (7) **8**, 365-385.

Die Abhandlung ist eine Fortsetzung der Untersuchung, die der Verf. in seinen früheren Arbeiten angestellt hat: „Indledning i Laeren om de grafiske Kurver" und „Om ikke-analytiske Kurver" (F. d. M. **30**, 485, 1899 und **37**, 590, 1906).Die hier untersuchten „zyklischen Kurven" sind solche einfachen Kurven, für die die Maximalzahl von Schnittpunkten mit einem Kreise gleich 4 ist. Von den gefundenen Resultaten über solche Kurven heben wir folgende hervor: Auf jeder ganz im Endlichen liegenden zyklischen Kurve ohne Doppelpunkte gibt es vier Punkte, wo der oskulierende Kreis eine Berührung dritter Ordnung hat. Es gibt im allgemeinen zwei verschiedene Systeme von doppeltberührenden Kreisen; wenn die Kurve die unendlich ferne Gerade berührt, gibt es jedoch nur ein System.

Über die zyklische Kurve zweiter Ordnung werden folgende Sätze dargelegt: Es gibt 2, 1 oder 0 Doppelnormalen, je nachdem die Kurve elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Art ist. Die Ordnung der Evolute ist in den beiden ersteren Fällen 6, im letzteren 3, ihre Klasse ist in dem elliptischen Fall entweder 4 oder 6. In dieser Beziehung besteht also ein wesentlicher Unterschied zwischen der algebraischen und der zyklischen Ellipse. In dem hyperbolischen und parabolischen Fall ist die Klasse der Evolute dagegen immer bzw. 4 und 3, also gerade so wie bei den entsprechenden algebraischen Kurven. Zum Schluß werden durch stereographische Projektion auf eine Kugel einige Sätze abgeleitet. P. H.

P. Nalli. Riduzione di un fascio di curve piane di genere uno, corrispondente a sè stesso in una trasformazione birazionale involutoria del piano. Palermo Rend. **31**, 92-108.

Entweder entspricht jede Büschelkurve sich selbst, oder einer anderen. Rationale und elliptische Involutionen. Beziehung auf Doppelebene (vgl. Pascal Repert. 2. Aufl. **2**, 367-368). B.

R. Torelli. Sulle curve di genere due contenenti una involuzione ellittica. Napoli Rend. (3) **17**, 412-420.

In diesem Aufsatz wird eine neue Anwendung der Theorie der Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve zum Beweis des folgenden Satzes von Picard gemacht: Besitzt eine Kurve C vom Geschlecht 2 eine elliptische Involution der Ordnung I_ν (die man nicht zerfallend annehmen kann),

so besitzt sie auch eine zweite I'_ν. Dann werden einige Beziehungen zwischen den I_ν, I'_ν aufgestellt, aus denen die Existenz zweier ∞^1-Systeme von einfach-unendlich irreduzibeln Reihen von der Ordnung 2 und dem Index ν folgt, die mehrere bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Zum Schluß werden dieselben Methoden angewandt, um den folgenden Satz zu beweisen, welchen man als besonderen Fall eines Picard-Poincaréschen Satzes ansehen kann: „Besitzt eine Kurve C vom Geschlecht 3 eine Involution von der Ordnung und dem Geschlecht 2, so enthält sie auch eine elliptische Involution." La.

L. Orlando. Quelques observations sur les groupes d'homographies dans un plan. Ann. Ac. Polyt. Porto **6**, 65-71.

„Wir stellen uns hier das bescheidene Ziel, einen unter eine allgemeinere, den Geometern wohlbekannte Klassifikation fallenden Satz in einfacher und elementarer Weise zu beweisen: Die endlichen Gruppen ebener Homographien von einer Ordnung $n > 3$ gehören einer der beiden Klassen an: A. Gruppen, die einen Punkt ungeändert lassen (und eine durch diesen Punkt nicht gehende Gerade). B. Gruppen, die ein Dreieck ungeändert lassen, dessen Ecken sie transitiv permutieren". Lp.

H. Willigens. Sur les polynomes

$$U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}\, m!\, n!} \frac{\partial^{m+n}(x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}.$$

Nouv. Ann. (4) **11**, 97-116.

Es handelt sich um die Untersuchung der sogenannten Hermiteschen Kurven $U_{m,n} = 0$, auf die Hermite bei Gelegenheit einer Reihenentwicklung stieß (C. R. **50**, 1865), deren Untersuchung von Appell begonnen (Arch. d. Math u. Phys. (3) **4**, 20; F. d. M. **33**, 610, 1902) und von W. Tramm in seiner Dissertation fortgeführt wurde (Geometrische Diskussion des Hermiteschen Polynoms $U_{m,n}$. Zürich 1908). Die vorliegende Arbeit dehnt die Ergebnisse von Hermite und Tramm weiter aus.

Der Verf. beweist zunächst, daß, wenn m oder n gleich Null ist, die Kurve $U_{m,n} = 0$ sich aus einer gewissen Anzahl von Ellipsen zusammensetzt. Da $U_{m,1} = (m+1) y U_{m,0}$ ist, so ergibt sich hieraus auch die Gestalt der Kurven $U_{m,1} = 0$. Um den allgemeinen Verlauf der Kurve $U_{m,n} = 0$ zu studieren, wird zunächst ein Hülfssatz aus der Theorie der Gleichungen abgeleitet und mit seiner Hülfe die Funktion y untersucht, die durch $U_{m,n} = 0$ definiert ist. Es wird gezeigt, daß die Riemannsche Fläche der Funktion in der Umgebung von $x = -1$ und $y = 0$ eine Reihe einfacher Verzweigungspunkte besitzt. Daraus ergeben sich mehrere allgemeine Eigenschaften der Kurven $U_{m,n} = 0$, z. B. daß sie mit einer Geraden $m + n$ Schnittpunkte haben können, daß sie aus einer Reihe von Zweigen bestehen, die den Ursprung und einander umschlingen, und daß sie nur in $x = 0$, $y = \pm 1$; $x = \pm 1$, $y = 0$ reelle mehr-

fache Punkte haben können. Schließlich wird als Beispiel die Kurve $U_{3,4} = 0$ untersucht; es werden die allgemeinen Ergebnisse an ihr bestätigt, und es wird ihre Gestalt festgestellt. Lö.

G. Magnel. Questions relatives aux polaires réciproques. Nieuw Archief (2) **9**, 322-337.

Die Arbeit knüpft an Untersuchungen von C. van Aller an. (Nieuw Archief (2) 8, 116-122 und **9**, 116-125; vgl. F. d. M. **38**, 657, 1907; **41**, 654, 1910). Es seien A_k und B_k zwei Kegelschnitte (oder Flächen zweiter Ordnung); A_{k-1} und B_{k-1} die reziproken Polaren von A_k bezüglich B_k und von B_k bezüglich A_k; A_{k-2} die reziproke Polare von A_{k-1} bezüglich B_{k-1}; usw. Es werden dann zunächst die Beziehungen (als Funktion von k) aufgestellt, die zwischen A_k und B_k bestehen müssen, damit A_1 und B_1 antipolar seien; d. h. daß $A_1 \equiv A_0$. Ferner werden als Funktion von k die zwischen A_k und B_k bestehenden Relationen abgeleitet, damit $A_0 \equiv B_0$. Und endlich wird noch die Lösung eines allgemeineren Problems angegeben, das aus den beiden ersten hervorgeht. Ba.

Weitere Literatur.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française. Tome III. Vol. 3: Géométrie algébrique plane. Fascicule 1: Les coniques, par F. Dingeldey et E. Fabry. Leipzig: B. G. Teubner; Paris: Gauthier-Villars. S. 1—160.

H. T. Burgess. Circular numbers for a plane curve. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 297-298.

H. T. Burgess. Rational anharmonic curves upon a quadric. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 298.

J. Maclay. Parabolic curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 526.

U. G. Mitchell. Geometry and the collineation groups of the finite projective plane PG (2, 2^2). Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 521-522.

P. Pecl. Anwendung der Newton-Puiseuxschen Methode in der Geometrie. Progr. Gymn. Königl. Weinberge. 40 S. (Böhmisch).

C. Gerade Linien und Kegelschnitte.

A. Barbieri. Sui sistemi di due equazioni di 2º grado complete a due incognite risolubili con equazioni di 2º grado. Atti Soc. dei Nat. e Mat. Modena (4) **13**, 38-52.

Die Lösungen zweier allgemeinen Gleichungen zweiten Grades in x und y (durch Kegelschnitte dargestellt) werden als Wurzeln linearer oder quadratischer Gleichungen in den folgenden Fällen gefunden: 1. Die beiden Kegel-

schnitte sind entartet. 2. Nur einer der beiden Kegelschnitte ist entartet. 3. Die Kegelschnitte haben denselben Mittelpunkt. 4. Die Kegelschnitte sind Parabeln mit parallelen Achsen. (Rev. sem. 20_2, 86.) Lp.

L. Sire. Sur le rayon de courbure d'une conique. Revue de Math. spéc. **22**, 361-362, 385-387.

Spezielle Sätze von der Art des folgenden: Der Krümmungsradius in einer Ecke eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecks ist proportional der dritten Potenz der Höhe, die zu der entsprechenden Seite des bezüglich eines Kreises reziproken Dreiecks gehört. Sk.

T. Chollet. Sur les centres de courbure aux points de rencontre de deux coniques homofocales. Revue de Math. spéc. **22**, 337-340.

Geometrische Deutung der Ergebnisse leichter Rechnungen; z. B.: Die im Titel genannten Krümmungsmittelpunkte sind konjugiert bezüglich beider Kegelschnitte. Sk.

A. Schmid u. G. Kober. Lösung zu 330 (G. Kober). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 198-199.

Die zweite Gerade $L_1' L_2'$, auf welcher die Endlote einer Tangente eines beliebigen Kegelschnittes die vom Berührungspunkte P auf die Achsen gefällten Lote schneiden, ist dasjenige Lot des Fahrstrahles OP, welches die Kurvennormale PN im Bildpunkte des Krümmungsmittelpunktes schneidet, in dieser Eigenschaft nach Steiner (J. für Math. **30**), doch auch infolge der hier angegebenen Konstruktion die Polare von P in dem Polarsysteme des Direktorkreises. Ba.

A. Schmid. Lösung zu 331 (G. Kober). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 199.

Derjenige Durchmesser eines Kegelschnittes, der die Normale eines seiner Punkte P im Krümmungsmittelpunkte schneidet, enthält den Punkt L_i, in welchem das auf der Tangente PT_i in ihrer Spur T_i errichtete Lot das vom Berührungspunkte P auf die Achse OT_i gefällte Lot schneidet. Die Konstruktion ist allgemein; sie gilt für jeden Kegelschnitt ohne jede Modifikation. Ba.

V. Jamet. Sur le rayon de courbure des coniques. Revue de Math. spéc. **21**, 212-213.

Diejenigen Kurven, für welche der Krümmungsmittelpunkt eines jeden Kurvenpunktes P bezüglich dieses Punktes symmetrisch gelegen ist in bezug auf

den vierten harmonischen Punkt zu dem Punkte P und den Schnittpunkten der Normale in P mit einem festen Kreis, sind Kegelschnitte, die den festen Kreis als orthoptischen Ort besitzen. Sk.

M. M. O. Au sujet d'un article de M. Valiron. Nouv. Ann. (4) **11**, 524.

Hinweis, daß eine von Valiron angegebene Konstruktion des Krümmungskreises in einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts schon früher von Mannheim und noch früher von Schellbach veröffentlicht worden ist.
Fa.

L. Quantin de la Roëre. Sur les coniques et les quadriques homofocales. Nouv. Ann. (4) **11**, 514-524.

Beweis folgender Sätze: 1. Die Evolute eines Kegelschnittes ist die Enveloppe seiner reziproken Polaren, genommen bezüglich der konfokalen Kegelschnitte zu dem gegebenen. (Auch die Umkehrung gilt.) — 2. Die Hauptkrümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche zweiter Ordnung ist die Enveloppe der reziproken Polaren dieser Fläche zweiter Ordnung bezüglich aller zu ihr konfokalen. Ba.

R. P. Paranjpye. The foci of the general conic. Journ. Ind. M. S. **3**, 77-78.

Sind ξ, η die Koordinaten des Brennpunkts des Kegelschnitts $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, so sind die Brennpunkte durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{(a\xi + h\eta + g)(h\xi + b\eta + f)}{h} = \frac{(a\xi + h\eta + g)^2 - (h\xi + b\eta + f)^2}{a - b}$$
$$= a\xi^2 + 2h\xi\eta + b\eta^2 + 2g\xi + 2f\eta + c.$$
Gd.

G. Kober. O. Degel. Lösung zu 354 (R. Mehmke). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 286-287, 365-366.

In einem ebenen Polarsystem sei p der Pol einer beliebigen Geraden G. Die Verbindungsgeraden der Ecken a, b, c eines beliebigen Dreiecks mit p mögen G in den Punkten a', b', c' schneiden. Ferner seien a'', b'', c'' die Pole der Seiten bc, ca, ab des Dreiecks. Dann gehen die Geraden $a'a'', b'b'', c'c''$ durch einen und denselben Punkt. Gd.

H. Pfaff. Über Fokalkurven. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 211-228.

Eine Kegelschnittschar sei durch die Bedingungen bestimmt, daß die Kegelschnitte der Schar drei feste Geraden berühren, und daß der Ort der Mittel-

punkte der Kegelschnitte a) eine Gerade, b) ein Kegelschnitt ist, für den die drei Tangenten ein Polardreieck bilden. Der Ort der Brennpunkte dieser Kegelschnitte erweist sich im Falle a) als eine Kurve dritter Ordnung; diese zerfällt in eine Gerade und in einen Kreis, wenn die gegebene Gerade die unendlich ferne Gerade, oder wenn sie eine der sechs Winkelhalbierenden des Fundamentaldreiecks ist. Der Fall b) wird für die besondere Annahme untersucht, daß der gegebene Kegelschnitt die gleichseitige Hyperbel ist, welche durch die In- und Ankreismittelpunkte des durch die drei gegebenen Geraden gebildeten Dreiecks bestimmt wird. Unter diesen Bedingungen ergibt sich, daß der gesuchte Ort der Brennpunkte, der im allgemeinen Falle b) eine Kurve sechster Ordnung ist, in zwei Kurven dritter Ordnung zerfällt. Die Achsen aller Kegelschnitte der Schar sind den Asymptoten der genannten gleichseitigen Hyperbel parallel. Die nähere Betrachtung der gefundenen Kurven dritter Ordnung führt auf einen Kurvenbüschel dritter Ordnung, dessen Basispunkte die drei Ecken eines Dreiecks, die vier Mittelpunkte der vier Berührungskreise und die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen sind. Über die Kurven dieses Büschels werden mehrere hübsche Sätze abgeleitet. In einem Anhange werden diese Sätze noch verallgemeinert. Lp.

R. E. Allardice. On the envelope of the directrices of a system of similar conics through three points. Edinb. M. S. Proc. **29**, 35-38; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 446.

Eine Fortsetzung von Aufsätzen über gewisse Örter und Hüllkurven, die mit einem System ähnlicher Kegelschnitte durch drei Punkte zusammenhängen (F. d. M. **33**, 623; **34**, 635; **40**, 637). Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit der Hüllkurve der Leitlinien. Sie ist eine Kurve vierter Klasse mit der Geraden im Unendlichen als der einzigen Doppeltangente; die Kreispunkte sind darauf die Berührungspunkte. Gbs. (Lp.)

K. J. Sanjána. Note on Professor Allardice's paper „On the locus of the foci of a system of similar conics through three points". Edinb. M. S. Proc. **29**, 39-40.

Gibt eine andere Methode zur Ermittelung der grundlegenden Gleichung der angeführten Arbeit. (F. d. M. **40**, 637, 1909.) Gbs. (Lp.)

C. E. Youngman. Solutions of questions 15388, 16593, 16669. Ed. Times (3) **19**, 54-55.

15388 (von H. Bateman): S, S' und C sind die beiden Brennpunkte und der Mittelpunkt eines festen Kegelschnittes, der vier Geraden berührt. T, T' und O sind die Brennpunkte und der Mittelpunkt eines variablen Kegelschnittes, der jene vier Geraden berührt. Dann stehen $ST \cdot ST'$, $S'T \cdot S'T'$ und CO zu einander in konstanten Verhältnissen. — 16593 (von S. N. Aiyar): Jeder Inkegelschnitt eines Dreieckes geht mindestens durch drei Paare reeller

Punkte, die in bezug auf das Dreieck isogonal konjugiert sind, nie aber durch mehr als durch vier Paare. Konstruktion dieser Punktepaare, besonders für den Inkreis. 16 669 (von C. E. M'Vicker): Sind X, Y die Brennpunkte eines variablen Kegelschnittes, der vier gegebene Geraden berührt, F der Brennpunkt der Parabel des Systems, so ist $FX \cdot TY$ konstant. Lp.

S. N. Aiyar. Question 16 941. Ed. Times (2) **20**, 73-74.

Die Hülfskreise (d. h. Kreise über der Brennpunktsachse als Durchmesser) der Kegelschnitte, welche durch die Ecken eines Dreiecks gehen und den Höhenschnitt oder den Inkreismittelpunkt oder einen Ankreismittelpunkt zum Brennpunkt haben, berühren den Umkreis des Dreiecks. Beweis von W. F. Beard, der die Bemerkung hinzufügt, es gebe 20 solcher Kegelschnitte. Lp.

E. N. Barisien. Quistione 776. Periodico di Mat. (3) **8**, 312.

Der Ort der Punkte, für welche die Summe der sechsten Potenzen der Abstände von den vier Ecken eines Quadrates konstant ist, besteht aus drei Kreisen, von denen zwei immer imaginär sind. Die Bedingung für die Realität des dritten zu finden. — Lösung von A. L. Csada. Ref. bemerkt, daß die allgemeine Frage bei einem beliebigen regelmäßigen n-Eck für die Summe der $2p$-ten Potenzen, wenn $n > p$, eine entsprechende Lösung hat, daß man aber besser von $2p$ Kreisen (im vorliegenden Fall 6) reden kann, von denen höchstens einer reell ist. Lp.

W. Rottsieper. Die geometrische Deutung der Ausdrücke

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \text{ und } \varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1.$$

Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 24-27.

Deutung dieser Ausdrücke als „allgemeine Potenz" (numerische oder bezogene Potenz). Lp.

P. J. Harding. Elliptic trammels and Fagnano points. Math. Gazette **6**, 68-78, 117-124.

Fagnanosche Punkte eines Ellipsenquadranten sind solche Punkte, deren Normalen vom Zentrum gleiche Abstände besitzen. Diese Punkte sind in den Lehrbüchern über die Anwendungen elliptischer Funktionen, auch in Lehrbüchern der Integralrechnung häufig untersucht worden (z. B. J. Bertrand, Traité de calcul différentiel et intégral **2**, 380). „Aber fast alle diese Autoren stellen die Frage unter demselben Gesichtspunkt und befassen sich mit Längen von Bogen und mit Integralen, die auf elementare Weise nicht ausgewertet werden können. Hieraus dürfte die Ansicht entstanden sein, daß von jeder mit solchen Punkten zusammenhängenden Arbeit gewisse Schwierigkeiten

untrennbar sind, und daß sie außerhalb des Rahmens der elementaren Geometrie liegen. Der Zweck dieses Artikels ist: zu zeigen, daß dies durchaus nicht der Fall ist, sondern daß beim Fortlassen der Bogenlängen und der Integration eine ganz einfache Geometrie alles Erforderliche ist, wenn man solche Punkte erhalten und ihre elementaren Eigenschaften herleiten will". Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: Ellipsenzirkel. Augenblickliches Rotationszentrum. Änderungen in dem Fagnano-Abstande. Zirkeldreiecke. Zirkelvierecke. Fagnanosches Zirkelviereck. Konstruktionen für Fagnanosche Punkte. Eigenschaften eines Fagnanoschen Punktepaares. Tangenten in Fagnanoschen Punkten. Eigenschaften eines Fagnanoschen Punktepaares in Abhängigkeit von dem exzentrischen Winkel. Parallelen und Parallelogramme, die aus Fagnanoschen Punkten hervorgehen. Krümmung in Fagnanoschen Punkten. Fagnanosche Doppelpunkte auf einer Ellipsenfamilie. Kurze Beweise wohlbekannter Formeln. Lp.

D. G. Taylor. End-to-end focal chords of an ellipse. Edinb. M. S. Proc. **29**, 83-89.

Wenn man in einer Ellipse ein System von Sehnen so zieht, daß sie abwechselnd durch die Brennpunkte S und S' gehen, also

$$P_0SP_1, P_1S'P_2, \ldots, P_{2r}SP_{2r+1}, P_{2r+1}S'P_{2r+2}, \ldots,$$

wo P_0 ein beliebiger Punkt auf der Ellipse sein kann, so schneiden sich die Tangenten in P_0 und P_{2r+1} auf einer zur großen Achse senkrechten Geraden, wie man auch die Lage von P_0 wählt; die Tangenten in P_0 und P_{2r} dagegen schneiden sich auf einer Ellipse. Eine einfache Beziehung besteht zwischen dem exzentrischen Winkel des Punktes P_r und den Winkeln, die SP_r und $S'P_r$ mit der großen Achse bilden. Gbs. (Lp.)

E. N. Barisien. Quistione 785. Periodico di Mat. (3) **8**, 313-315.

Bei allen einer Ellipse von den Halbachsen a und b eingeschriebenen Dreiecken größten Inhaltes hat das Fußpunktendreieck des Lemoineschen Punktes den konstanten Inhalt $\frac{3a^3b^3\sqrt{3}}{4(a^2+b^2)^2}$. — Zwei Beweise von Gatti.

Lp.

W. Gallatly. In-conics. Journ. Ind. M. S. **3**, 150-151.

Eigenschaften der einem Dreieck einbeschriebenen Ellipse. Gd.

W. Gaedecke. Lösung zu 341 (E. N. Barisien). Arch. d. Math. und Phys. (3) **18**, 277-280.

In jedem Punkte M einer Ellipse betrachte man diejenige Parabel P, welche die Achsen dieser Ellipse, die Tangente und die Normale des Punktes M

berührt. Die Flächeninhalte der vom Scheitel und vom Brennpunkte F durchlaufenen Kurven verhalten sich wie 3 : 8. Gd.

L. Klug u. C. Hoffmann. Lösung zu 342 (G. Kober). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 280-282.

Synthetischer und analytischer Beweis des Satzes: „Die Fußpunkte und der Schnittpunkt von zwei Normalen eines Kegelschnitts liegen mit seinem Mittelpunkte und den unendlich fernen Achsenpunkten in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der drei Geraden ist, auf denen die Projektionsstrahlen der beiden Punkte des Grundkegelschnittes die Achsen und einander schneiden. Gd.

W. Gaedecke. Lösung zu 340 (E. N. Barisien). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 201.

Ort der Punkte, die a) von einer Ellipse und einem ihrer Brennpunkte, b) von einer Parabel und ihrem Brennpunkte gleichen Abstand haben. Ba.

I. Wodetzky. Sulle catacaustiche della parabola per raggi paralleli. (Estratto di una lettera al prof. G. Loria.) Periodico di Mat. (3) 8, 309-311.

Es sei β der Winkel der einfallenden Strahlen mit der Hauptachse der Parabel; dann gilt der Satz: Alle Katakaustiken der Parabel sind homothetische Orthogeniden (Sinusspiralen). Ihre Dimensionen ändern sich proportional mit $\sin\beta$. Die Ordinatenachse geht durch den Scheitel der Parabel und bildet den Winkel β mit der Verlängerung der einfallenden Strahlen. Die Abszissenachse geht durch den Brennpunkt der Parabel, der immer ein isolierter Punkt für die Katakaustik ist. Lp.

W. Gaedecke. Lösung zu 346 (C. Hoffmann). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 283-285.

Die Fläche zwischen einer Parabel und dem geometrischen Ort der Mitte der Parabelsehnen von gleicher Länge ist gleich dem Halbkreis über dieser Sehne als Durchmesser, während der Schwerpunkt dieser Fläche ins Unendliche fällt. Gd.

J. Piglowski. Note sur le mouvement des projectiles. Revue de Math. spéc. 22, 341.

Geometrische Konstruktion der Leitlinie und des Brennpunktes der Wurfparabel. Sk.

P. Poyet. Régions définies par une hyperbole. Ens. math. **13**, 208-215.

In der Note wird die Theorie der Hyperbel entwickelt, ohne von der Anschauung Gebrauch zu machen, unter alleiniger Benutzung von Sätzen, die sich auf die zweite Gruppe der Hilbertschen Axiome beziehen.

Ba.

G. Majcen. Une construction de l'hyperbole comme lieu de points et comme enveloppe. Ens. math. **13**, 204-207.

Von der Hyperbel seien die Achsen $2a$ und $2b$ gegeben. Man trage auf der reellen Achse die Stücke $OM = ON = b$ ab und beschreibe um O die beiden Kreise k und k' mit den Radien a und $\frac{b^2}{a}$. Eine Gerade durch O treffe diese Kreise in T_1, bzw. T_2. Wenn man die Geraden T_1M und T_2N zieht und auf der ersten in T_1 das Lot s errichtet, so schneiden sich die Geraden T_2N und s in einem Punkte P der Hyperbel. Die Verbindungslinie des Fußpunktes T des Lotes von T_1 auf die reelle Achse mit dem Punkte P liefert die Tangente t der Hyperbel im Punkte P.

Ba.

G. Tarry. Note sur les angles hyperboliques. Assoc. Franç. Toulouse **39**, 21-32.

„Ausdehnung der Definition des hyperbolischen Winkels auf den Fall, bei welchem zwei Halbgeraden, die durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel gehen, beliebige Richtungen haben in bezug auf die Richtung der als Anfang genommenen Querachse. Maß eines hyperbolischen Winkels, wenn man die Richtungen seiner Schenkel sowie die Anfangsrichtung kennt. Elementarer geometrischer Beweis der bekannten Formeln, die den Sinus und den Kosinus der Summe und der Differenz zweier hyperbolischen Winkel geben, mittels des Sinus und des Kosinus dieser beiden Winkel. Anwendung auf einige neue Lehrsätze: Wenn man einen hyperbolischen Winkel um einen festen Punkt als Scheitel dreht, so schneiden seine Schenkel auf einer festen Transversale zwei homographische Punktreihen aus, die immer dieselben reellen Doppelelemente haben, unabhängig von der Größe dieser Winkel. Der entsprechende Satz für den Kreiswinkel ist von Chasles als singulär bezeichnet worden. Jeder einem Hyperbelsegment eingeschriebene hyperbolische Winkel hat die Hälfte des zugehörigen Winkels am Zentrum als Maß. Dies ist die Ausdehnung der Winkeleigenschaft der Kreislinie auf die gleichseitige Hyperbel. Bei jeder Hyperbel umhüllen die Sehnen der Hyperbelsegmente gleicher Fläche eine zweite Hyperbel, welche dieselben Asymptoten, d. h. im Unendlichen mit der ersten einen doppelten Kontakt hat. Wenn man die Ellipse als die orthogonale Projektion eines Kreises ansieht, so erkennt man sofort, daß für jede Ellipse der entsprechende Satz besteht."

Zur Erläuterung dieser Selbstanzeige des Verf. in den „Résumés des travaux" fügen wir hinzu: Sind A und B zwei Punkte der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, so wird der hyperbolische Winkel AOB gemessen durch den doppelten Inhalt des Sektors AOB.

Lp.

G. Eggers. Über gewisse mit den Kegelschnitten zusammenhängende ebene Kurven höherer Ordnung. Diss. Halle. 63 S.

Im Anschluß an eine Arbeit von Rolle „Über einige von den Kegelschnitten abgeleitete Kurven höheren Grades" (Progr., Ilmenau, 1909) werden Kurven nach bekannter Methode genauer diskutiert, die sich folgendermaßen von den drei Kegelschnitten ableiten lassen: Von einem Scheitel S der Kegelschnitte wird ein Strahl ϱ_K gezogen, der die zu S gehörige Fußpunktkurve in N schneidet, so daß $SN = \varrho_F$ ist. Die zu diskutierende Kurvengleichung lautet $\varrho = \varrho_K + \varepsilon\varrho_F$, wo ε einen beliebigen Faktor darstellt. Die Untersuchung wird im Fall der Parabel für beliebiges ε, im Fall der Ellipse und Hyperbel für $\varepsilon = \pm 1$ durchgeführt. Im zweiten Abschnitt wird der Scheitel durch den Mittelpunkt ersetzt. Der mit den vorhergehenden nur in losem Zusammenhang stehende dritte Abschnitt betrachtet Kurven, deren Radiusvektor mittlere Proportionale zwischen Strahlenabschnitten von bekannten Kurven ist. Die Strahlenabschnitte sind einerseits der Radiusvektor der Ellipse, bzw. Hyperbel vom Mittelpunkt aus und der Hauptkreisradius, andrerseits der Radiusvektor der Ellipse, bzw. Hyperbel vom Brennpunkt aus und das Stück dieses Strahles zwischen den Koordinatenachsen. Bemerkenswerte Resultate liefert die Arbeit ebensowenig wie die von Rolle. Gd.

C. Alasia. Due luoghi geometrici. Rivista fis., mat. e sc. nat. **24**, 406-410.

Auflösung von zwei einfachen analytisch-geometrischen Problemen. Vi.

Weitere Literatur.

Agrégation des sciences mathématiques. (Concours de 1911.) Nouv. Ann. (4) **11**, 358-376.

Aufgaben über Kreise, die eine Ellipse doppelt berühren. Sk.

E. Bonsdorff. Some applications of the theorems of M. Stewart on conic sections. Ann. Ac. Sc. Fennicae (A) **2**, Nr. 7, 9 S.

Eckhardt. Die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 139-148.

Als Schüleraufgabe behandelt. Lp.

J. Hanuš. Über einige geometrische Örter von Kreismittelpunkten. Progr. Realsch. Prag VII. 26 S. (Böhmisch.)

C. Hofmann. Allgemeine Normalengleichung der Kegelschnitte. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 52-53.

F. Pernot. Théorie des foyers dans les sections coniques. An. Soc. cient. Argent. **71**, 49-63.

G. Popesco. Einige Anwendungen von Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittnetzen. Gazeta Mat. Bukarest **16**, 325-331.

F. Thaer. Analytische Beiträge zur Lehre vom Kegelschnittsystem $(3p, 1, 1)$. Diss. Gießen. 28 S.

D. Andere spezielle Kurven.

K. Wolletz. Die Berührungskurve für eine Schar konfokaler Kegelschnitte. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 521-529.

Der Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die von einem gegebenen Punkte an alle Kegelschnitte einer konfokalen Schar gelegt werden können, ist eine zirkulare kubische Kurve mit Doppelpunkt in dem gegebenen Punkte; die Tangenten der beiden in ihm sich schneidenden Züge sind senkrecht zueinander. In dem ersten Teile wird die Untersuchung analytisch geführt, in dem zweiten wird ein einfaches Verfahren zur Konstruktion der Kurve entwickelt und damit der Weg zu einer geometrischen Ableitung einiger ihrer wesentlichen Eigenschaften gewiesen. Lp.

K. Zahradnik. Zur Theorie der Fokale. Prag. Ber. 1911.

Es werden die Bedingungen dafür angegeben, daß sechs Punkte einer zirkularen Kubik auf einem Kegelschnitt, daß vier Punkte auf einem Kreise liegen. Durch einen Punkt der Kurve kann man drei Kreise legen, die mit der Kurve je drei zusammenfallende Schnittpunkte haben, d. h. Krümmungskreise für die Kurve sind. Ihre Berührungspunkte bilden das Oskulationsdreieck; der Ort der Schwerpunkte aller dieser Dreiecke ist eine zur ersten kongruente Kurve. Sodann werden ganz analog drei- (oder vier- oder fünf-)punktig berührende Kegelschnitte betrachtet, die durch drei (zwei oder einen) festen Punkt hindurchgehen. Sk.

M. T. Naraniengar. On the locus of points at which opposite sides of a quadrilateral subtend equal or supplementary angles. Journ. Ind. M. S. **3**, 132-140.

Zur Bestimmung des Ortes wird das von den Nebenecken A, B, C des gegebenen Vierecks $PQRS$ gebildete Dreieck als Koordinatendreieck zugrunde gelegt. Der Ort ist eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, die dem gegebenen Viereck umschrieben ist und durch B, C und durch den Fußpunkt des von A auf BC gefällten Lotes geht. Diese Kurve wird näher diskutiert, im besonderen für zwei Fälle. Im ersten Fall sind die Punkte P, Q, R, S die Zentren des Inkreises oder der Ankreise des Koordinatendreiecks, im zweiten Falle ist das Viereck $PQRS$ ein Parallelogramm. Es werden die Inversionszentren, die Fokal-Parabeln und die Brennpunkte dieser Kubiken bestimmt. Gd.

R. Bouvaist. Sur un faisceau de strophoïdes. Nouv. Ann. (4) **11**, 551-558.

Die zirkularen Kurven dritter Ordnung, die einen gegebenen Punkt O als Doppelpunkt besitzen und durch drei Punkte A, B, C gehen, sind bekanntlich die Inversen von Kegelschnitten, die durch O und durch die drei Punkte D, E, F gehen, die den Punkten A, B, C in der Inversion vom Punkte O aus entsprechen. Ist O der Höhenschnittpunkt des Dreiecks DEF, so sind die betrachteten Ku-

biken Strophoiden. Für diesen Fall ist O der Mittelpunkt eines der Kreise, die die Seiten des Dreiecks ABC berühren. Dieser Büschel von Strophoiden wird näher betrachtet, im besonderen werden mehrere Eigenschaften desselben in Verbindung mit einem durch den singulären Brennpunkt gehenden Kreis abgeleitet. Gd.

F. G. Teixeira. Sobre una nueva propiedad de las cisoides y una generalización de estas curvas. Rev. Soc. Mat. Esp. **1**, 156-162.

Man nehme auf der positiven x-Achse drei feste Punkte P, A und B an, ziehe durch P und B beliebige Geraden. Auf der ersten Geraden wähle man einen Punkt D beliebig und bestimme auf der zweiten Geraden den Punkt K derart, daß $\overline{BK}^3 = \overline{OP}^2 \cdot PD$ ist. Gesucht wird der geometrische Ort des Schnittpunktes von OK und AD, wenn D sich auf der ersten Geraden bewegt. Es ergibt sich eine Unikursalkurve, die im besonderen Falle eine Zissoide wird. Op.

C. Hoffmann. Die Begleitkurve der Zissoide. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **42**, 405-418.

Über die „Begleitkurve" $\mathfrak{B}$ der Zissoide $\mathfrak{C}$ vergleiche man Loria, Spezielle ebene Kurven **1**, 38.

„Hier werden einige Eigenschaften der Kurve $\mathfrak{B}$, die gewiß weniger zahlreich sind als diejenigen von $\mathfrak{C}$, zusammengestellt; dieselben sind teilweise Spezialisierungen der für alle Zirkularkurven dritter Ordnung geltenden Sätze. — Wenn es auch wahrscheinlich ist, daß da und dort, in Aufgabensammlungen u. dergl., manches schon gefunden wurde, so dürfte diese Zusammenstellung besonders zu Übungszwecken für den Unterricht in analytischer Geometrie und höherer Analysis nicht nutzlos sein."

Der erste Teil behandelt die gerade, der zweite die schiefe Begleitkurve. Lp.

Morley. Question 12 344. Ed. Times (2) **19**, 84-85.

Wenn die Kurve $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ zweiteilig ist, so ist der Flächeninhalt des Ovals nach der Weierstraßschen Bezeichnung $\frac{2}{5}(3g_3\omega_1 - 2g_2\eta_1)$. Beweis von D. Edwardes. Lp.

W. P. Milne. The degenerate apolar locus of two apolar triads of points on a conic. Messenger (2) **40**, 150-151.

Eigenschaften zweier apolaren Tripel von Punkten auf einem Kegelschnitt als Ergänzung zu denen, die W. Fr. Meyer in seinem Buche „Apolarität und rationale Kurven" (F. d. M. **15**, 510, 1883) und C. F. Russell in der Abhandlung „On the geometrical interpretation of apolar binary forms" (F. d. M. **37**, 121, 1906) gegeben haben. Lp.

F. G. Teixeira. Note on Professor Naraniengar's paper in Edinb. M. S. Proc. 28. Edinb. M. S. Proc. **29**, 75-77.

Der angeführte Aufsatz ist F. d. M. **41**, 664, 1910 angezeigt. Für verschiedene Eigenschaften werden historische Hinweise gegeben.

Gbs. (Lp.)

W. P. Milne. A property of the harmonic triangle of the complete quadrangle formed by the four points of contact of the four tangents to the cubic curve from a point on it. Edinb. M. S. Proc. **29**, 2-5.

W. P. Milne. The focal circles of circular cubics. Edinb. M. S. Proc. **29**, 12-16.

W. P. Milne. The focal and bi-tangent properties of bi-circular quartics. Edinb. M. S. Proc. **29**, 90-99.

In dem ersten Artikel wird gezeigt, daß harmonische Dreiecke „apolare" Dreiecke sind in bezug auf alle kubischen Kurven, welche dieselben Wendepunkte haben wie die gegebene kubische Kurve, und in bezug auf alle Klassenkubiken, welche dieselben Spitzentangenten haben wie die Cayleysche Kurve der gegebenen Kurve (ein Dreieck heißt apolar, wenn zwei beliebige seiner Ecken konjugierte Punkte in bezug auf dem Polarkegelschnitt der dritten Ecke sind). Im zweiten und dritten Artikel scheint die Behandlungsart einfacher zu sein als nach dem gewöhnlichen Verfahren; einige der Ergebnisse sind wohl neu. Gbs. (Lp.)

J. R. Conner. The rational plane quartic as derived from the normcurve in four dimensions by projection and section. American J. **33**, 203-248.

Umfangreiche, in der Hauptsache synthetische Untersuchung, welche die ebene Kurve vierter Ordnung vom Geschlecht Null als Projektion der Normalkurve vierter Ordnung im Raume von vier Dimensionen betrachtet. W. Stahl hatte sie als Projektion der rationalen Kurve vierter Ordnung im Raume von drei Dimensionen behandelt (J. für Math. **101**, 1887). B.

J. E. Rowe. Important covariant curves and a complete system of invariants of a rational quartic curve. American M. S. Trans. **12**, 295-310.

Vier Invarianten, von denen alle übrigen algebraisch abhängen. Sie treten auch als symmetrische Funktionen der homogenen Koordinaten der Ebene auf, die die Kurve aus einer Steinerschen Fläche herausschneidet. B.

G. Majcen. On quartic curves of deficiency zero with a rhamphoid cusp and a node. Amst. Ak. Versl. **19**, 768-775.

Projektive Erzeugung der typischen ebenen rationalen Kurve vierter Ordnung, welche außer einem einfachen Knotenpunkt eine Schnabelspitze besitzt, und einige Eigenschaften der Kurve, die sich unmittelbar aus der Erzeugung ergeben. Interessanter Zusammenhang mit gewissen quadratischen Funktionen einer ganzen Zahl. B.

G. MAJCEN. Über die Kurve vierter Ordnung mit einer Spitze zweiter Art und einem einfachen Wendeknoten. Prag. Ber. 1911, Nr. 7, 14 S.

Der Verf. untersucht projektive Eigenschaften der allgemeinsten Kurve vierter Ordnung mit einer Spitze zweiter Art und einem Wendeknoten. Ihrer Gleichung kann man die Form geben:

$$(mx_1x_2 + nx_3^2)^2 + x_1^2x_2x_3 = 0.$$

Er bestimmt insbesondere einige Doppelverhältnisse, welche von den Zahlen m, n unabhängig sind; so z. B. hat das Doppelverhältnis der Verbindungslinie beider singulären Punkte ($x_3 = 0$), der Wendetangente des Wendeknotens ($x_2 = 0$) und der beiden Strahlen AD_1, AD_2 den Wert $(3+\sqrt{5})/(3-\sqrt{5})$; dabei sind D_1, D_2 die Berührungspunkte der Doppeltangente. Pe.

G. MAJCEN. Die Kurve vierter Ordnung mit einer Spitze zweiter Art. Agram Akad. **185**, 1-43.

Projektive Eigenschaften der Kurve vierter Ordnung vom Geschlechte 1. Eigenschaften der Schnittpunkte beliebiger durch die Spitze der Kurven gehenden Kegelschnitte (Rev. sem. $\mathbf{20}_2$, 99). Lp.

J. DENIS. Note sur la lemniscate. Revue de Math. spéc. **21**, 129-130.

Die angegebene Konstruktion der Tangente und des Krümmungskreises mittels der Wendetangenten beruht auf der Inversion der Kurve in eine Hyperbel. Sk.

J. THOMAE. Über den Steinerschen Strahlenbüschel. Leipz. Ber. **63**, 27-64.

Der Steinersche Strahlenbüschel (J. Steiner, J. für Math. **53**, 231-237; Ges. Werke **2**, 639-647. L. Cremona, J. für Math. **64**) wird hier in sehr ausführlicher Weise nur mit Benutzung der elementaren Stätze und Methoden der analytischen Geometrie der Ebene behandelt. Es ergeben sich dabei außer bekannten Eigenschaften auch einige neue Erzeugungsweisen des Steinerschen Dreispitzes. So läßt sich der Dreispitz durch eine quadratische Verwandtschaft auf einen Kegelschnitt abbilden, der bei passender Wahl der Verwandtschaft ein Kreis wird: Gegeben ist ein Dreieck $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, der Inkreis desselben und der Kreis Γ, welcher $\sigma_1\sigma_2$ in σ_2 und $\sigma_1\sigma_3$ in σ_3 berührt. M' sei die Polare eines Punktes m' in bezug auf Γ, m der Schnittpunkt von

M' und $\sigma_1 m'$. Durchläuft m' den Inkreis, so erzeugt m einen Steinerschen Dreispitz, der demnach mit Zirkel und Lineal leicht punktweise konstruiert werden kann. Da der Inkreis durch projektive Strahlenbüschel erzeugt werden kann, so folgt aus der quadratischen Verwandtschaft (m, m') weiter, daß der Dreispitz durch zwei projektive Kegelschnittbüschel erzeugt werden kann, welche die drei Spitzen zu gemeinsamen Grundpunkten haben. Zch.

J. Thomae. Über den Steinerschen Strahlenbüschel. (Fortsetzung.) Leipz. Ber. **63**, 446-474.

Die Fortsetzung bringt hauptsächlich Untersuchungen verschiedener kovarianter Gebilde des Dreispitzes und bedient sich zum Teil der Lehre von den elliptischen Funktionen. Die äquianharmonische Kovariante, d. h. der Büschel der Strahlen, die den Dreispitz in vier äquianharmonischen Punkten treffen, zerfällt in einen Büschel dritter und einen Büschel erster Ordnung. Für sie wird eine Parameterdarstellung durch elliptische Funktionen gegeben. Eine weitere Kovariante ergibt sich, wenn man die kubische Invariante der in Linienkoordinaten gegebenen Dreispitzgleichung gleich Null setzt. Auch für diese Kovariante wird eine transzendente Parameterdarstellung abgeleitet.

Zch.

R. Bouvaist. Sur les triangles inscrits et circonscrits à une cartésienne. Nouv. Ann. (4) **11**, 408-420.

Analytische Behandlung. B.

Morley. Question 11 514. Ed. Times (2) **19**, 49-51.

Die komplexen Variabeln w, z sind durch die Gleichung verbunden: $2w = z + b^2/z$. Wenn z einen Kreis beschreibt, so beschreibt w eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkt. Beweis von Sanjána. Lp.

J. R. Conner. On certain correspondences associated with the rational plane quintic curve. Johns Hopkins Univ. Circ. 1911, Nr. 2, 64-75; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 287.

Eine ebene rationale Kurve fünfter Ordnung R_5 ist gegeben durch (1) $x_i = (a_i t)^5$ $(i = 0, 1, 2)$. Sind $(b_i t)^5$ drei linear unabhängige binäre Formen fünfter Ordnung, apolar zu den ersteren, so stellen die Gleichungen (2) $y_i = (b_i t)^5$ $(i = 0, 1, 2)$ eine zu (1) eindeutig zugeordnete „konjugierte" R_5 dar; (1) ist wieder konjugiert zu (2). Man denke sich (1) und (2) in zwei Ebenen π_x, π_y gelegen, so bestehen zwischen diesen Ebenen vermöge (1) und (2) gewisse Korrespondenzen. Um aber diese Korrespondenzen in ihrer Gesamtheit zu übersehen, denke man sich die Ebenen π_x und π_y so allgemein als möglich, d. h. in einem linearen Raume S_5 gelegen. Dieser S_5 mit allen seinen Gebilden wird auf eine Normkurve $N_5 = N$ bezogen.

Ein S_p, der eine $(p+1)$-punktige Berührung mit N hat, heißt einfach ein S_p von N. N besitzt drei Developpable D_1, D_2, D_3, den Ort der Geraden, bzw. Ebenen, bzw. Räume S_3 von N. Eine s-dimensionale Mannigfaltigkeit heißt kurz ein „s-Weg". Dann ist D_1 ein 2-Weg der Ordnung 8, D_2 ein 3-Weg der Ordnung 9, D_3 ein 3-Weg der Ordnung 8. Unter D_0 ist das Punktgebilde N selbst zu verstehen, unter D_4 der Ort ihrer S_4.

Eine R_5 in einem S_p wird erhalten, wenn man die Punkte von N auf S_p von einem S_{5-p-1} projiziert, dagegen in einem S_{p-1}, wenn man die S_4 von N mit S_p schneidet; im letzteren Falle erscheinen die Punkte der R_5 als Schnittpunkte von S_p und D_{5-p}.

Man beachte ferner, daß von einem Punkte x von S_5 fünf S_4 an N gehen. Die so auf N bestimmte binäre Form fünfter Ordnung heißt ein „Quintupel x" oder kürzer „x". Die zu „x" apolaren f_5 werden auf N ausgeschnitten durch die S_4 von „x", die zu „x" apolaren f_4 durch S_3 von „x", die N viermal treffen. Endlich wird die einzige, zu „x" apolare f_3 repräsentiert durch eine Ebene S_2 von „x", die N dreimal trifft. So ergibt sich der grundlegende Satz: „Wird N von einer Ebene π_1 auf eine Ebene π_2 projiziert, so sind die so erhaltenen Reihen der Fundamentalinvolution Quintupel x, wo x ein Punkt von π_2 ist. Die beiden mittels π_1 durch Projektion und Schnitt entstehenden R_5 sind konjugierte Kurven."

Die weitere Entwicklung wird beherrscht durch gewisse ausgezeichnete Gerade in S_5. Eine beliebige Gerade p in S_5 erzeugt eine einzige, N viermal treffende S_3, dementsprechend, daß zu allen f_5 eines Büschels im allgemeinen nur eine einzige apolare f_4 existiert. Existieren aber im besondern zwei solche f_4, so erzeugt auch p einen Büschel jener S_3. Diese ausgezeichneten Geraden in S_5 heißen nach M a r l e t t a (F. d. M. **36**, 720, 1905) „Linien l". Irgend zwei, N viermal treffende S_3 schneiden sich in einer Linie l, so daß es solcher Linien ∞^6 in S_5 gibt.

Diese Linien l stehen in engem Zusammenhange mit dem Ort der N zweimal treffenden Geraden; letzterer Ort ist ein 3-Weg der Ordnung 6. Irgendein Raum σ, der N viermal trifft, schneidet die g_6 in sechs Geraden, und diese bilden den vollständigen Schnitt von g_6 mit σ. Daraus folgt, daß g_6 der Ort der Quintupel x ist, deren Kanonizante f_3 identisch verschwindet. Von einem beliebigen Raume α in S_5 wird die g_6 in einer Kurve sechster Ordnung $g_{6\alpha}$ vom Geschlecht 3 geschnitten, von der besonderen Art, daß es ∞^1 ihr einbeschriebene Fünfseite gibt. Irgendeine trisekante Gerade von $g_{6\alpha}$ ist eine Linie l, und diese Linien l erzeugen eine Regelfläche der Ordnung 8, die $g_{6\alpha}$ als dreifache Kurve besitzt. Die so entstandenen Gebilde werden weiter nach dem Vorgange von W. S t a h l und B e r z o l a r i (F. d. M. **20**, 713, 1888; **25**, 1279, 1893] zu den Oskulanten von N in Beziehung gesetzt.

Vermöge der beiden oben, mittels zweier Ebenen π_1 und π_2 erhaltenen konjugierten R_5 werden zwei Korrespondenzen T, U zwischen π_1 und π_2 festgelegt; die erstere, T, ist kubisch, und eine (5, 1)-deutige, während U die zu T dualistische Korrespondenz ist. Die eingehende Untersuchung dieser beiden Korrespondenzen liefert die Lösung der eingangs formulierten Aufgabe. Das prinzipielle Hauptergebnis läßt sich dahin zusammenfassen, daß die Invariantentheorie einer R_5 identisch wird mit der Kovariantentheorie von sechs Geraden einer Ebene. My.

J. I. TRACEY. Certain curves associated with the Jonquières quintic.
Johns Hopkins Univ. Circ. 1911, Nr. 2, 94-100.

Eine quadratische Involution J auf einer ebenen rationalen Kurve R_n der Ordnung n bestimmt eine rationale Klassenkurve S_{n-1} der Ordnung $n-1$, die die R_n $3(n-2)$-mal berührt und noch $2(n-2)(n-3)$-mal schneidet. Im besondern sei $n=5$. Jeder Doppelpunkt von R_5, der zugleich solcher von J ist, reduziert die Ordnung der S_4 um eine Einheit, so daß sich die S_4 bei zwei solchen Doppelpunkten auf einen die R_5 fünfmal berührenden Kegelschnitt S_2 reduziert. Die Involution J wird dann aus der R_5 ausgeschnitten durch den Büschel der Kegelschnitte mit den vier übrigen Doppelpunkten als Grundpunkten. Solcher Kegelschnitte S_2 gibt es daher 15, die zusammen mit dem zur R_5 perspektiv liegenden Kegelschnitte die Gesamtheit der die Kurve fünfmal berührenden Kegelschnitte bilden.

Speziell sei die R_5 eine „Jonquièressche", d. h. eine solche mit vierfachem Punkt. Die vier Parameter derselben lassen sich auf drei Arten in zwei Paare teilen, die jedesmal Paare einer bestimmten J sind. Die obigen 15 Kegelschnitte S_2 reduzieren sich jetzt auf drei; diese lassen sich explizit aufstellen nebst den zugehörigen Quintupeln von Berührungspunkten. Drei derartige Kegelschnitte sind an drei Bedingungen geknüpft, die in invarianter Gestalt ermittelt werden. My.

R. M. WINGER. Note on the rational quintic with two syzygetic points.
Johns Hopkins Univ. Circ. 1911, Nr. 2, 101-105.

Legt man durch einen Punkt P einer rationalen ebenen Kurve fünfter Ordnung R_5 einen Geradenbüschel, so entspricht den Schnittpunkten ein Büschel binärer Formen vierter Ordnung. Läßt sich der letztere im besondern auf die Gestalt $f+\lambda H$ bringen, wo H die Hessesche Kovariante von f ist, so gehen, entsprechend den im Büschel enthaltenen Quadraten, von P aus drei Doppeltangenten an die Kurve R_5, und P heißt ein syzygetischer Punkt der R_5. Nimmt man an, die Kurve besitze zwei syzygetische Punkte, so lassen sich die sechs quadratischen Gleichungen für die Parameter der Doppelpunkte der R_5 unmittelbar hinschreiben. Aus ihnen entnimmt man, daß die sechs Doppelpunkte eine Desarguessche Konfiguration von zwei perspektiven Dreiecken bilden. My.

A. M. NESBITT. Question 16851. Ed. Times (2) **19**, 38-39.

Die drei Kurven zu zeichnen:

$$x(y^2+ax)^2=a^5,\quad y^5=x(a^2-xy)^2,\quad a(y^2-ax)^2=x^5.$$

Lösung von R. S. Capon. Der Aufgabensteller bemerkt, daß die zweite Kurve aus der ersten entsteht, indem man die x-Achse und die Linie im Unendlichen miteinander vertauscht, die dritte durch Vertauschung der y-Achse mit der Linie im Unendlichen. Lp.

K. Rohn. Die ebene Kurve 6. Ordnung mit elf Ovalen. Leipz. Ber. **63**, 540-555.

Es gibt im wesentlichen zwei Methoden, um mittels reduzibler Kurven zu Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ mit der Maximalzahl von $p+1$ Ovalen zu gelangen. Die eine stammt von Harnack (Math. Ann. **10**, 189; F. d. M. **8**, 438, 1876), die andere von Hilbert (Math. Ann. **38**, 115; F. d. M. **23**, 753, 1891). Bei Kurven sechster Ordnung gelang es aber mit beiden Methoden nicht, elf sich gegenseitig ausschließende Ovale zu bekommen. Hilbert hat ohne Beweis den Satz aufgestellt, daß es solche Kurven überhaupt nicht gebe; ein Beweis dieses Satzes ist schon mehrfach versucht worden, aber bis jetzt nicht gelungen. In der vorliegenden Abhandlung erbringt der Verf. diesen fehlenden Beweis. Er geht aus von einer C_6, $f(x,y)=0$, mit elf Ovalen, nimmt an, daß diese elf Ovale sich sämtlich gegenseitig ausschließen, und zeigt dann die Unhaltbarkeit dieser Annahme. Das Verfahren besteht darin, daß die Kurve $f(x,y)=0$ zunächst durch einen stetigen Schrumpfungsprozeß in eine Kurve mit zehn isolierten Doppelpunkten und einem Oval übergeführt wird; hierauf wird diese Kurve derart variiert, daß acht dieser Doppelpunkte fest bleiben. Auf Grund der Eigenschaften einer Schar von Kurven sechster Odnung mit acht gemeinsamen Doppelpunkten, die zunächst abgeleitet und in mehreren interessanten Sätzen formuliert werden, wird dann gezeigt, daß die ursprüngliche Voraussetzung über die Kurve sechster Ordnung $f(x,y)=0$ nicht zutreffen kann. Das Ergebnis der Untersuchung wird vom Verf. in folgenden Worten zusammengefaßt: „Eine Kurve sechster Ordnung mit elf Ovalen zeigt stets eine derartige Anordnung ihrer Ovale, daß zehn von ihnen sich gegenseitig ausschließen, während eines davon zugleich das elfte einschließt. Eine Kurve sechster Ordnung mit zwei konjugiert imaginären Doppelpunkten und neun Ovalen, kann zweierlei Anordnung ihrer Ovale zeigen. Entweder es schließen sich acht Ovale gegenseitig aus, und eins von ihnen umschließt das neunte; oder alle neun Ovale schließen sich gegenseitig aus. Im letzteren Fall haben die neun Ovale eine besondere Lage, die folgendermaßen charakterisiert ist: Macht man durch einen Variationsprozeß, ohne die imaginären Doppelpunkte zu ändern, acht beliebige Ovale zu isolierten Doppelpunkten, so bestimmen diese einen Büschel von Kurven dritter Ordnung, dessen neunter Grundpunkt in dem neunten Oval liegt.“

Auf die Verhältnisse bei solchen Kurven sechster Ordnung, bei denen im Innern eines Ovals mehrere andere Ovale liegen, und die hier nicht erörtert wurden, will der Verf. an anderer Stelle zurückkommen. (Vgl. auch das Referat über eine andere Arbeit des Verf. Leipz. Ber. **63**, 423-440 in Abschnitt IX, Kap. 3 D dieses Bandes.) Lö.

A. Baruch. Lösung zu 358 (J. Neuberg). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 371-372.

Man projiziert irgendeinen Punkt M einer Ellipse auf die Hauptachse OA in P; der Punkt P wird in Q auf die Gerade OM projiziert. Die Kurve (Q) ist von der sechsten Ordnung und, was nicht bemerkt worden ist, eine verallge-

meinerte Kurve der Müngerschen Doppellinie (vgl. Loria, zweite Aufl., Bd. 1, S. 373). Ihr Flächeninhalt ist $\frac{a^2 b (2a + b) \pi}{2 (a + b)^2}$. Gd.

G. Valiron. Sur la courbure des courbes triangulaires. Revue de Math. spéc. **21**, 105-108.

Für zwei trianguläre Kurven mit den Exponenten m und n, die sich in einem Punkte berühren, ist in diesem Punkt das Verhältnis der Krümmungen konstant $(m - 1):(n - 1)$. Der Satz, wie seine Folgerungen sind bekannt. S. Loria, Spezielle Kurven (1. Aufl. S. 284). Sk.

G. Valiron. Sur les courbes triangulaires. Revue de Math. spéc. **21**, 233-238, 257-261.

Eine Reihe besonderer, zum Teil bekannter Eigenschaften der Kurvenklasse. Sk.

C. de Jans. Over de krommen van Clairaut. (Tweede Mededeeling.) Vlaamsch Natuur-Geneesk. Congr. Handel. **15**, 23-48.

Im vorigen Bande derselben Zeitschrift war bewiesen worden, daß der Krümmungsmittelpunkt der Kurve $r^n = k^n \sin \vartheta$ mittelst eines Kegelschnitts gefunden werden kann. Hier werden zunächst Art und Eigenschaften dieser Kegelschnitte genauer untersucht; dann wird eine Transformation angegeben, die Clairautsche Kurven in Ribaucoursche Kurven überführt und somit ohne weiteres den Satz von P. Ernst (Arch. d. Math. u. Phys. (3) **15**, 181; F. d. M. **40**, 654, 1909) ergibt: erstere sind die Radialen der Ribaucourschen Kurven. Beispiele. Zum Schluß wird eine einfache Parameterdarstellung der Clairautschen Kurven gegeben. Sk.

D. Gautier. Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développante. Paris: Gauthier-Villars. 84 S. 8°.

Wie Wieleitner im Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 82 dargetan hat, sind die von dem Verf. behandelten Kurven längst bekannt. Die „hyperboles étoilées“ sind von W. Heymann unter dem Namen „Aranëiden“ ausführlich behandelt worden. Vgl. F. d. M. **30**, 530, 1899. Und die „hyperbole développante“ ist nichts anderes als die Quadratrix des Dinostratos. Ba.

G. N. Watson. A note on equipotential curves. Messenger (2) **40**, 152-160.

Folgende Aufgabe wird behandelt: Gegeben sei die Kurve, deren Gleichung in komplexen Koordinaten lautet:

$$(1) \qquad \left|\frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}\right| = 1,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ komplexe Größen sind, verbunden durch die Beziehung $\alpha\beta = \gamma\delta$. Ist es möglich, von $z = 0$ ausgehend, längs der Kurve bis zu einem Punkte im Unendlichen in einer beliebigen Richtung zu gelangen? Und wenn dies unmöglich ist und wir von $z = 0$ aus so ins Unendliche wandern, daß auf der Bahn

$$\left|\frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}\right| \leqq K$$

ist, welches ist der kleinste für K dadurch zu erreichende Wert, daß man die Bahn in geeigneter Weise wählt?

Die Kurve (1), wenn rechts K statt 1 gesetzt wird, stellt eine äquipotentiale Kurve eines Systems von Linienladungen dar, senkrecht zu der durch die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehenden Ebene, wenn die Ladungen $+1, +1, -1, -1$ auf der Längeneinheit sind. Es handelt sich also darum, vom Nullpunkte bis ins Unendliche eine Bahn zu bestimmen, auf der der niedrigste Wert des Potentials möglichst groß ist". — Die Kurven (1) sind kubische Kurven. Lp.

P. van Geer. De circulaire tractrix. Wisk. Tijdschr. 7, 153-163.

Spezielle Untersuchungen über die Kreistraktix, deren verschiedene Formen durch die Diskussion ihrer Polargleichungen charakterisiert werden. Die Ergebnisse stimmen, wie Verf. betont, nicht völlig mit den kürzeren Entwicklungen von Loria (Spezielle ebene Kurven) und Teixeira (Traité de courbes spéciales) überein. Sk.

D. J. Duran-Loriga. Sobre una curva transcendente, generalizacion de la tractriz de Leibniz. Ann. Ac. Polyt. Porto 6, 155-165.

„Auf dem zu Valencia (Mai 1910) abgehaltenen Kongreß der Asociación Española para el Progreso de las Ciencias haben wir unter anderen verschiedenen Arbeiten eine überreicht, deren Zweck die Untersuchung der Kurve war, deren Gleichung

$$x = -\tfrac{1}{2} y \cos\theta \pm k\left[\sqrt{1 - y^2/q^2} + \ln\frac{q - \sqrt{q^2 - y^2}}{y}\right]$$

ist. In ihr bedeutet θ den Winkel der kartesischen Achsen; k und q sind Konstanten, zwischen denen die Beziehung $2k = q\sqrt{4 - \cos^2\theta}$ besteht. Diese Kurve hat die charakteristische Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der Seiten der Dreiecke, gebildet durch die Tangente, die Ordinate und die Subtangente, eine konstante Größe ist. Die Untersuchung dieser Kurve haben wir zuerst im Journal de Longchamps vorgeschlagen, darauf im Intermédiaire des Mathématiciens (1897 u. 1902), wo die Frage keine Antwort erhielt. Der berühmte Analytiker, zugleich unser erlauchter Freund, Gomes Teixeira

hat die Güte gehabt, unsere Kurve in seinem prächtigen Tratado de curvas especiales anzuführen, und das bewog uns, unsere Untersuchung in dieser Zeitschrift zu veröffentlichen, wo wir einiges zu der in Valencia vorgetragenen Arbeit hinzufügen.“ Lp.

J. N. Haton de la Goupillière. **Étude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques.** J. de l'Éc. Pol. (2) **15**, 1-107.

Die Arbeit zerfällt in drei Teile. Im ersten Abschnitt werden Rollkurven mit geradliniger Polbahn betrachtet, und zwar die feste Ebene bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, die Gleichung der Polkurve auf Polarkoordinaten, als deren Nullpunkt der Punkt der sich bewegenden Ebene gewählt ist, der die zu untersuchende Kurve beschreibt. Sodann werden natürliche Koordinaten eingeführt, die Bogenlänge und der Kontingenzwinkel. Der Schwerpunkt liegt offenbar in den Beispielen, die zeigen, daß die gewählten Koordinaten in besonderen Fällen sich als naturgemäß erweisen. Die Ergebnisse, auch über die Mannheimsche Kurve, unterscheiden sich indessen von den bekannten nur durch die Form. Der zweite Teil, die dynamische Theorie der Rollkurven, behandelt dasselbe Problem noch einmal, nur als mechanisches Problem: welches ist die Beziehung zwischen der Rollgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit, mit der die Rollkurve durchlaufen wird; und welches sind die Kräfte, die diese Bewegung hervorrufen? Die bei Anwendung der Koordinaten des ersten Teils formal einfachen Formeln werden wieder auf eine große Zahl von Beispielen angewandt. Der dritte Teil endlich behandelt Rollkurven mit krummer Polbahn. Hierbei werden zunächst beide Polkurven auf Polarkoordinaten bezogen, und die Polargleichung der Rollkurve folgt dann durch Elimination zweier Hülfsgrößen aus drei Gleichungen. Bezieht man dagegen die feste Ebene auf rechtwinklige Koordinaten, so erhält man durch ähnliche Operationen die Gleichung der Rollkurve gleichfalls in rechtwinkligen Koordinaten. Die Betrachtungen lassen sich ohne wesentliche Schwierigkeit auch auf Bewegungen auf der Kugel ausdehnen, für welche zum Schluß einige Beispiele durchgerechnet werden. Sk.

W. Da Vatz. **Über die Konstruktion der Kurve $x^y = y^x$.** Kagans Bote Nr. **529**, 9-13. (Russisch.)

Elementare Diskussion der Gestalt der Kurve mit Hülfe der Einführung imaginärer Logarithmen. Si.

J. Haag. **Sur certaines familles de courbes planes.** Revue de Math. spéc. **22**, 306-308.

Verallgemeinerung des Jametschen Problems, die auf Quadraturen führt. Sk.

H. Brocard y F. G. Teixeira. **Notas relativas à la cuestion 1.** Rev. Soc. Mat. Esp. **1**, 128-130.

Brocard berichtigt einen Irrtum in seiner 1899 in El Progreso Matematico erschienenen Arbeit; Teixeira knüpft daran einige geschichtliche Bemerkungen. Op.

Weitere Literatur.

Ashcraft. Quadratic involutions on the plane rational quartic. Diss. Johns Hopkins Univ. 1911.

A. Crathone. The catenary with variable endpoints. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 528.

C. E. Cullis. On the equations of Möbius surfaces of all pitches. Bull. Calcutta M. S. **1**, 163-186 (1909).

E. W. Davis. Imaginaries on a cubic. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 226.

K. Gläser. Ebene Katakaustiken. Progr. Linz. 7 S. 8⁰.

W. X. Gyr. Die Polaren der Lemniskate. Diss. Bern. 59 S. 8⁰.

M. W. Haskell. Note on the Del Pezzo quintic. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 447.

M. T. Naraniengar. On bicircular quartics. Journ. Ind. M. S. **3**, 152-163.

J. A. Nyberg. Projective differential geometry of rational cubic curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 526-527.

J. E. Rowe. The combinants of two binary cubics and their geometrical interpretation on the rational cubic curve. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 520-521.

H. L. Slobin. On plane quintic curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 303.

Kapitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.

V. Kommerell u. K. Kommerell. Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. II. Bd. Leipzig: G. J. Göschen (Sammlung Schubert **44.**) IV und 188 S. 8⁰.

V. Kommerell u. K. Kommerell. Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Leipzig: G. J. Göschen. (Sammlung Schubert **62.**) VI und 171 S. 8⁰.

Die zweite Auflage des zweiten Bandes ist in zwei Teile zerlegt worden. Dabei handelte es sich weniger um eine andere Orientierung des Ziels, das nach wie vor die Einführung in die Elemente der Theorie sein soll, als um eine Vermehrung der Anwendungen und Beispiele, die das Gebotene leichter verständlich machen

sollen. Eine wesentliche Erweiterung hat die Theorie der Strahlensysteme erfahren, wo auch eigene Beiträge eines der Autoren mit verarbeitet sind. Die Literaturangaben sind auch in diesen Bänden wesentlich vermehrt worden, ebenso die Zahl der Übungsaufgaben. Das Werk wird sich in der neuen Form die rasch erworbene Beliebtheit zu bewahren wissen. Sk.

W. Fr. Meyer. Über die Theorie benachbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern über Differentialgeometrie. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. XVIII u. 152 S. gr. 8°.

Ausführliche Darstellung eines Gedankens, den Verf. und seine Schüler (B. Arndt, Diss., Blum, Diss.) schon verschiedentlich nutzbar gemacht haben. Konstruiert man auf einer Regelfläche eine beliebige Raumkurve, so bezeichnet Meyer die Geraden der Fläche als verallgemeinerte Tangenten der Kurve, die Parallele zur Flächennormale im Zentralpunkt als verallgemeinerte Binormale und die Parallele zur Striktionsgeraden als verallgemeinerte Hauptnormale. Es ergibt sich dann, daß für die Bewegung dieses Dreikants Formeln bestehen, die genau die Struktur der gewöhnlichen Frenetschen Formeln besitzen — ein Ergebnis, das geometrisch nicht überraschend erscheint, wenn man bedenkt, daß die Frenetschen Gleichungen nichts anderes als die Eigenschaften der sphärischen Abbildung charakterisieren und also eine bestimmte Klasse von Bewegungen der Kugel in sich kennzeichnen. Diese allgemeine Konstruktion läßt sich in mannigfacher Weise spezialisieren, woraus sich eine große Anzahl von Einzelergebnissen der Kurven- und Flächentheorie ablesen läßt. Die Ideen des Verf. berühren sich, worauf er selbst hinweist, mit Gedanken, die von Gilbert, Aoust und Zorawski verfolgt worden sind. Anhangsweise wird die Ausdehnung auf den n-dimensionalen Raum gegeben. Sk.

J. Haag. Sur une application de la théorie du trièdre mobile. Nouv. Ann. (4) **11**, 67-69.

Die Nachbarschaft eines Raumkurvenpunktes wird auf das Haupttrieder bezogen, und die Koordinaten der Kurvenpunkte werden nach Potenzen von ds entwickelt. Durch kinematische Vorstellungen gewinnt man Rekursionsformeln für die Koeffizienten dieser Entwicklungen. Sk.

A. C. L. Wilkinson. An introduction to the theory of moving axes with application to curves in space and curves on surfaces. Journ. Ind. M. S. **3**, 92-111, 172-184.

Das Darbouxsche Werk „Théorie des surfaces" ist bekanntlich auf der Theorie der beweglichen Achsen aufgebaut. Da diese wichtige analytische Methode in englischen Lehrbüchern über Flächentheorie nicht enthalten ist, so hat es der Verf. der vorliegenden Abhandlung für nützlich gehalten, mit derselben bekannt zu machen; hierbei weicht er allerdings von Darboux inso-

weit ab, als er nicht zwei unabhängige Parameter zugrunde legt und kinematische Betrachtungen gänzlich vermeidet. Nach Entwicklung der Theorie wird diese zunächst auf die Raumkurven im allgemeinen und dann auf die Kurven auf Umdrehungsflächen angewendet. Zahlreiche Beispiele aus bekannten französischen und deutschen Lehrbüchern der Flächentheorie werden hierbei benutzt. Gd.

L. P. Eisenhart. A fundamental parametric representation of space curves. Annals of Math. (2) **13**, 17-35; Amer. Math. Bull. Soc. Bull. (2) **17**, 514.

Es handelt sich um die Darstellung der Raumkurven, bei der als Parameter die eine isotrope Koordinate der sphärischen Abbildung gewählt] ist, und die zuerst von de Montcheuil (S. M. F. Bull. **33**, 170-171; F. d. M. **36**, 664, 1905) angegeben worden ist. In den Ergebnissen trifft Verf., wenn es sich um reguläre Kurven handelt, vielfach mit früheren Untersuchungen des Ref. (Math. Ann. **67**, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven) zusammen; für die singulären Fälle sind schon vom Verf. die Arbeiten von Vessiot (C. R. **140**) und Study (Amer. M. S. Trans. **10** und **11**) zitiert. Die Arbeit ist sehr geeignet, in die neue strengere Auffassung geometrischer Probleme einzuführen. Sk.

A. Meder. Zur Herleitung gewisser Formeln aus der Kurventheorie. Monatsh. f. Math. u. Phys. **22**, 303-376.

Die Bogenelemente und die Krümmungen zweier ebenen Kurven, die durch Zentralprojektion einer gegebenen Raumkurve C auf eine Ebene oder durch Schnitt der Tangentenfläche von C mit einer anderen Ebene entstehen, besitzen in entsprechenden Punkten ein Verhältnis, das die Ordnungszahl Null hat, d. h. das Verhältnis besitzt einen endlichen, von Null verschiedenen Wert. Gibt man dem Projektionssystem besondere Lagen, so erhält man eine Reihe von speziellen, zum Teil bekannten Sätzen. Sk.

A. Razzaboni. Sopra alcune particolari trasformazioni delle curve nello spazio. Bologna Mem. (6) **7**, 109-117.

Es werden die Beziehungen zwischen zwei Raumkurven hergeleitet, die punktweise derart aufeinander bezogen sind, daß in entsprechenden Punkten ihre Tangenten, oder ihre Hauptnormalen, oder ihre Binormalen einen konstanten Winkel einschließen. Die Resultate ergeben sich durch einfache Anwendung der Frenetschen Formeln. Sk.

A. Razzaboni. Sulle curve a doppia curvatura in geometria iperbolica. Bologna Mem. (6) **8**, 29-45.

Nachdem Verf. früher (Bologna Mem. (6) **5**, 225-240; F. d. M. **39**, 671, 1908) für die Kurven des elliptischen Raumes die einfachsten Beziehungen her-

geleitet hat, behandelt er jetzt dieselben Fragen für den hyperbolischen Raum. Methoden und Ergebnisse unterscheiden sich der Natur der Sache nach von den früheren nicht wesentlich. Sk.

G. Pick. Sur les notions: droites parallèles et translation, et sur la géométrie différentielle dans l'espace non euclidien. C. R. **153**, 1447-1449.

In der nichteuklidischen Geometrie, die durch die Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ definiert wird, gibt es, wie der Verf. bemerkt, zu jeder Geraden zwei Scharen von Parallelen, deren eine in Plückerschen Koordinaten durch Gleichungen von der Form:

$$p_{14} - p_{23} : p_{24} - p_{31} : p_{34} - p_{12} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

definiert wird. Schließt man die Tangenten der Fläche aus, so kann man annehmen: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, und die α_i spielen dann dieselbe Rolle wie die Richtungskosinus der euklidischen Geometrie. Für das begleitende Dreikant einer Raumkurve gelten nunmehr Formeln, die genau dieselbe Form haben wie die Frenet-Serretschen, und die natürliche Geometrie der Raumkurven läßt sich daher auf den nichteuklidischen Raum übertragen, was der Verf. an dem Beispiele der Schraubenlinien zeigt. Es scheint dem Verf. entgangen zu sein, daß seine Parallelen keine andern sind als die Cliffordschen. El.

G. Pick. Über Brachistochronenscharen und verwandte Kurvensysteme. Wien. Ber. **120**, 257-268.

Kurvenscharen, die auf einer Fläche so konstruiert werden, daß die zu einem Punkte gehörigen Mittelpunkte der geodätischen Krümmung der durch ihn gehenden Kurven des Systems auf einer Geraden liegen, werden vom Verf. homalozentrisch genannt. Sie sind durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung charakterisiert und gehen bei konformen Transformationen immer in Scharen derselben Eigenschaft über. Zu ihnen gehören die Isogonalscharen (Scheffers) und, wie hier gezeigt wird, die Brachistochronenscharen, und zwar letztere auch in Räumen von n Dimensionen. Sk.

G. Tzitzéica. Sur certaines courbes gauches. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **28**, 9-32.

Die Kurven C, bei welchen für jeden Punkt die Torsion proportional dem Quadrat seines Abstandes von einem festen Punkt im Raume ist, behalten diese charakteristische Eigenschaft gegenüber jeder affinen Transformation, die den Anfangspunkt fest läßt, sowie gegenüber der Inversion an der Einheitskugel um den Anfangspunkt. Unter den Regelflächen, auf denen eine Kurve C Asymptotenlinie ist, gibt es drei Kategorien: (1) es gibt Regelflächen, die von einer willkürlichen Funktion abhängen, die keine weitere Kurve C als

Asympotenlinie besitzen; (2) es gibt Regelflächen, die von drei willkürlichen Konstanten abhängen, die außer der betrachteten noch eine Kurve C als Asymptotenlinie besitzen; (3) es gibt ∞^2 Regelflächen, deren Asymptotenlinien alle zu der Klasse der Kurven C gehören. Letztere beide Klassen von Flächen werden des näheren untersucht. Sk.

R. Mohr. Die Bertrandschen Kurven in der Theorie der Normalensysteme. Diss. Straßburg. 38 S. 8°.

Wenn ein Rotationshyperboloid H auf einer seiner Biegungsregelflächen B abrollt, so beschreibt seine Drehachse ebenfalls eine Biegungsregelfläche B' derselben Fläche, und die Striktionslinien von B und B' sind zugeordnete Bertrandsche Kurven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$. Die Flächen B und B' selbst sind dabei Brennflächen einer Normalenkongruenz, die übrigens aus den Tangenten an die Biegungskurven der Meridiane von H gebildet ist. Je zwei aufeinanderfolgende Erzeugenden von B liegen mit den entsprechenden Erzeugenden von B' hyperboloidisch, und zwar ist dieses Hyperboloid — darin besteht das Hauptergebnis der Arbeit — ein orthogonales (niemals Drehhyperboloid), das mit dem Hauptdreikant der Bertrandschen Kurve $\mathfrak{B}$ fest verbunden ist. Allgemeiner folgt: Soll die Schar der Erzeugenden eines mit dem Hauptdreikant einer Kurve starr verbundenen Hyperboloids bei der Bewegung längs der Kurve ein Normalensystem beschreiben, so muß die Kurve eine Bertrandsche sein. Das Hyperboloid kann in bezug auf die Kurve ∞^2 Lagen einnehmen. — Die Behandlung ist rein analytisch, so daß der geometrische Inhalt, der zum Teil in einfachster Weise kinematisch sich deuten läßt, nur mühsam gewonnen wird. Sk.

E. Salkowski. Die Cesàroschen Kurven. Münch. Ber. 1911, 523-537.

„Wenn das Hauptdreikant einer Raumkurve sich längs der Kurve bewegt, so gibt es immer gerade Linien, und zwar ∞^1 euklidische und zwei isotrope Geraden, die mit dem Dreikant fest verbunden sind, und von denen jede bei der Bewegung die Tangentenfläche einer Raumkurve beschreibt ... Nur für besondere Klassen von Raumkurven gibt es außer diesen Geraden noch andere, die mit dem Hauptdreikant fest verbunden sind und bei seiner Bewegung Raumkurven einhüllen, und Cesàro, dem wir diese Problemstellung verdanken, und nach dem daher diese kinematische Bedingung als Cesàrosche Bedingung bezeichnet sei, hat gezeigt, daß sie zu denjenigen Kurven gehören, für die zwischen der Krümmung $\varkappa$ und der Torsion τ eine quadratische Gleichung von der Form

$$A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau \tag{1}$$

besteht. — In der wenig umfangreichen Literatur des Gegenstandes, die kürzlich von O. Joachimi übersichtlich zusammengestellt ist, findet sich indessen nicht mit genügender Klarheit betont, daß die Gleichung (1) für die Kurven, die die Cesàrosche Bedingung erfüllen, keineswegs charakteristisch ist, und man hat daher unterschiedslos diese wie auch die sie einschließende Klasse der Kurven (1) als Cesàrosche Kurven bezeichnet. Um der aus der naheliegen-

den Verwechselung schon tatsächlich entstandenen Verwirrung zu entgehen, seien die Kurven (1) Cesàroschen Kurven schlechthin, die geometrisch definierte Kurvenklasse eigentliche Cesàrosche Kurven genannt."

Es wird zunächst gezeigt, daß das Verfahren, die Diskussion an die endlichen Gleichungen der Kurven (1) anzuknüpfen, die sich mittels der Methode der parallelen Zuordnung (F. d. M. **36**, 659, 1905) durch Quadraturen darstellen lassen, nur in Sonderfällen zweckmäßig ist, und daß daher das kinematische Problem besser direkt behandelt wird. Dann werden im Hauptteil der Arbeit die Bedingungen der eigentlichen Cesàroschen Kurven präzisiert, d. h. alle Kurven (1), die der Cesàroschen Bedingung nicht genügen, ausgesondert, endlich wird eine rationelle Klassifikation der eigentlichen Cesàroschen Kurven gegeben.

Die Kurven, deren natürliche Gleichung eine der sechs Formen

$$(P\tau - Q\varkappa)\tau = P(P\varkappa + Q\tau), \quad B\tau^2 = P\varkappa + Q\tau \quad (B, P \neq 0),$$
$$C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau\,(C, P \neq 0), \quad A\varkappa^2 = P\varkappa + Q\tau \quad (A, P, Q \neq 0),$$
$$\varkappa(Q\varkappa - P\tau) = Q(P\varkappa + Q\tau), \quad A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = Q\tau \quad (A \neq 0)$$

hat, gehören nicht zu den eigentlichen Cesàroschen Kurven. Abgesehen von diesen sechs Kurvenklassen „existieren für alle Kurven, die eine natürliche Gleichung

$$A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau$$

besitzen, vier reelle oder komplexe, verschiedene oder paarweise zusammenfallende Cesàrosche Geraden. Es existieren deren unendlich viele bei den Kurven

$$A\varkappa + C\tau = Q\frac{\tau}{\varkappa}$$

sowie bei den Bertrandschen Kurven und ihren Grenzfällen. Bei den letzteren gibt es außer diesen regulären Cesàroschen Geraden noch unendlich viele Minimalgeraden, die der Cesàroschen Bedingung genügen."

Z.

S. Heller. Note zu meiner Abhandlung: Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen krummer Flächen. Math. Ann. **71**, 299-302.

Verf. vereinfacht in einigen Punkten den Beweisgang und die Ergebnisse seiner Dissertation. (Math. Ann. **58**, 565-577; F. d. M. **35**, 616, 1904.) Sk.

J. Knoblauch. Die geometrischen Differentiationen im schiefwinkligen Kurvennetz. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **10**, 96-101.

Es handelt sich darum, die Bedeutung der Frenetschen Formeln für zwei beliebige auf einer Fläche gelegene Kurven und den Zusammenhang dieser Formeln mit den Gauß-Weingartenschen partiellen Differentialgleichungen für die kartesischen Koordinaten, sowie mit den Fundamental-

gleichungen der Fläche klarzustellen. Dabei wird von vornherein die Rechnung auf invariantem Wege mittels Differentiation nach Bogenlängen durchgeführt. In den Formeln treten die Ableitungen der Richtungskosinus der Kurventangenten und der Flächennormale, sowie die Normalkrümmungen, die Tangentialkrümmungen, die geodätischen Windungen und der Koordinatenwinkel auf. Re.

H. Jonas. Über die Komposition der Moutardschen Transformation. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **10**, 101-108.

Bezieht sich auf das von Bianchi (Lezioni 2, § 247-248) aufgestellte Kompositionstheorem der Moutardschen Transformation, das eine Verallgemeinerung des Vertauschbarkeitssatzes der Bäcklundschen Transformation darstellt. Der Inhalt der Arbeit läßt sich nicht in knappen Worten wiedergeben. Re.

A. Myller. Surfaces transformables en elles-mêmes par une certaine opération fonctionnelle. Bull. Soc. Roum. des sc. **20**, 449-452.

Ausgehend von einer Integralgleichung mit symmetrischem Kern gibt der Verf. eine spezielle Transformation an, durch die eine gewisse Fläche in sich transformiert wird. Die Gleichung dieser Fläche wird durch eine aus den Eigenfunktionen und den Eigenwerten des Kernes der Integralgleichung gebildete konvergente Reihe dargestellt. Bei der Transformation geht jeder Schnitt $y = y_0 =$ konst. in einen Schnitt $y = y_0 + 1$ über. Geometrische Gesichtspunkte treten aber dabei kaum auf. Re.

R. Neuendorff. Über die Kurven auf einer Fläche, deren sphärische Bilder größte Kreise sind. J. für Math. **140**, 175-204.

Es werden diejenigen Kurven einer Fläche betrachtet, deren sphärische Bilder größte Kreise auf der Gaußschen Kugel sind. Der Verf. nennt sie Hauptkreiskurven; daß sie mit den Linien des wahren Umrisses der Fläche bei parallelen Sehstrahlen zusammenfallen, scheint ihm völlig entgangen zu sein. Die Untersuchung ist ganz nach den üblichen Methoden ausgeführt und bietet natürlich weder analytisch, noch geometrisch irgendwelche Schwierigkeiten. Von den aus speziellen Annahmen sich ergebenden Resultaten sei hier erwähnt, daß die einzigen Weingartenschen Flächen, auf denen die Asymptotenlinien die betrachtete Eigenschaft haben, die Rotationsflächen zweiten Grades sind, d. h. also doch von den eigentlichen reellen Flächen zweiten Grades nur das einschalige Rotationshyperboloid. Re.

P. Calapso. Intorno ai sistemi coniugati che col metodo di Laplace si trasformano da entrambi i lati in sistemi ortogonali. Palermo Rend. **31**, 273-295.

In einer früheren Arbeit (Annali di Mat. (3) **13**, 203-248, 1907) hatte der Verf. in allgemeinster Weise x, y, z als Funktionen von α und β bestimmt, derart, daß die Parameterkurven auf der Fläche des Punktes x, y, z ein kongugiertes System mit gleichen Invarianten bilden, das durch eine Laplacesche Transformation in ein orthogonales System übergeht. Ein solches konjugiertes System (G) gibt dem Quadrate des Linienelements die Form

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha^2 + 2\left(\Omega \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right) d\alpha d\beta + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)^2 d\beta^2,$$

wo Ω eine Funktion von α und β ist. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Bedingungen aufgestellt, unter denen eine durch ihre Fundamentalgrößen gegebene Fläche ein Kurvennetz (G) der in Rede stehenden Art zuläßt.

Zu jeder Fläche (S), die ein System (G) zuläßt, gibt es eine zweite (S') derselben Eigenschaft, die der ersteren durch parallele Normalen zugeordnet ist; den Asymptotenlinien auf (S) entspricht ein konjugiertes System auf (S').

Als Beispiele der gefundenen Sätze werden die Flächen zweiten Grades untersucht. Es ergibt sich, daß das einschalige und das zweischalige Hyperboloid

$$\frac{x^2 - y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

je zwei reelle G-Netze zulassen, wenn $a \neq c$; sie fallen zusammen, wenn $a = c$. Von den Paraboloiden gestattet nur das gleichseitige

$$x^2 - y^2 = 2a^2 z$$

ein reelles G-Netz, das Ellipsoid dagegen keins.

Die Tangenten an die Linien $\alpha =$ konst. bilden ein Strahlensystem, dessen Brennfläche (S) ist; die zweite Brennfläche, Σ, wird daraus durch eine Laplacesche Transformation gewonnen. Entsprechendes gilt für die Linien $\beta =$ konst. Diese zweiten Brennflächen werden in einem weiteren Teile der Arbeit untersucht. Damit eine Fäche $z = f(x, y)$ zur Klasse Σ gehört, muß z einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung genügen. Re.

C. Mineo. Sulle rappresentazioni isodromiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 663-667; **20**$_2$, 553-559.

„Isodromisch" heißt nach der Benennung von A. Venturi, Rivista geografica italiana, Firenze 1898, fasc. IX—X, 35-37, eine Abbildung zweier Flächen aufeinander, bei der, ohne daß sie im allgemeinen konform ist, die Loxodromen bewahrt werden, d. h. die isogonalen Trajektorien einer Kurvenschar in die isogonalen Trajektorien der entsprechenden Schar übergeführt werden. Der Verf. betrachtet zunächst die isogonalen Trajektorien einer Schar isometrischer Kurven $v =$ konst. und beweist: Wenn (u, v), (u', v') zwei beliebige isotherme Systeme auf den beiden Flächen sind, so wird die allgemeinste isodromische Abbildung durch die Gleichung

$$u' + iv' = \Phi(ku + e^{\pm i\omega} v)$$

vermittelt, worin Φ eine willkürliche Funktion ihres Arguments und k, ω reelle Konstanten sind. Für $k = 1$, $\omega = \pi/2$, ist die Abbildung konform, und man erhält die Gaußsche Abbildungsformel; für $k \neq 1$, $\omega = \pi/2$ ergibt sich speziell der von Venturi a. a. O. behandelte Fall; für $k = 1$ eine schon von Beltrami betrachtete Abbildung.

Statt der isogonalen Trajektorien einer Schar isometrischer Kurven kann man auch die einer beliebigen Kurvenschar nehmen; das Problem führt dann auf Quadraturen, wie in der zweiten Arbeit gezeigt wird. Re.

A. Demoulin. Sur les surfaces Ω. C. R. **153**, 927-929.

Nach der Definition einer Ω-Fläche gibt es auf jeder ihrer Normalen einen Punkt O derart, daß die abwickelbaren Normalflächen der Ω-Fläche auf der Fläche des Punktes O ein konjugiertes Netz ausschneiden, dessen zugehörige Laplacesche Differentialgleichung gleiche Invarianten hat. Die Ω-Flächen haben gewisse Eigenschaften mit den isothermen Flächen gemeinsam, z. B. geht bei der Inversion jede Ω-Fläche wieder in eine Ω-Fläche über; sie lassen eine der Christoffelschen ähnliche Transformation zu usw. Re.

A. Petot. Extension aux lignes géodésiques d'une propriété cinématique de la ligne droite. C. R. **153**, 168-169.

Wenn eine starre Kurve sich derart bewegt, daß sie immer geodätische Linie der dadurch erzeugten Fläche bleibt, dann hat die Projektion der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte auf die zugehörige Tangente in jedem Augenblick den gleichen Wert für alle Punkte der Kurve. Diese Eigenschaft ist für die geodätischen Linien charakteristisch.

Aus diesem Satze werden noch weitere Folgerungen gezogen, über die eine ausführliche Mitteilung in Aussicht gestellt ist. Re.

M. Fouché. Sur les lignes géodésiques et les surfaces minima. Nouv. Ann. (4) **11**, 153-159.

Es sei aus der Abhandlung der Satz hervorgehoben: Wenn die Niveauflächen Minimalflächen sind, so schneidet eine Kraftröhre auf allen diesen Flächen gleiche Flächenstücke aus. Re.

M. Keraval. Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques appartiennent par leurs tangentes à un complexe linéaire. S. M. F. Bull. **39**, 134-155.

Der Verf. greift das Problem direkt an, ohne es durch die Liesche Berührungstransformation auf die bekannte Bestimmung der Flächen mit sphärischen

Krümmungslinien zurückzuführen. Es ist ihm also entgangen, daß eine solche direkte Lösung bereits von Lie angedeutet und von Arnold Peter in einer Leipziger Dissertation ausgeführt worden ist (Archiv for Math. og Naturvid. **17**; F. d. M. **26**, 708, 1895). Der Verf. betrachtet zunächst die Flächen, bei denen die Haupttangentenkurven der einen Schar solchen linearen Komplexen angehören, deren Achsen einander parallel sind und in einer Ebene liegen. Die Haupttangentenkurven der zweiten Schar besitzen dann dieselbe Eigenschaft; die Achsen ihrer Komplexe liegen in derselben Ebene und stehen auf den Achsen der ersten senkrecht. Man kann alle diese Flächen angeben. Unter ihnen steckt die Enneper sche Minimalfläche und eine andere bemerkenswerte Minimalfläche. Das allgemeine Problem behandelt der Verf. mit Hülfe der Lelieuvreschen Formeln, die aus drei bekannten Lösungen einer Laplaceschen Gleichung: $\vartheta_{uv} = \varkappa(u, v) \cdot \vartheta$ eine Fläche herzustellen gestatten, die auf ihre Haupttangentenkurven: $u =$ konst. und $v =$ konst. bezogen ist. Die Bedingung dafür, daß z. B. die Kurven $v =$ konst. linearen Komplexen angehören, drückt sich durch eine einfache Beziehung zwischen jenen drei Lösungen der Laplaceschen Gleichung aus. Es ergibt sich so eine Klassifikation der in Rede stehenden Flächen nach der Beschaffenheit der allgemeinsten Lösung der zugehörigen Laplaceschen Gleichung. Den Schluß der Arbeit bildet die Anwendung der Lieschen Berührungstransformation. El.

V. Jamet. Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces de révolution. Nouv. Ann. (4) **11**, 129-135.

Die Asymptotenlinien der Rotationsflächen, deren Meridian ein Kegelschnitt ist, werden durch elliptische Funktionen ausgedrückt. Sk.

F. Velísek. Über gewisse Flächen. Časopsis **40**, 446-456. (Böhmisch.)

Der Verf. befaßt sich mit den Flächen, bei welchen die Asymptotenlinien eine Teilung der Fläche in infinitesimale Rhomben bewirken. Pe.

F. E. Edwardes. 1. A proof of Dupin's theorem with some simple illustrations of the method employed.

2. Two methods of obtaining Cayley's condition that a family of surfaces may form one of an orthogonal triad.

3. An extension of Dupin's theorem to the case in which a family of surfaces is cut orthogonally by two other families which intersect at a constant angle, with the condition that a family may be capable of being cut in this manner. Edinb. M. S. Proc. **29**, 41-64.

Die im ersten Artikel benutzte Methode ist kinematisch, und die dem Beweise zugrunde liegende Idee ist, wie der Verf. anmerkt, von Fouché vor-

weggenommen (F. d. M. 38, 636). Die Artikel 2 und 3 enthalten einige geschichtliche Anmerkungen und einige Vereinfachungen vorhandener Beweise.

Gbs. (Lp.)

W. H. Bates. An application of symbolic methods to the treatment of mean curvatures in hyperspace. American M. S. Trans. **12**, 19-38.

Die Arbeit schließt sich an die Untersuchungen an, die Maschke (vgl. American M. S. Trans. **1**, 197 und spätere Arbeiten; s. F. d. M. **37**, 624, 1906) über die Invarianten quadratischer Differentialformen mit Hülfe eines symbolischen Kalküls angestellt hat. Die Kenntnis dieser Arbeiten wird vorausgesetzt. Besonders untersucht werden die Krümmungen (im Kronecker-Gaußschen Sinne) einer n-fachen Mannigfaltigkeit, die in einer $(n+1)$-fachen euklidischen Mannigfaltigkeit enthalten ist. Durch passende Erweiterung der Definitionen der gewöhnlichen Flächentheorie läßt sich eine ganze Reihe von Sätzen auch für die obige Mannigfaltigkeit beweisen, und es ergeben sich unter Benutzung der erwähnten Symbolik verhältnismäßig einfache Ausdrücke der untersuchten Krümmungen.

Re.

J. E. Campbell. A class of orthogonal surfaces with property that from any one of them an infinite number of others can be deduced by differentiation alone. London M. S. Proc. (2) **9**, 410-420.

Wenn ein dreifach-orthogonales System von Flächen gegeben ist, so hängt die Bestimmung eines zweiten, dessen Flächen in entsprechenden Punkten parallele Normalen mit denen des ersten Systems haben, im allgemeinen von der Integration eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung ab. Durch Hinzunahme spezieller Bedingungen gelingt es dem Verf., solche Systeme mit parallelen Normalen zu finden, die durch fortgesetzte Differentiation erhalten werden können.

Zu Beginn der Arbeit findet sich eine kurze Skizze der allgemeinen Theorie der dreifach orthogonalen Systeme, die unter Benutzung der vektoriellen Schreibweise alle wesentlichen Sätze in übersichtlicher und knapper Form bringt.

Re.

R. Rothe. Über die Flächen konstanter mittlerer Krümmung, auf denen die Krümmungslinien ein Kurvennetz ohne Umwege bilden. Deutsche Math. Ver. **20**, 325-334.

R. Rothe. Bemerkungen zu meiner Arbeit: „Über die Flächen konstanter mittlerer Krümmung, auf denen die Krümmungslinien ein Kurvennetz ohne Umwege bilden“. Deutsche Math. Ver. **20**, 404.

Es handelt sich darum, Beispiele von Flächen zu finden, auf denen die Krümmungslinien ein Gewebe (Kurvennetz ohne Umwege) bilden. Als einzige reelle Fläche ist bis jetzt, von Ebene, Zylinder, Kugel abgesehen, die gemeine

Schraubenfläche bekannt. Der Verf. bestimmt alle Flächen konstanter mittlerer Krümmung dieser Eigenschaft; es sind zugleich die einzigen isothermen Flächen dieser Beschaffenheit; sie sind Schraubenflächen, nämlich erstens diejenigen, für die das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = -\frac{2}{h^2}(\wp(u+v) - c)(du^2 + dv^2)$$

wird, wo u, v die isothermen Parameter der Krümmungslinien, c und h Konstanten sind; zweitens gemeine Schraubenflächen, drittens die algebraische geradlinige Minimalfläche dritter Ordnung. Mit Ausnahme der reellen gemeinen Schraubenfläche sind sie alle nicht reell.

Die Bemerkung bezieht sich auf die Literatur der geradlinigen Minimalflächen. Re.

I. Favini. Sulle superficie le cui linee di curvatura tagliano sotto angolo costante le linee di livello. Batt. G. **49** [(3) **2**], 309-340.

Die Flächen, auf denen die Krümmungslinien die Niveaulinien isogonal schneiden, sind von Bianchi (Rom. Acc. L. Rend. (4) 7_1, 4-13; F. d. M. 23, 802, 1891) zuerst betrachtet worden. An diese Untersuchungen anknüpfend, zeigt der Verf., daß diese von Bianchi als Φ-Flächen bezeichneten Flächen identisch sind mit den Assoziierten der Minimalschraubenflächen, daß also ihre Bestimmung auf das Problem der infinitesimalen Deformation des letzteren hinauskommt. Die Minimalschraubenflächen gehören selbst zu den Φ-Flächen und sie nebst ihren Parallelflächen sind die einzigen Weingartenschen Flächen der Klasse. Die Φ-Flächen lassen sich andererseits charakterisieren als die Orthogonalflächen derjenigen Ribaucourschen Kongruenzen, die eine Minimalschraubenfläche als erzeugende Fläche besitzen. Dabei ergibt sich ein Zusammenhang des behandelten Problems mit den ebenen Guichardschen Kongruenzen. Sk.

E. Traynard. Sur une propriété des lignes de courbure. Revue de Math. spéc. **21**, 283-284.

Beweisanordnungen von Demartres für den Satz, daß Krümmungslinien bei Inversion in Krümmungslinien übergehen. Sk.

G. Valiron. Sur l'inversion des lignes de courbure. Revue de Math. spéc. **21**, 238-239.

Geometrischer Beweis. Sk.

L. Bianchi. Alcune formule inedite di J. Weingarten con applicazioni. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 77-95.

Der Verf. teilt zu Beginn dieser Arbeit einige noch nicht veröffentlichte Formeln von Weingarten mit, die ihm dieser gelegentlich eines Brief-

wechsels 1884 angegeben hatte. Diese wichtigen Formeln geben die Variationen der Fundamentalgrößen einer Fläche, wenn diese eine infinitesimale normale Deformation erleidet, d. h. wenn ihre Punkte auf den zugehörigen Normalen in demselben Richtungssinn um ein Stück $\varepsilon \cdot n(u, v)$ verschoben werden, wo $n(u, v)$ eine stetig differenzierbare Funktion des Ortes auf der Fläche und ε eine Konstante bedeutet, die von erster Ordnung infinitesimal ist. Bis auf Glieder höherer Ordnung ist alsdann nach Weingarten

$$\delta E = -2\varepsilon n L, \quad \delta L = \varepsilon(n_{11} - n\mathfrak{E}),$$
$$\delta F = -2\varepsilon n M, \quad \delta M = \varepsilon(n_{12} - n\mathfrak{F}),$$
$$\delta G = -2\varepsilon n N, \quad \delta N = \varepsilon(n_{22} - n\mathfrak{G}),$$

worin $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ die Fundamentalgrößen der Gaußschen Kugel und n_{ik} die Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante, nämlich

$$n_{ik} = \frac{\partial^2 n}{\partial u_i \partial u_k} - \begin{Bmatrix} ik \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial n}{\partial u_1} - \begin{Bmatrix} ik \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial n}{\partial u_2} \qquad (i, k = 1, 2;\ u_1 = u,\ v_1 = v)$$

bedeuten. Bianchi gibt zunächst einen einfachen Beweis der Weingartenschen Formeln, erweitert sie sodann auf den Fall einer n-fachen Hyperfläche eines Riemannschen Raumes konstanten Krümmungsmaßes, wendet sie auf dreifache Orthogonalsysteme an und benutzt sie zu Untersuchungen über das Bekleidungsproblem. Von den gefundenen Sätzen seien folgende hervorgehoben:

Das einzige Kurvennetz auf einer Fläche, das aus starren Linien besteht und derart deformiert werden kann, daß die Knotenpunkte sich normal zur Fläche bewegen, wird aus dem doppelt-unendlichen System der erzeugenden Geraden einer Fläche zweiten Grades gebildet, die bei der Bewegung in die konfokalen Flächen übergeht.

Die einzigen ebenen Netze, die aus starren Kurven zusammengesetzt sind, sind diejenigen des Tschebyschefschen Bekleidungsproblems. Re.

L. Bianchi. Sulle trasformazioni di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 145-150.

Es handelt sich um den Zusammenhang zwischen der Guichardschen Transformation der Biegungsflächen der Flächen zweiten Grades mit der Transformation B_k der W-Strahlensysteme. Re.

C. Guichard. Sur les surfaces dont les normales touchent une quadrique. C. R. **152**, 117-121.

G. Darboux. Remarque sur la communication de M. Guichard. C. R. **152**, 121-124.

In der ersteren Arbeit werden folgende Sätze bewiesen: Ein Punkt C beschreibe eine geodätische Linie der Fläche zweiten Grades:

$$\frac{x^2}{1-p_1^2}+\frac{y^2}{1-p_2^2}+z^2=1,$$

und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ seien die Richtungskosinus der Tangente dieser geodätischen Linie; dann beschreibt der Punkt mit den Koordinaten

$$\xi=\sqrt{1-p_1^2}\cdot\alpha_1,\quad \eta=\sqrt{1-p_2^2}\cdot\alpha_2,\quad \zeta=\alpha_3$$

ebenfalls eine geodätische Linie der Fläche zweiten Grades. Die darin festgesetzte Transformation ist von der Ordnung zwei.

Von der Bestimmung der geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades hängt, bis auf eine Quadratur, auch die Bestimmung der Flächen ab, bei denen zwischen den Koordinaten eines Punktes der einen Evolutenschale und dem zugehörigen Krümmungsradius eine beliebige Gleichung zweiten Grades besteht.

Kennt man eine Liouvillesche Fläche, worunter eine solche verstanden ist, deren Normalen zwei konfokale Flächen zweiten Grades berühren, so kann man daraus spezielle Biegungsflächen von Flächen zweiten Grades ableiten.

In der zweiten Arbeit verweist Darboux mit Bezug auf das zweite der vorstehenden Resultate auf seine früheren Untersuchungen vom Jahre 1876: die Bestimmung aller jener Flächen hängt von einer partiellen Differentialgleichung von nur der ersten Ordnung ab; man kann diese in einen gewissen Zusammenhang bringen mit den vierfachen Orthogonalsystemen eines vierdimensionalen Raumes. Re.

C. Guichard. Sur la déformation des quadriques. C. R. **152**, 349-353.

Spezielle Untersuchungen über die im vorstehenden Referat erwähnten Biegungsflächen von Flächen zweiten Grades, die sich aus einer Liouville-schen Fläche ableiten lassen. Ge.

C. Guichard. Sur les réseaux C tels que les lignes d'une série soient des courbes planes. C. R. **152**, 834-837.

Zur Konstruktion der konjugierten Netze mit der in der Überschrift angegebenen Eigenschaft bedient sich der Verf. der von ihm als p-fach isotrop bezeichneten Kurven: Sind $X_1(u), X_2(u), \ldots, X_n(u)$ die Koordinaten eines ihrer Punkte, so ist die Kurve p-fach isotrop, wenn

$$\Sigma X'^2=0,\quad \Sigma X''^2=0,\ldots, \Sigma X^{(p)^2}=0,\quad \Sigma X^{(p+1)^2}\neq 0.$$

Der Verf. wählt für $n=7$, $p=3$ zwei Kurven, (X) mit dem Parameter u, (Y) mit dem Parameter v, und setzt

$$Z_i=X_i+pX_i'+qX_i'',\quad T_i=Y_i+rY_i'+\varrho Y_i''\quad (i=1,\ldots,7),$$

worin p, q, r, ϱ beliebige Funktionen von u und v sind, die so bestimmt werden, daß:

$$Z_4 = T_4,\ Z_5 = T_5,\ Z_6 = Z_6,\ Z_7 = T_7.$$

Dann wird

$$dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 = dT_1^2 + dT_2^2 + dT_3^2;$$

d. h. die beiden von den Punkten $A = (Z_1, Z_2, Z_3)$ und $B = (T_1, T_2, T_3)$ beschriebenen Flächen sind aufeinander abwickelbar. Der Punkt (X_1, X_2, X_3) beschreibt eine Kurve, auf deren Schmiegungsebene sich A bewegt, wenn v allein verändert wird; das Entsprechende gilt von (Y_1, Y_2, Y_3), u, B. Aber (u, v) bilden auf den Flächen der Punkte A, B konjugierte Netze; diese haben also die Eigenschaft, daß auf der einen Fläche die Schar (u), auf der Biegungsfläche die Schar (v) aus ebenen Kurven besteht. Re.

C. Guichard. Sur certains systèmes triple-orthogonaux qui se déduisent de courbes plusieurs fois isotropes. C. R. **152**, 1726-1730.

Mittels des Begriffs der p-fach isotropen Kurve — vgl. das vorstehende Referat — leitet der Verf. in expliziter Form eine Reihe dreifach-orthogonaler Systeme ab, unter denen sich auch die von Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux, 2e éd., note III, studierten befinden. Re.

C. Guichard. Sur une classe très étendue de systèmes triple-orthogonaux. C. R. **153**, 858-862.

Bezieht sich auf ähnliche Untersuchungen wie die in den vorhergehenden Referaten erwähnten Arbeiten desselben Verfassers; wegen der Resultate muß auf das Original verwiesen werden. Re.

M. Servant. Surfaces isothermiques et surface de Bonnet qui se rattachent à la déformation des quadriques. S. M. F. Bull. **39**, 162-169.

Es werden speziell die Bonnetschen isothermen Flächen behandelt, die eine Biegung mit Invarianz der Hauptkrümmungen gestatten. Durch die Einführung elliptischer Funktionen ergibt sich eine gewisse Transformation dieser Flächen sehr elegant. Die S. 163 angegebene Isothermiebedingung gilt nur, wenn etwa $u = p + iq$, $v = p - iq$, und p, q Parameter der Krümmungslinien bedeuten, was dort nicht ausdrücklich gesagt ist. Re.

P. Calapso. Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni. Palermo Rend. **32**, 365-385.

Die vorliegende Arbeit studiert die von Guichard 1905 angegebene Transformation der Biegungsflächen der Mittelpunktsflächen zweiten Grades

und den Zusammenhang dieser Transformation mit der von Bianchi angegebenen D_m. Die Formeln und Sätze dieser Untersuchungen lassen sich nicht kurz wiedergeben; es muß daher auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Re.

B. K. Mlodzeiowski. Über eine Transformation der unendlich kleinen Biegungen. Moskau Math. Samml. 28, 205-214. (Russisch.)

Jeder unendlich kleinen Biegung der Fläche entspricht eine andere Fläche, von der jedes Element zu dem entsprechenden Element der ersten orthogonal ist. Anwendung der Formeln von Lelieuvre (Darboux Surf. 4, 24) führt für die zweite Fläche zum Ausdruck von α, β, γ und ω (ω Lösung von $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \varkappa \vartheta$, wo $\varkappa$ eine gegebene Funktion von u, v). Darboux hat (Leçons 4, 83) eine Transformation der $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ angegeben. Diese wird vom Verf. unter dem Namen der zusammengesetzten affinen Transformation untersucht. Si.

D. Th. Egorov. Über die Biegung mit Hauptbasis im Falle einer Familie ebener oder konischer Linien. Moskau Math. Samml. 28, 167-187. (Russisch.)

Konische Linien heißen solche, längs deren die Tangentialebenen der Fläche eine Kegelfläche bilden. Die Aufgabe von K. Peterson (Moskau Math. Samml. 1) über Biegung mit einer Hauptbasis, welche aus zwei ebenen oder konischen Linien besteht, ist durch die Untersuchungen von B. K. Mlodzeiowski (Moskau M. Samml. 24; F. d. M. 35, 653, 1904) erledigt. Der Verf. hat sich die allgemeinere Aufgabe gestellt, sämtliche Biegungen mit Hauptbasis zu finden, deren eine Familie aus ebenen oder konischen Linien besteht. Die Lösung ist C. R. 145 (F. d. M. 38, 634, 1907) angegeben. Hier wird die Lösung vollständig dargestellt. Außer den an der betreffenden Stelle angeführten Sätzen wird bewiesen: 3. Besteht eine der Familien des konjugierten Systems, der Hauptbasis der Biegung, aus ebenen Linien, so gilt dasselbe auch für die zweite Familie. 4. Tangentialkoordinaten θ_i der Fläche S, welche die Biegung mit Hauptbasis zuläßt mit einer Familie konischer Linien, werden durch die Gleichungen bestimmt:

$$\theta_1 = \frac{2U_1}{u+v} - U_1', \; \theta_2 = \frac{2U_2}{u+v} - U_2'. \; \theta_3 = \frac{2V_3}{u+v} - V_3', \; \theta_4 = \frac{2U_4}{u+v} - U_4',$$

wo U_4 willkürliche, U_1, U_2 durch die Beziehung

$$U_1^2 + U_2^2 = a_0 u^4 + a_1 u^3 + a_2 u_2^2 + a_3 u + a_4$$

verknüpft sind,

$$V_3^2 = - a_0 v^4 + a_1 v_3 - a_2 v^2 + a_3 v - a_4.$$

5. Läßt die Fläche eine infinitesimale Biegung mit einer Hauptbasis zu,

deren eine Familie aus ebenen Linien besteht, so besteht auch die konjugierte Familie aus ebenen Linien. Entsprechender Satz für konische Linien.

Si.

L. Bianchi. Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche. Annali di Mat. (3) **18**, 1-67.

Es handelt sich um die Bestimmung solcher stetigen Verbiegungen einer pseudosphärischen Fläche, bei denen die Verbiegungsrichtung für alle Punkte einer Fläche mit ihr einen konstanten Winkel σ bildet (der i. a. von Fläche zu Fläche variieren kann). Eine solche Schar Σ von pseudosphärischen Flächen hängt analytisch ab von einem System simultaner partieller Differentialgleichungen, deren Lösung vier willkürliche Funktionen enthält. An Stelle des Versuchs einer analytischen Lösung, der ausssichtslos erscheint, benutzt Bianchi die Theorie der Bäcklundschen Transformation, die aus jedem System Σ ein gleichartiges hervorgehen läßt. Da ferner zu zwei Bäcklundschen Transformationen eines gegebenen Systems Σ ein drittes durch endliche Operationen angegeben werden kann (Vertauschbarkeitssatz) und das Verfahren unbeschränkt in seiner Anwendbarkeit ist, so erhält man nach Lösung einer Riccatischen Gleichung aus einem System Σ beliebig viele weitere Systeme (die also von beliebig vielen Konstanten abhängen) ohne weitere Integrationen. Die Grundlage des Ganzen bildet der Satz, daß jeder infinitesimalen isogonalen Transformation einer pseudosphärischen Fläche eine pseudosphärische Kongruenz entspricht, deren Strahlen erhalten werden, indem man in den Tangentialebenen der Fläche die Geraden konstruiert, die auf der Verschiebungsrichtung des Berührungspunktes senkrecht stehen. Von speziellen Systemen Σ werden die pseudosphärischen Schraubenflächen hervorgehoben; sie sind die einzigen, die durch eine passende Schraubenbewegung ein Σ-System erzeugen, so daß bei ihnen (und nur bei ihnen) die kontinuierliche Biegung sich auf eine bloße Bewegung reduziert. Alle derartigen Systeme von Schraubenflächen (und nur diese) sind gleichzeitig Laméсhe Flächenscharen. Sk.

L. Bianchi. Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica. Annali di Mat. (3) **18**, 185-243.

Die Anordnung der Untersuchung ist ganz entsprechend wie für den euklidischen Raum (Annali di Mat. (3) **18**, 1; Referat vorstehend), auch der analytische Apparat unterscheidet sich nur wenig von den früheren Entwicklungen. Jeder infinitesimalen Deformation (unter konstantem Winkel) einer pseudosphärischen Fläche S_0 im euklidischen Raum entspricht eine gleichartige Deformation einer pseudosphärischen Fläche S im elliptischen oder hyperbolischen Raum. Dadurch ist, wie schon früher das Biegungsproblem (s. Lezioni III, 234), auch das Problem der kontinuierlichen isogonalen Biegung auf die entsprechende Aufgabe des euklidischen Raumes zurückgeführt. Im elliptischen Raum kann man aus einem System Σ durch Polarisierung an der absoluten Fläche ein neues System Σ gewinnen. Eine besondere Rolle spielen die Sy-

steme Σ, die aus Flächen von der Krümmung Null bestehen: Hier ist die Verschiebungsrichtung längs der einen Schar von Asymptotenlinien parallel und von demselben Sinne wie die Binormalen dieser Asymptotenlinien. Die Systeme Σ, deren Flächen auseinander durch bloße Verschiebung (ohne Biegung) hervorgehen, bestehen aus Flächen, deren Asymptotenlinien nicht nur konstante Torsion, sondern auch konstante Krümmung besitzen. Zum Schluß wird noch die Frage nach Systemen Σ im euklidischen Raume behandelt, die aus abwickelbaren Flächen bestehen. Sk.

H. Keefer. Ein Satz über geradlinige W-Flächen und sein Beweis. Math. naturw. Mitt. (2) **13**, 33-39.

Bemerkungen über den Satz, daß die einzigen reellen geradlinigen Flächen, die zugleich Weingartensche sind, die geradlinigen Schraubenflächen sind.
Re.

E. Keraval. Surfaces engendrées par le déplacement d'une courbe plane indéformable, de telle sorte qu'il existe un cône circonscrit le long de la courbe. Nouv. Ann. (4) **11**, 481-498.

Es werden zunächst einige spezielle Flächen der in der Überschrift angegebenen Art untersucht: Rotationsflächen vierten Grades, die durch Rotation eines Kegelschnitts entstehen. Die Bestimmung der Asymptotenlinien führt auf elliptische Integrale. Sodann werden die allgemeinen Rotationsflächen betrachtet; sie entstehen durch Rotation einer Dreieckskurve:

$$z = \mu y, \quad (y - ax)^m = K(y - bx)^{m-1} \cdot (y - h),$$

mit der Bedingung $a:b = (m-1):m$, um die z-Achse (μ, a, b, h, K bedeuten Konstanten). Auch der allgemeine Fall führt auf derartige Kurven. Eine Fortsetzung der Arbeit ist in Aussicht gestellt. Re.

L. Tuschel. Über eine Verallgemeinerung der Schiebflächen. Wien. Ber. **120**, 1749-1762.

Der Verf. betrachtet die Punkttransformation, die sich aus einer Parallelverschiebung des Raumes in Richtung einer gegebenen Geraden A, einer Drehung um diese Gerade und einer axialen Schiebung zusammensetzt; dabei ist unter einer axialen Schiebung eine solche verstanden, die einen Punkt P auf einer die Gerade A senkrecht schneidenden Geraden derart nach P' überführt, daß $AP' - AP =$ konst. Diese ∞^3 Punkttransformationen bilden eine transitive Gruppe. Eine Raumkurve geht in ∞^3 Kurven über, die auf kongruenten geraden Konoiden der Achse A gelegen sind. Faßt man ∞^1 dieser Kurven zu einer Schar zusammen, so entsteht eine Fläche Φ, auf der noch eine zweite ∞^1 Schar solcher Kurven gelegen ist. Diese Fläche wird axiale Schiebfläche benannt, und daran knüpfen sich nun Untersuchungen sehr einfacher Art, die aber besonders für die zeichnerische Behandlung der Flächen wichtig sind.
Re.

John Miller. On a class of surfaces. Edinb. M. S. Proc. **29**, 65-74.

Eine Diskussion gewisser Oberflächen (surfaces moulures), die von Darboux in seinen Leçons sur les systèmes orthogonaux betrachtet sind. Die Behandlung bewegt sich auf anderen Geleisen als bei Darboux.

Gbs. (Lp.)

O. Blumenthal. Kanalflächen und Enveloppenflächen. Math. Ann. **70**, 377-404.

Kanalflächen K sind nach Poincaré (F. d. M. **29**, 370, 1898) solche Flächen, mit deren Hülfe ein Gebilde S niedrigerer Dimension aus einem es enthaltenden linearen R_n derart ausgeschnitten wird, daß die Punkte des Außenraumes von K einen bestimmten Mindestabstand ε von S besitzen, die „Weite" von K. Die Fläche $K(\varepsilon)$ hängt eng zusammen mit der Enveloppenfläche $E(\varepsilon)$, d. i. der Enveloppe aller Kugeln vom Radius ε, deren Zentrum M sich auf S bewegt.

Das Gebilde S sei analytisch, und gegeben in Parameterform, von der Dimension $2m$ und liege in einem R_{2n}. Entweder sind dann die $2n$ Koordinaten von S als reelle Funktionen von $2m$ reellen Parametern gegeben, oder aber sie lassen sich zu n komplexen Verbindungen, Funktionen von m komplexen Parametern, zusammenfassen. Im ersteren Falle kann K Partien enthalten, die E nicht angehören, im letzteren Falle dagegen gehört jeder Punkt von K auch E an, so daß hier den Funktionen komplexer Argumente die größere Einfachheit zukommt. Im folgenden ist $m = n - 2$ gewählt.

Behufs expliziter Darstellung der E sind einige algebraische Vorbetrachtungen nötig. Sind $x_1, \ldots, x_n$ komplexe Variabeln, so liege vor ein System von $n-1$ (unabhängigen) linearen Gleichungen $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = A_i$ und der quadratischen Gleichung $\Sigma |x_k|^2 = \varepsilon^2$ (ε^2 reell positiv); es sind für dieses System (L) die Lösbarkeitsbedingungen anzugeben, sodann ist die Gesamtheit der Lösungen explizit darzustellen.

Unter $R, \bar{R}$ seien die beiden Determinanten $R = |x_i \bar{a}_{i1} \cdots \bar{a}_{in}|$, $\bar{R} = |\bar{x}_i a_{i1} \cdots a_{in}|$ verstanden, so läßt sich $R\bar{R} = |R|^2$ als eine Determinante H darstellen, so daß $R = \eta \sqrt{H}$, $\cos |\eta| = 1$. Wenn also das System (L) überhaupt Lösungen besitzt, so ist $H \geqq 0$, und alle Lösungen von L sind auch solche des linearen Systems (L_1):

$$R = \eta \sqrt{H} = \Sigma \frac{\partial R}{\partial x_i} x_i,\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = A_k,$$

und dieser Satz läßt sich umkehren.

Somit ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (L), daß $H \geqq 0$ ist, und die allgemeine Lösung von (L) enthält dann den einen willkürlichen Parameter η vom Betrage 1.

Dies Ergebnis läßt sich ausdehnen auf ein mit (L) analoges System (N), das entsteht, wenn man es an Stelle der $n-1$ linearen Gleichungen mit nur $n-m$ solchen zu tun hat. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems N enthält $2m-1$ Winkelgrößen als Parameter, von denen $m-1$ zwischen 0

und $\frac{\pi}{2}$, und m zwischen 0 und 2π variieren. Zu verschiedenen Wertsystemen dieser Parameter innerhalb der angegebenen Spielbereiche gehören aber auch verschiedene Lösungssysteme von (N).

Sodann bedarf man des Begriffes eines „algebroiden" Gebildes m-ter Stufe im Gebiete der n komplexen Variabeln x_i. Sind die m Größen y_k komplexe Parameter, und versteht man unter $\mathfrak{P}_i(y)$ eine zugleich mit den y_k verschwindende Potenzreihe der y_k, so definieren n solche Potenzreihen (a) $\mathfrak{P}_i(y) = x_i - x_i^{(0)}$ ein Element eines analytiscehn Gebildes m-ter Stufe, vorausgesetzt, daß nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix $\left|\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right|$ identisch in den y verschwinden.

Bedeutet X einen den Punkt (x^0) umschließenden einfach zusammenhängenden Bereich, so heißt das durch das Element (a) definierte Gebilde innerhalb X „algebroid", wenn sich zu jedem Punkte (x^1) von X, in dessen Umgebung Fortsetzungen des Elementes (a) liegen, m Parameter y_k so angeben lassen, daß sich die Koordinaten aller Fortsetzungen von (a) in einer gewissen Umgebung von (x^1) unter den Wurzeln eines „algebroiden" Gleichungssystems befinden, das von der Gestalt ist:

$$\text{(A)} \quad x_i^{\nu_i} + p_1^{(i)}(y)\, x_i^{\nu_i - 1} + \cdots + p_{\nu_i}^{(i)}(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die $p(y)$ im Punkte (0) verschwindende Potenzreihen bedeuten.

Sei jetzt G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der n komplexen Variabeln z_i, und im (z)-Raume sei eine Mannigfaltigkeit (S) $(n-2)$-ter Stufe vermöge $n-2$ Parametern t_k $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$ definiert durch: $z_i = \zeta_i(t)$, wo die ζ_i regulär sind.

Das innerhalb G gelegene Stück von (S) heiße S.

Das Zentrum einer Kugel $\sum |z_i - \zeta_i|^2 = \varepsilon^2$ bewege sich über S hin, die Enveloppe dieser Kugeln werde als die „Enveloppenfläche E_ε zu S" bezeichnet. Die $(n-2)$-reihigen Minoren der Matrix $\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial t_k}\right|$ heißen die Funktionaldeterminanten. Verschwinden dann an der Stelle (ζ) nicht alle Funktionaldeterminanten, so ist in jedem zugehörigen Punkte (z) die Enveloppenfläche regulär. Hinterher werden noch die Grenzpunkte der Enveloppenfläche bestimmt, die Punkten (ζ) mit verschwindenden Funktionaldeterminanten zugeordnet werden. Damit ergibt sich als vollständige Definition von E_ε: Die Enveloppenfläche E_ε ist die Gesamtheit der durch die Kugelgleichung nebst den Enveloppenbedingungen definierten regulären Punkte und ihrer Grenzpunkte.

Sodann wird die „Kanalfläche K_ε von der Weite ε um S" dahin bestimmt, daß jeder Punkt von K_ε von mindestens einem S-Punkte den Abstand ε besitzt, von keinem Punkte aber einen kleineren Abstand.

Ist S_1 ein zusammenhängender Teil von S, so bildet die $K_\varepsilon(S_1)$ eine stetige, $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Während leicht einzusehen ist, daß jeder Punkt von E_ε auch der K_ε angehört, so stößt der Beweis der Umkehrung auf nicht geringe Schwierigkeiten. Die wesentliche Voraussetzung ist, daß S als analytisches Gebilde mit komplexen Koordinaten definiert ist. Zunächst läßt sich zeigen, daß alle Punkte von K_ε, die S-Punkten mit nicht sämtlich verschwindenden Funktionaldeter-

minanten entsprechen, auch E_ε angehören. Weiter aber ist zu beweisen, daß die Punkte von K_ε, die S-Punkten mit sämtlich verschwindenden Funktionaldeterminanten zugehören, Grenzstellen sind von Kanalflächenpunkten, an deren S-Punkten nicht alle Funktionaldeterminanten verschwinden. Die Schwierigkeit hierbei wird veranlaßt durch die „irregulären“ S-Punkte, an denen keine $n-2$ Parameter t der oben angeführten Art existieren. Wählt man zuvörderst den niedrigsten Fall $n=4$, so zeigt sich, daß es nur eine endliche Anzahl von irregulären S-Punkten gibt. Einem solchen irregulären Punkte im (t)-Raume entspricht als Abbild eine ganze Kurve, und hieraus folgt die behauptete Endlichkeit.

Allgemein bildet sich ein irregulärer Punkt vom Range ϱ im (t)-Raume ab auf algebroide Mannigfaltigkeiten einer Stufe $\leqq n-2-\varrho$. Daraus läßt sich folgern, daß die Menge der irregulären Punkte vom Range ϱ höchstens aus einer endlichen Anzahl von algebroiden Mannigfaltigkeiten $(\varrho-1)$-ter Stufe besteht. Damit wird aber die oben betonte Schwierigkeit überwunden.

Am Schlusse werden noch die Bedingungen dafür aufgestellt, daß Punkte von E_ε existieren, die nicht K_ε angehören.

Das Hauptergebnis ist, daß sich für genügend kleine Werte von ε die Flächen E_ε und K_ε nur um Gebiete von beliebig geringer Gesamtausdehnung unterscheiden. My.

O. Bolza. Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn H. Weber: „Über den Satz von Malus für krummlinige Lichtstrahlen“. Palermo Rend. **32**, 263-266.

Die Arbeit, das Ergebnis eines Briefwechsels zwischen dem Verf. und H. Weber, enthält eine wesentliche Korrektur des von H. Weber, Palermo Rend. **29**, 396-406, 1910, ausgesprochenen Satzes, daß längs eines jeden Lichtstrahls in einem inhomogenen Medium von stetig veränderlichem Brechungsindex $n(x, y, z)$ die Gleichung bestehen muß $n \cdot \sin\theta = \text{konst.}$, wo θ den Einfallswinkel des Strahles bedeutet. Vielmehr gilt dieser Satz nur, wenn die Flächen von konstantem n parallele Ebenen sind. Dieses Resultat wird bewiesen, und weitere Bemerkungen werden daran geknüpft. Re.

Ch. Bioche. Sur les surfaces qui ont un axe ternaire. Revue de Math. spéc. **21**, 261-264.

Eine Figur besitzt eine Gerade G als ternäre Achse, wenn sie nach einer Rotation um $\frac{2}{3}\pi$ in sich selbst übergeht; die Gleichung einer Fläche, die die Gerade $x=y=z$ als ternäre Achse besitzt, hat die Form

$$F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2,\ xyz,\ (y-z)(z-x)(z-y)).$$

Beispiele: Flächen dritter Ordnung, Raumkurven dritter Ordnung. Sk.

C. Hoffmann. Lösung zu 353 (R. Mehmke). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 364-365.

Verallgemeinerung der Aufgabe 323 (Arch. d. Math. u. Phys., Bd. 16, 358): Es seien p und q zwei Punkte, die unabhängig voneinander zwei gewundene Kurven C_p und C_q durchlaufen. Ein veränderlicher Punkt x habe die Abstände r_1 und r_2 von p und q. Die Fläche, die x beschreibt, wenn — bei ruhenden p und q — irgendeine bilineare Funktion $f(r_1, r_2)$ von r_1 und r_2 konstant bleibt, heiße φ. Die Gesamtheit der Flächen φ, die zu den verschiedenen Lagen von p und q gehören, möge eine Hüllfläche $\boldsymbol{\Phi}$ besitzen. Dann liegt (von Sonderfällen abgesehen) jeder Berührungspunkt von φ mit $\boldsymbol{\Phi}$ gleichzeitig in der Normalebene der Kurve C_p in p und in der Normalebene der Kurve C_q in q. Gd.

C. Hoffmann. Lösung zu 355 (R. Mehmke). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 366-369.

Gegeben n beliebige (gewöhnliche) krumme Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Von jeder werde nur ein solches Stück betrachtet, das eine einzige Tangentialebene parallel einer (innerhalb gewisser Grenzen) beweglichen Ebene ε zuläßt, und es bezeichne α_i den Berührungspunkt der i-ten Fläche mit der betreffenden Tangentialebene, u_i ihren Abstand von der Ebene ε. Bewegt sich ε so, daß irgendeine Funktion $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ der Abstände u_i konstant bleibt, und heißt $\boldsymbol{\Phi}$ die entsprechende Hüllfläche, so findet man den Berührungspunkt von ε mit $\boldsymbol{\Phi}$, indem man den Schwerpunkt der mit den Gewichten $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ versehenen Punkte α_i rechtwinklig auf ε projiziert. — Anwendung auf drei Kugeln. Gd.

Weitere Literatur.

F. Blum. Die infinitesimale Biegung von Flächen bei vollständiger Starrheit eines Kurvensystems. Diss. Tübingen. 41 S. 8°. (1909).

L. P. Eisenhart. Conjugate systems and envelopes of spheres. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 287.

P. Funk. Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien. Diss. Göttingen. 23 S. 8°.

Z. Geöcze. Über die Quadratur der Flächen. Math. és. phys. lapok **20**, 255-301. (Ungarisch).

O. Joachimi. Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen durch eine quadratische Beziehung verknüpft sind. Diss. Münster.

L. Keisker. Beiträge zu den Anwendungen der Theorie der unendlich kleinen Schraubungen auf Raumkurven. Münster. 44 S. 8°.

O. Reimerdes. Die Niveau- und Fallinien auf Flächen, insbesondere auf Modulflächen analytischer Funktionen. Diss. Kiel.

J. B. Shaw. Use of quaternions in differential geometry. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 302-303.

A. E. Young. On certain orthogonal systems of lines and the problem of determining surfaces referred to them. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**.

B. Theorie der algebraischen Raumkurven und Flächen.

H. W. E. JUNG. Über das numerische Geschlecht einer algebraischen Fläche. Hamb. Mitt. 5, 20-42.

Der Grad einer algebraischen Kurve $F(y, z) = 0$ läßt sich auf zwei Arten definieren, entweder (1), durch die höchste Dimension (Grad) n der in F auftretenden Glieder $y^\alpha z^\beta$, oder (2), durch zwei Zahlen m, n, {den Grad (m, n)}, die größten Exponenten von y und z. Entsprechend ist auch der Doppelpunktdivisor verschieden zu definieren, und es existieren zwei Formeln für das Geschlecht p der Kurve. Für $2\bar{d}$ als Ordnung des Doppelpunktdivisors, kommt im ersten Falle: (1) $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \bar{d}$. Ist im zweiten Falle $2d$ die Ordnung des Doppelpunktdivisors, so wird: (2) $p = (m-1)(n-1) - d$. Analog verhält es sich mit dem numerischen Geschlecht p_n einer algebraischen Fläche $F(x, y, z) = 0$. Die Fläche habe nur eine Doppelkurve, und nur t dreifache isolierte singuläre Punkte. Es sei wieder n der Grad von F, d die Ordnung der Doppelkurve, π deren Geschlecht, τ die Anzahl der dreifachen Punkte, so ist

$$(3) \quad p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - d(n-4) + 2\tau - t + \pi - 1.$$

Im zweiten Falle sei (l, m, n) der Grad von F, (d', d'', d''') die Ordnung der Doppelkurve, so tritt an die Stelle von (3) die Bestimmung:

$$(4) \quad p_n = (l-1)(m-1)(n-1) - d'(l-2) - d''(m-2) - d'''(n-2) + 3\tau - t + \pi - 1.$$

Wir begnügen uns im wesentlichen damit, den Beweisgang für den Fall ebener Kurven $F(\overset{m}{y}, \overset{n}{z}) = 0$ zu skizzieren. Zugrunde liegen drei Hülfssätze über Divisoren. Seien $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ die Nenner von y, z im Körper $F = 0$, $\mathfrak{d}$ der Doppelpunktsdivisor, von der Ordnung $2d$, $\mathfrak{g}$ irgendein ganzer Divisor, $\mathfrak{q}$ irgendein Divisor des Körpers F, von der Ordnung q.

Dann ist (a) jede Funktion von der Form $\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{g}}{\mathfrak{m}^\mu \mathfrak{n}^\nu}$ ganzrational in y, z darstellbar, von den Graden $\mu \geqq m-1, \nu \geqq n-1$; (b) die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers F von der Form $\frac{\mathfrak{q}\mathfrak{g}}{\mathfrak{m}^\mu \mathfrak{n}^\nu}$ ist gleich $\mu n + \nu m - q - p + 1$, sobald μ, ν genügend hoch genommen werden; (c) für $\mathfrak{d} = 1$ hat das Geschlecht p der Kurve F den Wert $(m-1)(n-1)$.

Man bestimme jetzt zunächst die Anzahl r der linear unabhängigen ganzen rationalen Funktionen $S(y, z)$ von einer Ordnung $\leqq (\mu, \nu)$, die im Körper F durch $\mathfrak{d}$ teilbar sind. Diese Funktionen S sind entweder identisch Null oder nicht. Im ersteren Falle sind sie von der Gestalt $g(\overset{\mu-m}{y}, \overset{\nu-n}{z}) \cdot F$, so daß ihre Anzahl r' wird: $r' = (\mu - m + 1)(\nu - n + 1)$. Die S der zweiten Art sind von der Form des Hülfssatzes (a); damit wird zufolge des Satzes (b) ihre Anzahl: $r'' = \mu n + \nu m - 2d - p + 1$, und folglich die gesuchte Gesamtzahl r aller S: (5) $r = r' + r'' = (\mu + 1)(\nu + 1) + (m-1)(n-1) - p - 2d$.

Man verstehe unter m_1, n_1 zwei ganze Zahlen zwischen m und μ, bzw. n und ν, die also zugleich mit μ, ν beliebig groß wählbar sind, und unter S' die Gesamtheit aller irreduzibeln Funktionen G des Systems S, die höchstens vom Grade (m_1, n_1) sind. Die Ordnung 2δ des Doppelpunktdivisors von G ist eine zu G gehörende Zahl, und $2\delta'$ sei die kleinste aller dieser Zahlen. Für genügend große m_1, n_1 wird $2\delta'$ von m_1, n_1 unabhängig und wird dann mit $2d_1$ bezeichnet. Ist $F_1(\overset{m_1}{y}, \overset{n_1}{z})$ eine der zu $2d_1$ gehörenden Funktionen, so zerfallen in bezug auf $F_1 = 0$ die S wieder in solche, die identisch verschwinden, oder nicht. Die Anzahlen s', s'' der linear unabhängigen unter ihnen in beiden Klassen werden ähnlich wie oben r', r'' bestimmt; deren Addition liefert aber für r die zweite Darstellung:

$$(5')\quad r = \delta' + \delta'' = (\mu + 1)(\nu + 1) + (m_1 - 1)(n_1 - 1) \\ - 2d_1 - p_1 - a_1 \; (d_1 < d).$$

Hier bedeutet p_1 das Geschlecht von $F_1 = 0$ und a_1 die Ordnung des Divisors, den die S für $F_1 = 0$ außer $\mathfrak{d}$ noch gemein haben. Die Vergleichung von (5) und (5′) führt zu der Relation zwischen p und p_1:

$$(6)\quad p - (m-1)(n-1) + 2d = p_1 - (m_1 - 1)(n_1 - 1) + 2d_1 + a_1.$$

Der Prozeß der Herleitung von F_1 aus F läßt sich fortsetzen; man gelangt sukzessive zu einer Funktion $F_i(\overset{m_i}{y}, \overset{n_i}{z})$ vom Geschlecht p_i, dem Doppelpunktdivisor $\mathfrak{d}_i$ von der Ordnung $2d_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dann gilt entsprechend zu (6) eine Relation zwischen p_{i-1} und p_i, wo die links auftretenden Größen den Index $i-1$, die rechts auftrtenden den Index i aufweisen. Da die Zahlen $d, d_1, d_2, \ldots$ abnehmen, so tritt schließlich ein F_ϱ mit $d_\varrho = 0$, d. i. $\mathfrak{d}_\varrho = 1$ auf, so daß gemäß (c) $p_\varrho = (m_\varrho - 1)(n_\varrho - 1)$ wird. Addiert man jetzt (6) zu allen so hervorgehenden Relationen bis $i = \varrho$, so entsteht:

$$(7)\qquad p = (m-1)(n-1) - 2d + \sum_{\alpha=1}^{\varrho} a_\alpha.$$

Es läßt sich aber direkt zeigen, daß $\Sigma a_\alpha = d$, so daß in der Tat (7) in die zu beweisende Relation (2) übergeht.

Bei der Übertragung auf Flächen ist der obige Hülfssatz (b) durch einen andern zu ersetzen. Durch $F(\overset{l}{x}, \overset{m}{y}, \overset{n}{z}) = 0$ sei eine algebraische Fläche, oder ein algebraischer Körper von zwei unabhängigen Variablen definiert. Die Nenner von x, y, z seien $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, ferner $\mathfrak{K}$ der kanonische Divisor (vgl. F. d. M. **39**, 644, 1908; **40**, 464, 1909) und $\mathfrak{T}$ irgendein Divisor, so gilt für die Dimension $\{\mathfrak{T}\}$ der Klasse $\mathfrak{T}$ der Riemann-Roch sche Satz, der sich auf die einfache Form bringen läßt:

$$(8)\qquad \{\mathfrak{T}\} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{K}) + p_n + 1.$$

Für eine Doppelkurve ϑ bedeute z. B. $2d' = (\mathfrak{L}, \vartheta)$ die Zahl der Schnittpunkte einer zur x-Achse senkrechten Ebene, wo aber jeder dieser Punkte zweimal gezählt ist.

Somit wird (d', d'', d''') die Ordnung von ϑ.

Die wirkliche Ausrechnung ergibt dann für (8) diejenige Umgestaltung, die der in Satz (b) angegebenen Gestalt entspricht. Bedeutet $\mathfrak{A}$ einen ganzen Divisor, (λ, μ, ν) die Verallgemeinerung des Paares (λ, μ), so ergibt sich unter Anwendung von Summenabkürzungen:

$$(9)\quad \{\mathfrak{T}\} = \Sigma\lambda\mu n - \Sigma\lambda(mn - m - n) - \Sigma d'(\lambda - l + 2) \\ - \Sigma la' + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{K}\vartheta^2) + p_n + 1.$$

Hier darf noch der Divisor $\mathfrak{A}$ gleich 1 angenommen werden.

Die Hauptschwierigkeit wird durch die Frage veranlaßt, welchen Beitrag ein isolierter mehrfacher Punkt der Fläche $F = 0$ zu ihrem Doppelkurvendivisor liefert, und wie viele Bedingungen gewissen Funktionen H aufzuerlegen sind, damit sie sich in den mehrfachen Punkten in vorgeschriebener Weise verhalten.

Hierbei bedeuten die H ganze rationale Funktionen $H(\overset{\lambda}{x}, \overset{\mu}{y}, \overset{\nu}{z})$, deren Zähler durch denjenigen Teil ϑ' von ϑ teilbar ist, der die Kurvenprimteiler enthält.

Wegen der Einzelheiten des nicht einfachen Beweises muß auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. My.

F. Severi. Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 537-546.

Eine erschöpfende Untersuchung der „unregelmäßigen" Flächen vom geometrischen Geschlecht 0 verdankt man F. Enriques (vgl. F. d. M. **36**, 693, 1905); Grundlage dieser Untersuchung ist die Existenz eines irrationalen Kurvenbüschels in jeder solchen Fläche. Im vorliegenden Aufsatz erlangt der Verf. dieses fundamentale Resultat durch eine geometrische Methode, welche den großen Vorteil besitzt, daß sie auch auf höhere Mannigfaltigkeiten anwendbar ist. La.

F. Severi. Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie. Ven. Ist. Atti **70** [(8) **13**], 373-382.

In einigen früheren Arbeiten (F. d. M. **36**, 694, 1905; **37**, 441 und 647, 1906) stellte der Verf. die folgende Aufgabe: „Sind A, B zwei Kurven einer algebraischen Fläche, so soll ihre Äquivalenz erkannt werden auf Grund der Betrachtung der Punktgruppen, in welchen A und B die Kurven C eines Büschels schneiden". Die Antwort lautet wie folgt: „Wenn A und B auf C äquivalente Gruppen ausschneiden, so sind A und B entweder äquivalent, oder ihr Unterschied besteht aus Kurven oder Teilkurven des Büschels".

Nun aber scheidet dieses Kriterium den Fall aus, bei dem man die Gruppen betrachtet, die A und B aus den Kurven C eines stetigen Systems schneiden; auf diesen Fall wird obiges Kriterium ausgedehnt.

Ferner macht der Verf. darauf aufmerksam, daß ein ähnliches Resultat für beliebig ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeiten besteht, und macht von ihm einige interessante Anwendungen. La.

G. Scorza. Sopra una classe di varietà algebriche a tre dimensioni con un gruppo ∞^2 di trasformazioni birazionali in sè. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 361-368.

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit V besitze eine Abelsche Gruppe G von birationalen Transformationen in sich, welche nicht unendlich viele Operationen, jede mit Doppelpunkten, enthält. Infolgedessen besitzt sie einen Büschel hyperelliptischer Flächen vom Range I; ihre Flächenirregularität q ist $\geqq 2$. V enthält eine lineare hyperelliptische Kongruenz vom Range I, die aus irreduktibeln Kurven C besteht, welche untereinander birational identisch sind. Sind die C elliptische Kurven, so ist V eine Abelsche Mannigfaltigkeit vom Range I, oder sie stellt eine Involution dar, welche auf einer solchen Mannigfaltigkeit durch eine endliche zyklische Gruppe birationaler Transformationen erzeugt wird. Die Mannigfaltigkeiten V dieser letzten Art können in acht Typen verteilt werden, von denen keiner einer Doppelebene äquivalent ist.

Diese Resultate werden durch Methoden erreicht, die eine Anwendung oder Verallgemeinerung derjenigen sind, welche sich bei der Untersuchung der hyperelliptischen Flächen als nützlich erwiesen haben (vgl. F. d. M. **40**, 684, 1909). La.

H. Poincaré. Sur les courbes tracées sur une surface algébrique Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **10**, 28-55.

„Ich habe in Ann. de l'Éc. Norm. (F. d. M. **41**, 490, 1910) unter demselben Titel eine Abhandlung veröffentlicht; ich möchte hier auf einige Punkte zurückkommen, die in jener Abhandlung nicht eingehend genug haben behandelt werden können.

§ 1. Kritische Werte. Es sei $F(x, y, z, t)$ eine algebraische Oberfläche (S) n-ter Ordnung, deren Gleichung in homogenen Koordinaten gegeben ist. Wir schneiden sie durch die variable Ebene $y/t = \text{const.}$; der Schnitt sei die Kurve K_y. Die Gerade $y = t = 0$ schneidet S in n Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$, die allen Kurven K_y angehören. Es sei p das Geschlecht der Kurve K_y; wir können p Abelsche Integrale erster Gattung in bezug auf diese Kurve bilden: $u_i = \int P_i dx / QF'_z$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, wo F'_z die partielle Ableitung von F nach z ist, Q ein homogenes Polynom ν-ten Grades in y und t (dasselbe für alle Integrale u_i) und die P_i ganze homogene Polynome $(n + \nu - 2)$-ten in x, y, z, t, aber nicht homogen und vom Grade $n - 3$ in x und z. Das Polynom P_i muß in allen Doppelpunkten der Kurven K_y verschwinden, abgesehen von den supplementaren Doppelpunkten, welche diese Kurve für gewisse Werte von y erhalten könnte, für die ihr Geschlecht sich erniedrigen würde. Mit anderen Worten die Oberfläche $P_i = 0$ muß durch die Doppelkurve der Oberfläche S gehen.

Das Integral soll genommen werden, während x und z sich so ändern, daß $F = 0$ und y und t konstant bleiben; die untere Grenze ist der Punkt A_1, die obere ein variabler Punkt M der Kurve K_y. Dann ist das Integral u_i eine Funktion der Koordinaten x, y, z, t eines variablen Punktes M der Oberfläche S, und diese Funktion ist bis auf eine Periode bestimmt. Wir behalten uns vor,

wenn das ohne Nachteil geschehen kann, auf die homogenen Koordinaten zu verzichten und $t = 1$ zu setzen.

Wir nennen kritische Werte zweiter Art die Werte von y (oder y/t), welche den Nenner Q zum Verschwinden bringen. Die kritischen Werte erster Art sind solche, für welche man p derartige Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ finden kann, daß $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_p P_p$ identisch Null wird für jeden Wert von x und z.

Singuläre Werke von y nenne ich solche, für die das Geschlecht der Kurve K_y sich verringert; sie entsprechen den Ebenen $y/t =$ const., die S berühren, oder die durch einen Kegelpunkt der Fläche gehen.

Für einen Wert von y (oder y/t), der nicht singulär ist, auch nicht kritisch von der zweiten Art, ist die Funktion u_i (ebenso wie die Perioden des Integrales u_i) immer endlich. Wenn der Wert singulär, aber nicht kritisch ist, wird das Integral u_i nur unendlich, falls der Integrationsweg durch den neuen Doppelpunkt geht. Wenn der Wert kritisch von der zweiten Art ist, so ist es im allgemeinen für alle Punkte M der Kurve K_y unendlich.

Nehmen wir an, ein Wert von y sei kritisch von der ersten Art, ohne singulär oder kritisch von der zweiten Art zu sein; dann verschwindet $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$ für diesen Wert von y, und zwar für alle Punkte M der Kurve K_y.

Man sieht leicht ein, was geschieht, wenn ein Wert zugleich kritisch von der ersten und von der zweiten Art ist. Es sei y_0 ein derartiger Wert; dann verschwindet für $y = y_0 t$ der Nenner von Q sowie $\Sigma \alpha_i P_i$ identisch. Daraus geht offenbar hervor, daß die Integrale u_i im allgemeinen unendlich werden, die Verbindung $\Sigma \alpha_i u_i$ aber endlich bleibt.

Prüfen wir nun den Fall eines singulären Wertes, der nicht kritisch ist. Er zerfällt in Unterabteilungen; wir werden nur von den folgenden besonderen Fällen reden".

Nun werden drei solcher Fälle genauer erörtert. Der nächste § 2 handelt von den Funktionen v_i. Es sei C eine algebraische Kurve auf S; die Ebene $y/t =$ const. schneidet C in m beweglichen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_m$. Sind $u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^m$ die zugehörigen Werte des Integrales u_i, so ist $v_i = u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^m$.

Der Paragraph 3 erörtert die Bildung der Normalfunktionen v_i und die Perioden ω_{ki}, welche linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten genügen. In § 4 werden Abelsche Funktionen eingeführt. Darauf folgt in § 5 die Klassifikation der Kurven; in § 6 werden die Gleichungen der Kurven C in Gestalt von Differentialgleichungen ermittelt. Der letzte Paragraph (7) handelt endlich von der Elimination der kritischen Werte zweiter Art.

Wir haben den Eingang dieser Abhandlung wörtlich wiedergegeben, um damit darzutun, daß bei den vielen Begriffsbestimmungen ein eingehendes sachliches Referat über den verfügbaren Raum hinausgehen müßte. Lp.

V. Snyder. Infinite discontinuous groups of birational transformations which leave certain surfaces invariant. Amer. Math. Soc. Trans. **11**, 15-24 (1910); Amer. Math. Soc. Bull. (2) **15**, 324-325 (1909).

„Von Schwarz wurde gezeigt, daß keine algebraische Kurve von einem Geschlecht größer als 1 invariant bleiben kann bei einer kontinuierlichen Gruppe birationaler Transformationen (J. f. Math. **87**, 139-146; F. d. M. **11**, 262, 1879). Später zeigte Hurwitz, daß keine solche Kurve irgendeiner birationalen Gruppe von der Ordnung ∞ angehören könnte (Gött. Nachr. 1887, 85-107; F. d. M. **19**, 396 u. **20**, 74). Die entsprechende Theorie für Oberflächen ist durchaus unvollständig. Während solche, die kontinuierlichen Gruppen angehören, bestimmt worden sind, kennt man nur wenige zerstreute Beispiele von Oberflächen, die eine unendliche diskontinuierliche Gruppe haben."

Der Verf. zeigt, daß alle diese Beispiele von einer zweizweideutigen Verwandtschaft abhängen. Drei Erläuterungen werden hierzu gegeben. Der eine Fall betrifft Oberflächen vierter Ordnung, die mehr als einen Kegelpunkt haben. In jeder Ebene durch zwei Kegelpunkte wird die (2, 2)-Verwandtschaft mittels der Büschel durch die Doppelpunkte bestimmt. Ein anderer Fall gehört ebenfalls zu Flächen vierter Ordnung, nämlich solchen, die zwei Netze hyperelliptischer Funktionen besitzen. Die (2, 2)-Verwandtschaft wird durch die Linien definiert, welche die Punkte der kanonischen g_2 verbinden. Der dritte bezieht sich auf die Systeme der Doppeltangenten auf jeder Oberfläche, welche vollständige Brennfläche zweier oder mehrerer Strahlensysteme ist. Lp.

A. B. Basset. Singular tangents to surfaces. Quart. J. **42**, 225-235.

„Die Frage der singulären Tangenten an Flächen ist in der letzten (englischen) Auflage von Salmons Geometrie des Raumes erörtert worden, und dabei wurden die wichtigsten Ergebnisse der Theorie angegeben. Aber die ganze Untersuchung trägt dort einen so unbestimmten und unklaren Charakter, daß eine vollständige Neubearbeitung nötig ist, um sie verständlich zu machen. Diese Aufgabe habe ich mir in der vorliegenden Abhandlung gestellt." Mit diesen Worten gibt der Verf. selbst Zweck und Ziel seiner Arbeit an. Er geht dabei in ganz ähnlicher Weise vor und benutzt ganz ähnliche Methoden wie in einigen früheren Arbeiten, in denen er ebenso die Theorie der singulären Tangentialebenen einer Revision unterzogen hat (vgl. Quart. J. **40**, 210-245; **41**, 21-49; F. d. M. **40**, 689-690, 1909). Er unterscheidet fünf Arten von singulären Tangenten, charakterisiert sie, berechnet unter wiederholter Bezugnahme auf sein Buch, Geometry of Surfaces, ihre Anzahlen als Funktion des Grades N der Fläche, untersucht die Regelflächen, welche einige dieser Tangenten erfüllen, wenn ihnen gewisse Bedingungen auferlegt werden, und berechnet ihren Grad. Dasselbe wird für die mit diesen Flächen verbundenen ausgezeichneten Kurven geleistet. Viele dieser Ergebnisse rühren von Schubert her (Math. Ann. **10**, 102; **11**, 348), „aber Salmons Wiedergabe dieser Untersuchungen ist so unverständlich, daß ich die Resultate von neuem ableiten will". Bei Gelegenheit dieser Ableitungen ergeben sich auch einige neue Sätze. Zum Schluß werden Bemerkungen über den Einfluß von konischen und biplanaren Knotenpunkten auf die erhaltenen Anzahlen beigefügt; dabei ergibt es sich, daß die Knotenpunkte und singulären Punkte dritter Ordnung eine besondere Ausnahmestellung einnehmen. Lö.

G. Dumas. Sur la résolution des singularités des surfaces. C. R. **152**, 682-684.

Übertragung des Verfahrens der Newtonschen Polygone. B.

A. Rosenblatt. Sur les surfaces algébriques admettant une série discontinue de transformations birationnelles. C. R. **153**, 1460-1461.

Der Verf. knüpft an die Arbeiten von Enriques und Severi über diejenigen algebraischen Flächen an, welche eine diskontinuierliche Schar von birationalen Transformationen in sich zulassen (vgl. besonders Acta Math. **33**; F. d. M. **40**, 684, 1909 und **41**, 522, 1910). Während die bis jetzt untersuchten Flächen mit dieser Eigenschaft alle regulär waren, konstruiert der Verf. eine einfache irreguläre Fläche, welche birationale Transformationen in sich besitzt. Die Gleichung dieser Fläche ist

$$[4x^3 - (y^2 + z^2)^2]^2 = x^2 (4z^3 - g_2 z - g_3).$$

Der Beweis der ausgesprochenen Behauptung wird geführt mittels eines Büschels elliptischer Kurven, die nach einem Satze von Enriques auf der Fläche existieren. Lö.

A. Rosenblatt. Zur Klassifikation der abwickelbaren algebraischen Flächen. Krakauer Anz. (A) 1911, 292-313.

Das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Abhandlung besteht in der Aufstellung einer Anzahl von Formeln, die die Klassifikation der abwickelbaren Flächen ermöglichen, indem sie für Flächen gegebener Ordnung eine untere und obere Grenze der Ordnung der Rückkehrkante sowie eine obere Grenze der Geschlechtszahl liefern. Es werden zunächst die Bezeichnungen der charakteristischen Zahlen der Raumkurve und der zugehörigen abwickelbaren Fläche aufgestellt, über die ja leider noch keine Einigkeit herrscht. Von den betrachteten Raumkurven wird vorausgesetzt, daß sie nur gewöhnliche Singularitäten besitzen. Es folgt dann eine Zusammenstellung der Plücker-Cayleyschen Gleichungen und der Plückerschen Gleichungen für diejenige ebene Kurve, die aus der abwickelbaren Fläche durch eine Oskulationsebene der Raumkurve ausgeschnitten wird. Verbindet man diese Gleichungen mit einer berühmten Formel von Halphen, so ergeben sich, wenn r die Ordnung der Fläche und m diejenige der Raumkurve bedeutet, die Formeln

$$m \geqq \sqrt{2r} \text{ und } m \geqq \sqrt{2(r+3)},$$

je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Zur Aufstellung einer Maximalordnung wird ein von H. A. Schwarz (J. für Math. **64**) angegebenes Verfahren benutzt, bei dem die Schnittkurven der Fläche mit Oskulations- und stationären Ebenen der Raumkurve betrachtet werden. Dabei ergeben sich zunächst Formeln für die Maximalzahl der Spitzen

einer ebenen Kurve. Bei der Aufsuchung der Maximalordnung der Raumkurve sind verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Schnitt der Fläche mit einer stationären Ebene irreduzibel ist oder aus einer Erzeugenden der Fläche und aus einer irreduziblen Kurve oder endlich aus einer mehrfachen Kurve und eventuell auch aus Erzeugenden besteht. Auch das Verhalten der stationären Ebene zu den singulären Punkten der Raumkurve ist von Einfluß. Alle diese Fälle werden der Reihe nach untersucht und dabei auch einige Sätze über Doppel- und mehrfache Kurven der abwickelbaren Flächen gewonnen. Zum Schluß endlich wird eine allgemeine Formel für den Maximalwert des Geschlechts der Raumkurve aufgestellt. Lö.

L. Godeaux. Sur le lieu des points de contact double des surfaces de deux systèmes linéaires. Ann. Ac. Polyt. Porto **6**, 14-18.

„Vor einigen Jahren hat sich C. Mineo mit der Oberfläche beschäftigt, die von den parabolischen Punkten der Oberflächen eines Büschels erzeugt wird (Palermo Rend. **21**, 211-217; F. d. M. **37**, 648, 1906). Indem ich diese Untersuchungen auf die algebraischen Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen auszudehnen mich bemühte, bin ich zu dem folgenden Satze gekommen, der mir nicht ohne Interesse zu sein scheint: Man betrachte aus einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zwei dreifach unendliche lineare Systeme von algebraischen Oberflächen, konstruiere die Oberflächen, die den Ort der Punkte bilden, in denen die Oberflächen des einen der Systeme und die Oberflächen eines Büschels des anderen einen doppelten Kontakt haben; dann gehören alle so erhaltenen Oberflächen einem linearen System an, in welcher Ordnung man auch die gegebenen Systeme betrachtet. Als Anwendung kann man eine Konstruktion des quadrikanonischen Systems einer dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit angeben“. Zuletzt werden einige invariante Zahlen der betrachteten Mannigfaltigkeiten erhalten. Lp.

R. Torelli. Sulle proprietà di connessione delle superficie monoidali. Napoli Atti (2) **14**, Nr. 4, 10 S. (1910).

Abbildung der Monoide durch Projektion auf eine Ebene. Kennzeichen, um in der Zeichnung die Schalen eines Monoids zu unterscheiden und zu ersehen, ob ein Monoid einseitige Schalen enthält. Bemerkungen, Anwendungen, Beispiele. (Rev. sem. $\mathbf{20}_1$, 89.) Lp.

G. Loria. Sopra un' estesa categoria di superficie trascendenti (le superficie panalgebriche). Lomb. Ist. Rend. (2) **44**, 643-666.

Während man die „panalgebraischen“ Kurven als Integralkurven einer Differentialgleichung der Form

$$\sum_{p,q} f_{p,q}(x,y) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^q = 0$$

(wo p, q nicht negative ganze Zahlen sind, deren Summe $\leqq m$ ist, und f ganze Polynome in x, y) definiert, werden die „panalgebraischen" Flächen als die Integralflächen eines Systems der Form

$$\sum_{p,q,r} f^{(i)}_{p,q,r}(x,y,z)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^q\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^r = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

(wo $p + q + r \leqq m(i)$ und die f Polynome in $x, y z$ sind) erklärt. Unter diesen neuen Gebilden befinden sich alle algebraischen Flächen, fast alle schon betrachteten transzendenten, aber auch unendlich viele andere neue, ebenfalls transzendente Flächen, welche eine beträchtliche Anzahl gemeinsamer Eigenschaften besitzen. Unter diesen mögen die folgenden hervorgehoben werden:

a) Der scheinbare Umriß einer panalgebraischen Fläche in bezug auf einen beliebigen Raumpunkt gehört einer algebraischen Fläche an. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die in Rede stehenden Flächen; sie kann daher als ihre geometrische Definition dienen.

b) Eine als Ort von Punkten panalgebraische Fläche ist panalgebraisch auch als Enveloppe von Ebenen.

c) Alle Isophoten einer panalgebraischen Fläche liegen auf algebraischen Flächen.

d) Die parabolische Kurve einer panalgebraischen Fläche liegt auf einer algebraischen.

Unter den panalgebraischen Flächen befinden sich unendlich viele Kegel-, Konoid-, Rotations- und Helikoidflchen. Aber es gibt auch andere Verfahren, um andere panalgebraische Flächen zu erhalten; der Leser findet sie in der Originalarbeit. La.

A. Comesatti. Sulle superficie razionali reali. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 597-602.

Vorläufige Mitteilung über eine inzwischen erschienene Abhandlung (Math. Ann. **73**, 1-72). La.

Weitere Literatur.

G. Gräbner. Algebraische Bertrandkurven und algebraische Kurven konstanter Torsion. Diss. Würzburg. 73 S. 8° (1909).

D. König. Geschlechtszahl von Liniensystemen. Math. és. termész. ést. **29**, 345-350.

G. Pfeiffer. Darstellung der Bereiche der singulären Punkte algebraischer Flächen durch Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen zweier Parameter fortschreiten (Reduktion der singulären Punkte algebraischer Flächen). Kiew Univ.-Nachr. 1911 Nr. 8, 9 u. 12. (Russisch).

Bericht in F. d. M. **41**, 706, 1910.

F. Schreiter. Über das kombinatorische Produkt von vier Kollineationen im Raum und die Apolarität kollinearer Verwandtschaften auf allen Stufen. Diss. Gießen. 33 S. 8°.

A. Tummarello. Tipi generali di sistemi omaloidici di superficie, privi di linee fondamentali. Atti Soc. It. Progr. Sc. 4, 733-734 (1910).

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

J. Neuberg. Zur Tetraedergeometrie (Schluß). Arch. der Math. u. Phys. (3) 18, 54-65.

Vgl. das Referat über den ersten Teil der Arbeit in F. d. M. **41**, 711, 1910. Hier werden behandelt: „Das isodynamische Tetraeder, die Tuckerschen Kugeln des isodynamischen Tetraeders, Achteck und Achtflach von P. Serret". Z.

O. Degel. Lösung zu 329 (J. Neuberg). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 363-364.

Man bezeichne mit B_1, B_2, B_3, B_4 die Projektionen der Ecken eines Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ auf eine beliebige Gerade p. Die aus diesen Punkten auf die entsprechenden Tetraederebenen gefällten Lote sind vier Erzeugende eines Hyperboloids. Gd.

G. Loria. Una proprietà delle reti di sfere. Periodico di Mat. (3) 8, 230-232.

„In einer Ebene seien zwei Kreise Γ und Γ' gegeben; man zeichne die Polaren eines Punktes P' der Ebene in bezug auf sie (und auf alle Kreise des durch sie bestimmten Büschels); diese treffen sich in einem Punkte P''. Dann besteht zwischen P' und P'' eine allbekannte quadratische Verwandtschaft. Betrachtet man nun noch die Mitte der Strecke $P'P''$, so liegt diese immer auf der Potenzlinie a der beiden gegebenen Kreise und des von ihnen bestimmten Büschels". Dieser Satz, den A. Finzi dem Verf. mitgeteilt hat, wird in dem vorliegenden Artikel zunächst für den Raum auf drei Kugeln verallgemeinert. Ein Punkt P' besitzt in bezug auf drei Kugeln einen konjugierten Punkt P'', und die Mitte von $P'P''$ liegt immer auf der Potenzlinie der drei Kugeln. Danach wird dieser Satz auf drei Oberflächen zweiter Ordnung ausgedehnt und die weitere Verallgemeinerung auf einen n-dimensionalen Raum angedeutet. Lp.

J. M. Shelly. Coordenadas hiperboloidales y su aplicación al estudio de las cónicas y cúbicas contenidas en una cuádrica alabeada. Diss. Madrid, 54 S. mit Figurentafel.

Die Arbeit will zur Untersuchung der Flächen zweiter Ordnung mittels der von Plücker eingeführten hyperboloidalen Koordinaten anleiten. Be-

merkenswert ist die Untersuchung der Kegelschnitte, die auf der F_2 liegen und durch zwei feste Punkte gehen, sowie die Klassifikation der auf der F_2 gelegenen Raumkurven dritter Ordnung (auf Grund ihrer Lage zum unendlich fernen Kegelschnitt der Fläche). Z.

E. Turrière. Construction des centres de courbure principaux en un point d'une quadrique. Ens. math. **13**, 109-113.

Anwendung 1. eines Satzes von Steiner über die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes eines Kegelschnitts mittels des „orthoptischen" Kreises, 2. eines Satzes von Valson über das Krümmungsmaß einer Fläche zweiter Ordnung. Z.

B. Hostinský. Über Krümmung der Flächen zweiten Grades. Časopis **40**, 296-305. (Böhmisch.)

Der Verf. untersucht die Kurven auf den Flächen zweiten Grades, in welchen die Krümmung der Fläche konstant ist. Pe.

F. Egan. Note sur les quadriques homofocales. Nouv. Ann. (4) **11**, 420-422.

Zwei Sätze. B.

E. Turrière. Agrégation des sciences mathématiques. Nouv. Ann. (4) **11**, 21-39.

Diejenigen Flächen (S), welche zu der Familie von Flächen zweiter Ordnung $ax^2 + by^2 + cz^2 =$ const. orthogonal sind, bilden den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ihre Koordinaten lassen sich mit Hülfe zweier Parameter u, v in der Form darstellen:

$$x = x_0(v)\, e^{au},\quad y = y_0(v)\, e^{bu},\quad z = z_0(v)\, e^{cu},$$

woraus sich ergibt, daß die allgemeine Gleichung der Flächen (S) erhalten wird, wenn man irgend eine homogene Funktion der Größen $x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}, z^{\frac{1}{c}}$ gleich Null setzt. Z. B. gehören hierher die von Lie und Klein studierten Flächen $x^\lambda y^\mu z^\nu =$ const. Nachdem im ersten Teil gezeigt worden ist, daß die Bestimmung der Asymptotenlinien jeder Fläche (S) von Quadraturen abhängt, wird im zweiten und dritten Teil eine Reihe spezieller Probleme betrachtet, die auf die Asymptotenlinien Bezug haben. Die beiden letzten Teile beschäftigen sich mit einer bestimmten Biegungsfläche einer Fläche (S) und mehreren damit in Zusammenhang stehenden Fragen. Gd.

J. Servais. Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1911. Nouv. Ann. (4) 11, 314-327.

A. Gegeben sind drei rechtwinklige Koordinatenachsen Ox, Oy, Oz. Man betrachte die in der xy-Ebene gelegene Parabel (P) $x^2 - 2x - 2y = 0$, deren Brennpunkt die Koordinaten $x = 1, y = 0$ hat. 1. Jedem Punkte M des Raumes entspricht im allgemeinen ein Punkt R der z-Achse und ein einziger außer O derart, daß die Gerade MR die Parabel (P) schneidet. 2. Von den so definierten Geraden MR betrachte man diejenigen, welche der Ebene $z = lx$ parallel sind. Ihr geometrischer Ort ist ein durch die z-Achse und durch die Parabel (P) gehendes hyperbolisches Paraboloid. 3. M sei ein materieller Punkt von der Masse 1, der der Kraft $F = MR$ unterworfen ist. Für eine beliebige Geschwindigkeit ist die auf die xy-Ebene projizierte Bahn eine Ellipse mit dem Mittelpunkte O. Wenn die Anfangsgeschwindigkeit in der Ebene MOz gelegen ist, so vollzieht sich die Bewegung in dieser Ebene und befolgt, da MR eine Zentralkraft ist, das Prinzip der Flächen. 4. Bei den Anfangsbedingungen: Koordinaten von $M: x_0 = -2, y_0 = 0, z_0 = 0$; Projektionen der Geschwindigkeit: $x_0' = 0, y_0' = 0, z_0' = 3$ ist die in der XZ-Ebene gelegene Bahnkurve eine Unikursalkubik mit der Asymptote $x = 2$.

B. Die Differentialgleichung (1) $a\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + by = 0$, in der a und b zwei reelle Konstanten bezeichnen, wird durch eine Reihe $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_m x^m$ befriedigt, wobei λ_0 und λ_1 willkürlich bleiben. Diese konvergente Reihe läßt sich in der Form $\lambda_0 \varphi(x, a, b) + \lambda_1 \psi(x, a, b)$ schreiben, wo φ und ψ zwei konvergente Reihen bezeichnen, deren Koeffizienten bestimmte Funktionen von a und b sind. $\varphi_x' = -\dfrac{b}{a}\psi(x, a, b-1)$ und $\psi_x' = \varphi(x, a, b-1)$ befriedigen die Gleichung (1), in der b durch $b-1$ zu ersetzen ist. Wenn b eine positive ganze Zahl ist, so wird die Reihe φ oder ψ, je nachdem b gerade oder ungerade ist, ein Polynom. Die Diskussion der Realität der Wurzeln dieser Polynome φ oder ψ für $a \gtrless 0$ bildet den Abschluß. Gd.

E. Keraval. Note sur les imaginaires et solution du problème Nr. 1923. Revue de Math. spéc. 21, 284-287.

Gewisse wohlbekannte Eigenschaften isotroper Elemente, die zu Anfang hergeleitet werden, geben eine einfache Lösung der Frage, unter welchen Umständen die Fußpunkte der Lote von einem Punkte auf die Geraden einer Regelschar zweiter Ordnung in einer Ebene liegen. Sk.

L. Klug, G. Kober. Lösung zu 343 (G. Kober). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 282-283.

Die ebenen Kurven einer Fläche zweiter Ordnung, deren Ebenen einen Büschel bilden, erscheinen von jedem Punkte dieser Fläche als ein Kurven-

büschel zweiter Ordnung. Auf welcher zweiten Ebene schneiden sich die projizierenden Kegel? Synthetische und analytische Bestimmung. Gd.

O. Degel. Lösung zu 356 (R. Mehmke). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 369-370.

Die Polare einer beliebigen Geraden G in einem räumlichen Polarsystem sei H. Die Verbindungsebenen der Ecken a, b, c, d eines beliebigen Tetraeders mit G mögen H in den Punkten a', b', c', d' schneiden. Ferner seien a'', b'', c'', d'' die Pole der Seitenflächen bcd, cda, dab, abc des Tetraeders. Dann liegen die vier Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ hyperboloidisch. Gd.

R. Mehmke. Lösungen zu 354—357 (R. Mehmke). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 370-371.

Lösungen der voranstehenden Aufgaben mit Hülfe der Punktrechnung. Gd.

H. F. Baker. Notes on the theory of the cubic surface. Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 145-199 (1910).

In § 1 wird die bekannte Methode wiedergegeben, wie man eine Kurve vierter Ordnung als Eingehüllte von Kegelschnitten ansehen kann. Der § 2 behandelt die Steinerschen Systeme der Doppeltangenten einer ebenen Quartik und liefert einen direkten Beweis für den Satz, daß die sechs Zentren auf einem Kegelschnitt liegen. Dieser Satz wird merkwürdigerweise bei Salmon (Higher plane curves) nicht erwähnt, obgleich er aus der Theorie der Kummerschen Fläche klar hervorgeht. Der Abschnitt bringt auch eine naheliegende Verallgemeinerung des Satzes. Der Geisersche Beweis des Satzes wird in § 3 gegeben. Der § 4 betrachtet die Steinerschen Systeme als Tangenten einer Kurve von der dritten Klasse. Es wird gezeigt, daß bei der elliptischen Darstellung dieser Kurven die zwölf Doppeltangenten eines Steinerschen Systems durch sechs Argumente von der Summe Null dargestellt werden können, und sechs andere, die korrespondierende Tangenten zu dieser sind, alle aus demselben System, werden deshalb durch sechs elliptische Argumente dargestellt, die sich von den vorigen um dieselbe halbe Periode unterscheiden. Die Geisersche Methode, die ebene Quartik aus einer kubischen Oberfläche zu erhalten, wird in § 5 kurz erläutert. Der § 6 ist der systematischen Bestimmung der Geraden einer kubischen Oberfläche gewidmet sowie der Bezeichnung für sie mittels binärer Kombinationen von acht Symbolen, wobei eine gewisse „Daumenregel“ gegeben wird. Der § 7 gibt die geometrische Deutung der 7 primären Geraden, aus der die Bezeichnung von § 6 fließt, indem gezeigt wird, daß die anderen 20 Geraden aus den 7 ersteren linear bestimmbar sind. Dies leitet in § 11 zu einem anschaulichen Beweise der Aronholdschen Bestimmung einer ebenen Quartik aus sieben Doppeltangenten. Die Erörterung der Korrespondenz zwischen den Geraden einer kubischen Ober-

fläche und den Doppeltangenten einer ebenen Quartik ist der Gegenstand von § 9; hier wird der Beweis erbracht, daß tatsächlich nur zwei Weisen vorhanden sind, wie ein Steinersches System von Doppeltangenten aus den Geraden einer kubischen Oberfläche entsteht. Der § 10 betrifft die Schlußweise von § 9 unter Einführung der Doppelsechsen. In § 11 werden einige Beispiele von Folgerungen aus dem gewählten Gesichtspunkt gegeben, insbesondere der Satz, daß die sechs Transversalen aus jedem Punkte der kubischen Fläche, je eine an die gegenüberliegenden Linienpaare einer Doppelsechs, auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen. Dieser Satz führt auf die Aufgabe, den Ort eines Punktes zu finden, von dem aus die sechs Transversalen an sechs Paare windschiefer Geraden auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen. Dieser Ort, der im allgemeinen vom Grade 24 ist, schließt in dem Falle, wo die sechs Geradenpaare Doppelsechsen einer kubischen Oberfläche sind, offenbar nicht nur die kubische Oberfläche ein, sondern auch ihre reziproke vom Grade 11. Der § 12 gibt den Beweis eines interessanten Satzes von Reye nach der Methode von Beltrami. Diese Beltramische Methode dient zum Beweise der von Sylvester stammenden kanonischen Form für die kubische Oberfläche. Eine ähnliche Beweisart wird angewandt auf die rationale Kurve n-ter Ordnung im Raume von n Dimensionen. In § 13 wird eine geometrische Übertragung der Aufgabe geliefert, die Geraden einer kubischen Oberfläche zu finden, deren Sylvestersche Gleichung bekannt ist.

Diesen 13 Paragraphen (S. 145-177) folgt als zweiter Teil der Arbeit ein Appendix von demselben Umfange, in dem von den Doppelsechsen gehandelt wird. In der Einleitung wird eine kurze Übersicht über die Literatur gegeben, die an den Schurschen Satz über die Doppelsechsen in der jüngsten Zeit angeknüpft hat: Burnside und Dixon (F. d. M. **40**, 699, 1909), mündliche Mitteilungen von Bennett und Richmond in der Lond. Math. Soc. 1910. „Sie alle habe ich benutzt, und tatsächlich ist der Inhalt von § I (die elementare Ansicht der Schurschen Figur) eine Vereinigung der Betrachtungen dieser Autoren; aber auch so, und obgleich der Grundgedanke zweifelsohne von Schur stammt, steckt dem Anscheine nach manches Neue darin, was seine Veröffentlichung rechtfertigt. In § II (Doppelsechsen und eine Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies) wird eine auf einer elliptischen Raumkurve vierter Ordnung angewandte Betrachtung der Schurschen Methode gegeben. In bezug auf die Existenz einer Doppelsechs hat, wie zugegeben ist, Richmond in dieser Hinsicht einige Bemerkungen mitgeteilt. Ich habe dennoch gewagt, das beizubehalten, was ich vor Richmonds Mitteilung geschrieben hatte". Der § III erörtert „das direkte Problem der Doppelsechs, als eine Übung in analytischer Liniengeometrie". Lp.

A. Henderson. The twenty-seven lines upon the cubic surface. Cambridge: University Press. III u. 100 S. 8°. (Cambr. Tracts in Math. and Phys. Nr. 13).

Diese Nr. 13 der Cambridge Tracts erscheint stark kartoniert, was sehr angenehm ist. Das Büchlein bringt in einem Umschlag 13 Tafeln und wird zu einem höherem Preis (4 sh. 6 d.) als die meisten anderen Cambridge Tracts (2 sh. 6 d.) abgegeben. Nach einem historischen Überblick (S. 1-7) und der Ein-

leitung (S. 8-9) folgen sieben Kapitel: I. Preliminary theorems (S. 10-12). II. The double six configuration. Auxiliary theorems (S. 13-25). III. The trihedral pair configuration (S. 26-42). IV. Analytical investigation of the twenty-seven lines and forty-five triple tangent planes for the general equation of the cubic surface (S. 43-53). V. The construction of a model of a double six (S. 54-57). VI. The construction of the configurations of the straight lines upon the twenty-one types of the cubic surface (S. 58-82). VII. On some configurations associated with the configurations of the lines upon the cubic surface (S. 83-95). Bibliography (S. 96-100). Henderson gibt eine allgemeine Übersicht über die Aufgabe der 27 Linien vom geometrischen Standpunkt aus mit besonderer Berücksichtigung auf die Gegenstände, die im Inhaltsverzeichnis gegeben sind. Vgl. Math. Gaz. **6**, 303, 1912; Nature **90**, 591-592, 1913. J.

A. B. Coble. The lines and triple tangent planes of a cubic surface. Johns Hopkins Univ. Circ. 1911, Nr. 2, 59-63.

Bekanntlich bilden die kubischen Kurven C_3 durch sechs Punkte $p_1, \ldots, p_6$ einer Ebene E die letztere ab auf eine allgemeine kubische Fläche F_3. Dabei entsprechen den sechs Richtungsbüscheln der Punkte p_i die sechs windschiefen Geraden a_i einer halben Doppelsechs, während die Geraden b_i der andern halben Doppelsechs abgebildet werden durch die Kegelschnitte durch je fünf der Punkte. Den 15 Geraden $(p_i p_j)$ korrespondieren die 15 übrigen Geraden c_{ij} der F_3.

Die 45 dreifachen Tangentialebenen T zerfallen mit Rücksicht auf die ausgewählte Doppelsechs in zwei Klassen; 15 von ihnen entsprechen den Dreiseiten (ij), (kl), (mn), den 30 übrigen entsprechen Kurven C_3, die zerfallen in eine Gerade (ij) und einen Kegelschnitt $(iklmn)$.

Es soll eine explizit invariante Gleichung der Fläche F_3 in den Koordinaten der Punkte p_i abgeleitet werden, sowie ihrer 45 Ebenen T und ihrer 27 Geraden. Der eingeschlagene Weg ist ein eigenartiger. Aus den Differenzen (ik) der sechs Wurzeln z_i einer binären Form f_6 sechsten Grades hat schon Joubert (1867) sechs wichtige Ausdrücke A_i gebildet; eine gerade Permutation P der z_i bewirkt auch eine gerade P der A_i, eine ungerade P der z_i aber eine zugleich mit lauter Zeichenwechseln verbundene P der A_i.

Überdies sind die Joubertschen Ausdrücke an gewisse einfache Identitäten gebunden. Auf diese binären Ausdrücke und Identitäten wende man das Clebschsche Übertragungsprinzip an. Wird in den A_i jede Differenz (ik) ersetzt durch das ternäre Symbol $(p_i p_k x)$, so entstehen sechs kubische Kurven A_i durch die Punkte p, die den Identitäten unterliegen:

$$\Sigma A = 0,\ \ \Sigma A^3 = 0,\ \ A_1 + A_4 = 4\,(p_1 p_2 x)(p_3 p_4 x)(p_5 p_6 x),\ \text{usw.}$$

Ersetzt man weiter in den Joubertschen Ausdrücken jedes Produkt $(ij)(kl)(mn)$ durch die ternäre Invariante $(p_i p_j, p_k p_l, p_m p_n)$, so entstehen sechs ternäre Ausdrücke $\bar{A}_i$, so daß die Identitäten $\Sigma\bar{A} = 0$, $\Sigma\bar{A}A = 0$ bestehen. Dadurch entsteht unmittelbar die Gleichung der kubischen Fläche F_3 in der hexaedrischen, zuerst von Cremona aufgestellten Form:

(I) $$\Sigma A^3 = 0, \ \Sigma A = 0, \ \Sigma \bar{A} A = 0.$$

Hieraus lassen sich die Gleichungen der 45 dreifachen Tangentialebenen T, sowie der 27 Geraden der Fläche F_3 ableiten.

Überdies gelangt man so zu fünf Invarianten des ebenen Sechsecks der Punkte p, die ein vollständiges Invariantensystem eines solchen Sechsecks ausmachen. My.

J. Eiesland. On a class of cubic surfaces with curves of the same species. American J. **33**, 1-28.

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit (s. F. d. M. **39**, 691, 1908) die Translationsflächen bestimmt, die nach Lies allgemeiner Theorie zu einer nicht zerfallenden ebenen rationalen Kurve vierter Ordnung gehören, wenn diese reelle Doppelpunkte mit getrennten Tangenten hat. Aus diesen Flächen ergeben sich durch logarithmische Transformation der Koordinaten Flächen dritter Ordnung von der Form:

$$A + Bx + Cy + Dz + Exz + Fxy + Gyz + Hxyz = 0,$$

wo $EGAF = HDCB$ ist. Jede solche Fläche, enthält vier Scharen von rationalen Raumkurven dritter Ordnung, die durch zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Fläche sichtbar gemacht werden können. Verschwindet eine gewisse Invariante, so ist die Fläche tetraedralsymmetrisch. Durch die Transformation:

$$x = x_1^m, \ y = y_1^m, \ z = z_1^m$$

gewinnt der Verf. allgemeinere Flächen, die vier Scharen von je ∞^1 Kurven enthalten, derart, daß ein Paar dieser vier Scharen durch eine einfache involutorische Transformation in das andere Paare übergeht, und daß die beiden Scharen jedes Paares derselben Gattung angehören. Ähnlich behandelt der Verf. den Fall, wo die ebene rationale Kurve vierter Ordnung in eine Kurve dritter Ordnung und eine Gerade zerfällt. Beigegeben ist die Wiedergabe der Photographie des Modells einer speziellen unter jenen Flächen dritter Ordnung. El.

J. Drach. Détermination des lignes asymptotiques des surfaces générales du troisième degré. C. R. **152**, 1458-1461.

Innerhalb eines gewissen Rationalitätsbereichs gibt es für die Gleichung der Asymptotenlinien der Flächen dritter Ordnung einen Multiplikator, dessen Kubus eine rationale Funktion ist. Geht man in geeigneter Weise von Linienkoordinaten zu sphärischen Koordinaten über, so erhält man Sätze über Krümmungslinien, auf die der Verfasser zurückzukommen verspricht. Insbesondere bestehen Analogien zwischen den Krümmungslinien der Wellenfläche (vgl. S. 668) und den Asymptotenlinien der Flächen dritter Ordnung. Z.

G. Huber. Die Ponsfläche, eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Monatsh. f. Math. u. Phys. **22**, 89-126.

„Ersetzt man in der Gleichung des konfokalen Kegelschnittsystems

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

den Parameter λ durch die räumliche, rechtwinklige Koordinate z, so werden die Kegelschnitte des Systems ober- und unterhalb der (xy)-Ebene auseinander herausgehoben und bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine Fläche von der Gleichung

$$(z+b^2)(x^2-z-a^2)+y^2(z+a^2)=0.$$

Verschiebt man das Koordinatensystem parallel längs der negativen z-Achse um die Strecke b^2, so ist z durch $z-b^2$ zu ersetzen, und die Flächengleichung wird:

$$(1) \qquad (x^2+y^2)z+c^2y^2-z^2-c^2z=0,$$

wo $c=\sqrt{a^2-b^2}$ die lineare Exzentrizität des obigen konfokalen Kegelschnittsystems ist.“

Ihren Namen hat die Fläche erhalten von folgender Eigenschaft: Die doppeltgelegte X-Achse liegt ganz auf der Fläche, das Stück innerhalb der Punkte $x=\pm c$ begrenzt den oberhalb der (xy)-Ebene gelegenen Teil der Fläche und bildet eine Brücke über die Einsattelung des unterhalb der (xy)-Ebene liegenden Teiles der Fläche. — Außer den zwei reellen Doppelpunkten, deren Verbindungsstrecke die eben genannte Brücke ist, besitzt die Fläche noch zwei imaginäre Doppelpunkte, also das Maximum von 4 Doppelpunkten, das eine Fläche dritter Ordnung haben kann. Die Tangentialebenen, Tangentialkegel, die Hessesche Fläche der Ponsfläche werden genauer behandelt, eine Parameterdarstellung der Fläche gegeben, ihre Reziprokalfläche untersucht, die Krümmungsverhältnisse, Asymptotenlinien, Normalen und Normalenflächen eingehender diskutiert. Z.

W. H. Salmon. Some properties of four-nodal cubic surfaces, being analogues of Pascal's theorem and of the nine-point circle in three dimensions. Arch. der Math. und Phys. (3) **18**, 154-164.

Die in tetrametrischen Koordinaten geschriebene Gleichung

$$u\beta\gamma\delta+v\gamma\delta\alpha+w\delta\alpha\beta+t\alpha\beta\gamma=0$$

stellt eine Familie von Flächen dritter Ordnung dar, die durch die Kanten des Fundamentaltetraeders hindurchgehen und die Ecken des Tetraeders zu Knotenpunkten haben. [Neuberg, Arch. d. Math. u. Phys. (3) **16, 17** (vgl. F. d. M. **41**, 711, 1910 u. S. 657 dieses Bandes) nennt diese Flächen Simsonsche Flächen.] Sie zeigen eine weitgehende Analogie zu den einem Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitten, und insbesondere die Flächen

$$A\beta\gamma\delta+B\gamma\delta\alpha+C\delta\alpha\beta+D\alpha\beta\gamma=0$$

(wobei A, B, C, D die Flächeninhalte der Seiten des Fundamentaltetraeders bedeuten) entsprechen durchaus dem umgeschriebenen Kreis eines Dreiecks. Diese Analogie führt der Verf. an interessanten Beispielen durch, so am Pascalschen Satz und am Neunpunktekreis. Einige schon früher bekannte Ergebnisse werden einfacher hergeleitet. Z.

G. Majcen. Die Kurven dritter und vierter Ordnung im Raume in Verbindung mit der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. Agram Ak. **188**.

Zusatz zu einer früheren Arbeit (F. d. M. **40**, 699, 1909). Weitere solche höheren Kurven sowie einige ihrer Singularitäten, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und welche zufolge der in der ersteren Arbeit zugrunde gelegten Transformation in Raumkurven dritter und vierter Ordnung einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung übergehen (Rev. sem. $\mathbf{20}_2$, 99). Lp.

Weitere Literatur.

T. Lalesco. Das zweien Geraden gemeinschaftliche Lot. Gazeta Mat. Bukarest **16**, 84-86.

H. Bateman. The foci of a circle in space and some geometrical theorems connected herewith. Brit. Assoc. Rep. Sheffield **80**, 532-533.

G. Blenck. Untersuchungen über das Amiotsche Theorem bei den Flächen zweiter Ordnung und über Erzeugungsarten des elliptischen Kegels. Diss. Rostock. 91 S. 8°.

R. Gidály. Die Hauptmethoden der Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten. Wien. 40 S. 8°.

E. G. Hogg. On certain surface and volume integrals of an ellipsoid. Part II. Rep. Austral. Assoc. **12**, 58-61 (1909).

L. Jankcutz. Über die in zwei Kegelschnitte zerfallende Durchdringungskurve zweier Flächen zweiten Grades. Progr. Klagenfurt. 16 S. 8°.

L. Klug. Über die aus der Fläche zweiter Ordnung und dem Tetraeder ableitbaren hyperboloidisch gelegenen Geraden. Math. és. phys. lapok **20**, 157-162 (Ungarisch).

K. Kraft. Das Normalenproblem an Kurven und Flächen zweiter Ordnung in den endlichen Raumformen. Diss. Münster.

F. Meyer. Diskussion eines Systems von Rotationsflächen zweiten Grades. Bern. 71 S. 8°.

C. Servais. Sur les centres de courbure de trois quadriques homofocales. Mathesis, Suppl. 16 S. Sonderabdruck aus Ann. Porto (F. d. M. **41**, 713, 1910).

A. B. Coble. The cubic surface and plane six-point. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 286.

L. Godeaux. Sur les vingt-sept droites de la surface cubique. Mathesis (4) **1**, 33-34.

Elementare Beweise bekannter Eigenschaften. Mn. (Lp.)

K. Grandjean. Über die mit einer Schläflischen Doppelsechs zusammenhängende Fläche F^2. Diss. Straßburg.

F. Rulf. Behandlung des Plückerschen Konoides auf Grund einer neuen Definition. Wien. 16 S. 8°.

D. Andere spezielle Raumgebilde.

T. Kubota. On the twisted quartic of the first species. Tokyo Math. Ges. (2) **5**, 400-405 (1910).

Es sei $\varphi_i(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Oberfläche n-ter Ordnung, und man bilde $\Sigma k_i \varphi_i(x, y, z) = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \lambda;\ \lambda \leqq 4n - 1)$, so heißt das durch diese Gleichung dargestellte System ein lineares System λ-ter Ordnung. Dann gilt der Satz: In einem linearen System λ-ter Ordnung $(\lambda \leqq 4n - 1)$, gebildet aus algebraischen Flächen n-ter Ordnung, gibt es $4(\lambda + 1)n$ Oberflächen des Systems, welche eine gegebene Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies in einem Punkte $(\lambda + 1)$-punktig berühren, und diese $4(\lambda + 1)n$ Berührungspunkte sind die vollständigen Schnittpunkte der Raumkurve mit einer algebraischen Oberfläche von der Ordnung $n(\lambda + 1)$. — Nach demselben Beweisverfahren erhält man den Satz: In einem linearen System λ-ter Ordnung $(\lambda \leqq 3n - 1)$, gebildet aus ebenen algebraischen Kurven n-ter Ordnung, gibt es $3(\lambda + 1)n$ Kurven des Systems, welche eine gegebene kubische Kurve $(\lambda + 1)$-punktig berühren, und diese $3(\lambda + 1)n$ Berührungspunkte sind die vollständigen Schnittpunkte der kubischen Kurve mit einer algebraischen Kurve von der Ordnung $n(\lambda + 1)$. — Verschiedene spezielle Fälle.

Lp.

K. Rohn. Die Maximalzahl von Ovalen bei einer Fläche vierter Ordnung. Leipz. Ber. **63**, 423-440.

In einem Vortrag auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Paris (1900) hat Hilbert die Frage nach der gegenseitigen Lage der Ovale bei einer Kurve sechster Ordnung und die damit eng zusammenhängende Frage nach der Maximalzahl der Ovale bei einer Fläche vierter Ordnung als besonders wichtig bezeichnet. Dem Verf. ist es nun gelungen, die letztere Frage endgültig zu lösen. (Kurze Zeit nach Veröffentlichung dieser Arbeit hat er auch die erstere Frage wesentlich gefördert; s. Leipz. Ber. **63**, 540-555 und das Referat in diesem Band S. 622). Er geht dabei aus von dem Flächenbüschel $\Phi - \lambda F^2 = 0$, wo $\Phi = 0$ eine Fläche vierter Ordnung bedeutet, die aus der Maximalzahl der überhaupt möglichen Ovale besteht, und $F = 0$ eine Fläche zweiter Ordnung ist, die gewissen Bedingungen genügt. Durch einen Schrumpfungsprozeß werden die Ovale zum Teil in isolierte Knoten verwandelt. so daß ein Flächenbüschel mit neun isolierten Knoten entsteht. Sodann wird ein Büschel von Kurven sechster Ordnung untersucht, das aus jenem Flächenbüschel durch Projektion entsteht, und endlich werden einige Eigenschaften des Symmetroids

abgeleitet, d. h. derjenigen unter den 13 mit zehn Knoten ausgestatteten Flächen jenes Büschels, deren scheinbarer Umriß stets in zwei Kurven dritter Ordnung zerfällt, wenn man sie aus einem ihrer 10 Knoten projiziert. Die aus diesen Untersuchungen gewonnenen Sätze führen dann zu folgendem Schlußergebnis: „Eine Fläche vierter Ordnung mit 9 isolierten Knoten kann nicht mehr als ein einziges Oval besitzen. Hierbei bietet sich die doppelte Möglichkeit, daß die Fläche zweiten Grades durch die neun Knoten das Oval schneidet oder nicht schneidet. Im letzteren Fall gibt es ein Symmetroid, das neun isolierte Knoten mit der Fläche vierter Ordnung gemein hat, während sein zehnter isolierter Knoten im Innern des Ovals liegt. Im ersteren Fall gibt es ein Symmetroid, das die neun isolierten Knoten der Fläche vierter Ordnung zu eigentlichen Knoten hat; sein zehnter Knoten liegt außerhalb des Ovals". Hiermit ist auch die Frage nach der Maximalzahl der Ovale bei einer Fläche vierter Ordnung gelöst. Eine solche Fläche kann höchstens aus zehn Ovalen bestehen, und derartige Flächen existieren tatsächlich. Lö.

J. DE VRIES. Een oppervlak van den vierden graad met twaalf rechten. Amst. Ak. Versl. **20**, 201-205.

Durch einen Punkt P kann man im allgemeinen eine Gerade (Transversale) legen, die zwei vorgegebene Gerade a und a' trifft. Ebenso werden zwei andere Transversalen durch P und die beiden Geradenpaare b, b' und c, c' bestimmt. Gesucht wird der Ort für P, wenn die drei Transversalen einer Ebene angehören. Abgesehen von einem Ausnahmefall (S. 204), entsteht eine Fläche. Auf ihr liegen außer den sechs Geraden a, a', b, b', c, c' noch die sechs Geraden, die je vier der gegebenen Geraden treffen. Die Fläche ist vierter Ordnung. Vgl. Neuberg, Mathesis **3**, 105-108 (F. d. M. **34**, 605, 1903) und Amst. Versl. **20**, 992. B.

M. BRÜES. Zur Theorie der desmischen Flächen vierter Ordnung. Progr. Kgl. Gymn. zu Neuß. 48 S.

Die Arbeit enthält eine bemerkenswerte Vereinfachung und Vervollständigung der Untersuchungen, die zuerst von Humbert (Journ. de Math. (4) **3**, 353-398; F. d. M. **23**, 843, 1891) angestellt worden sind. Die Methoden rühren zum größten Teil von Study her (Sphär. Trigonom., orthog. Subst. u. ellipt. Funkt., Leipzig 1893, II, § 8; III, § 4). Neu sind: „Die Beziehungen der desmischen Fläche zu Chasles schen Punktquadrupeln der ihr angehörenden Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies; die Sätze über die aus solchen Quadrupeln bestehenden Kummer schen Konfigurationen; die sich darauf gründende lineare Konstruktion der Tangentialebene in einem gegebenen Punkte der Fläche; die Sätze über die Konfiguration, die der Study schen Gruppe G_{96} entspricht, sowie schließlich die Sätze über Chasles sche Punkttripel auf der desmischen Fläche und daraus gebildete Konfigurationen." Z.

V. SNYDER. An application of a (1, 2) quaternary correspondence to the Kummer and Weddle surfaces. American M. S. Trans. **12**, 354-366.

Die nicht lineare Involution von der Dimension 3, die durch ein System von Flächen zweiter Ordnung mit drei linearen Parametern bestimmt ist, wurde schon wiederholt eingehend untersucht. In dem Fall, wo alle Flächen zweiter Ordnung sechs Basispunkte haben, liefert das System eine bequeme Methode, um die Fläche vierter Ordnung von Weddle auf die Kummersche Fläche vierter Ordnung abzubilden. In der vorliegenden Abhandlung werden die Einzelheiten dieser Transformation analytisch entwickelt und eine Anzahl bekannter Ergebnisse mit neuen Methoden bewiesen. Ferner wird die Transformation verwendet, um eine Anzahl von Scharen von birationalen involutorischen Transformationen zu erhalten, welche die Flächen ungeändert lassen. Wenn die Basispunkte sich in spezieller Lage befinden, wenn sie z. B. eine einfache oder mehrfache Involution bilden, so entsteht eine Anzahl neuer Transformationen. Es werden dann die Beziehungen angegeben, die zwischen den Koeffizienten der Gleichungen bestehen müssen, damit eine Involution stattfindet, und endlich werden die Lagen der neuen Geraden, die dann auf der Fläche von Weddle liegen, sowie die entsprechenden Spezialisierungen der Kummerschen Fläche ermittelt. Lö.

J. Drach. Détermination des lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel. C. R. **152**, 1144-1147.

Integration der Gleichung der Krümmungslinien durch Quadraturen; Verknüpfung mit einer Fläche neunter Ordnung. Eine ausführliche Arbeit wird in Aussicht gestellt. Z.

W. Gaedecke. Über eine Erzeugungsweise der inversen Flächen der Mittelpunktflächen zweiter Ordnung. Math. naturw. Bl. **8**, 1-3.

Durch einen festen Punkt P einer Kugel K ziehe man alle Sehnen PQ; diese schneiden eine zweite Kugel K' in einem Punkte Q'. Trägt man dann auf allen Geraden durch P die Strecke $PS = PQ' - PQ$ ab, so ist der Ort der Punkte S eine der im Titel genannten Flächen. Diese Erzeugungsweise, die Verf. schon in seiner Dissertation (Königsberg 1910) angegeben hat, wird hier mit den Hülfsmitteln der elementaren analytischen Geometrie begründet. Sk.

E. Salkowski. Über eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven. Deutsche Math.-Ver. **20**, 255-258.

H. Kössler. Über windschiefe Kegelschnitte. Diss. Halle a. S. 66 S. 8°.

Verbiegt man eine Ebene so, daß die Tangenten eines in ihr gelegenen Kegelschnitts geradlinig bleiben, so geht der Kegelschnitt in eine Raumkurve über, die nach Bianchi als windschiefer Kegelschnitt bezeichnet wird. Ihre Brennpunkte beschreiben Raumkurven, die mit den spärischen Kurven die charakteristische Eigenschaft teilen, daß die Krümmungsmittelpunktskurve auf der Polarfläche ein geodätischer Kreis ist. In der ersten Arbeit werden

gewisse Fragestellungen, die sich an diese Kurven (die durch ihre Beziehungen zum Biegungsproblem der Flächen zweiter Ordnung neues Interesse gewonnen haben) anschließen, berührt und ihre Lösung angedeutet. Die Kösslersche Dissertation benutzt diese Anregung zur expliziten Aufstellung der Lösungsformeln; gewisse Rechnungsfehler, die hier infolge falscher Bestimmung einer Integrationskonstante auftreten, werden in einer späteren Arbeit von Fr. Kurth (Diss. Halle 1913) richtiggestellt. Sk.

E. Salkowski. Katenoid und Sonnenuhrkurven. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. **10**, 23-26.

In einer früheren Mitteilung hatte Scheffers den Begriff der Sonnenuhrkurven eingeführt und ihre Eigenschaften nach Lieschen Methoden erörtert. Verf. zeigt hier, daß das Scheffers sche Problem analytisch gleichwertig ist mit der Bestimmung der Bogenlänge einer Katenoidkurve, daß insbesondere die „charakteristischen Sonnenuhrkurven“ den Geodätischen des Katenoids entsprechen. Die Methode hat den Vorteil, gewisse ausgezeichnete Kurvenklassen — u. a. algebraische Kurven — von vornherein hervorzuheben. Sk.

E. Turrière. Sur certaines surfaces généralisant la chaînette de Coriolis. Nouv. Ann. (4) **11**, 385-394.

Die Coriolissche Kettenlinie gleichen Widerstandes ist charakterisiert durch die Eigenschaft, daß die Projektion jedes Krümmungsradius auf eine feste Richtung eine konstante Länge hat. Hier wird in Verallgemeinerung auf den Raum folgende Aufgabe gelöst: „Es seien C, C' die Hauptkrümmungsmittelpunkte in einem Punkte M einer Fläche S; A sei die Mitte von CC'. Man soll solche Flächen S bestimmen, für welche die Strecke MA sich auf eine feste Richtung als eine Strecke von konstanter Länge projiziert.“ Interessant ist ein Sonderfall, in dem die Fläche S durch Translation Coriolisscher Kettenlinien erzeugt werden kann. Z.

E. Study. Über einige imaginäre Minimalflächen. Leipz. Ber. **63**, 14-26.

Als regulär werden diejenigen analytischen Minimalflächen bezeichnet, auf denen von einem Punkte zwei bestimmte getrennte Haupttangentenkurven ausgehen. Eine Reihe von Sätzen über die geradlinigen von S. Lie gefundenen Minimalflächen dritter Ordnung. (Erweiterung und Berichtigung von Sätzen Geisers: Berl. Ber. 1904, 677-686; F. d. M. **35**, 653.) Ferner wird gezeigt, daß der Satz von Catalan unrichtig ist und es außer den Katenoiden unebene Minimalflächen gibt, die durch Rotation (um eine Minimalgerade) erzeugt werden können (Geisersche Flächen vierter Ordnung). B.

V. Strazzeri. Analisi intrinseca delle elicoidi, con particolare riguardo a quelle ad area minima ed alle pseudosferiche. Palermo Rend. **32**, 143-157.

Der Verf. untersucht die Schraubenflächen von dem Standpunkt, daß sie durch Bewegung einer starren Kurve erzeugt werden können, die bei der Bewegung beständig normal zu den Trajektorien ihrer Punkte bleibt. Er findet, daß die einzigen Raumkurven, die sich in dieser Art bewegen können, die natürliche Gleichung

$$\varrho^2 = \frac{C - 1/\tau - (d\sqrt{\tau}/du)^2}{(1/\sqrt{\tau^3} - d^2\sqrt{\tau}/du^2)^2}$$

haben, worin C eine Konstante, ϱ und τ die Radien der Krümmung und Windung, u die Bodenlänge bedeuten; das Quadrat des Linienelements der Fläche wird $ds^2 = du^2 + \tau(u)\,dv^2$, worin $v =$ const. die Schraubenlinien, $u =$ const. ihre orthogonalen Trajektorien bedeuten. Anwendungen auf die Minimalschraubenflächen und die pseudosphärischen Schraubenflächen beschließen die Arbeit.

Re.

E. Barré. Sur les surfaces minima engendrées par une hélice circulaire. C. R. **153**, 1057-1059.

E. Barré. Sur les surfaces minima engendrées par les hélices circulaires. C. R. **153**, 1461.

Beide Bemerkungen schließen an frühere Untersuchungen des Verf. an (vgl. F. d. M. 38, 632 f., 1907), ohne indessen wesentlich Neues zu bringen.

Z.

Weitere Literatur.

W. Goerl. Über die Spirale am Kegel $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$. Erster Teil. Progr. Leitmeritz. 19 S. 8° (1910).

E. J. Miles. Some properties of space curves minimizing a definite integral with discontinuous integrand. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 390-391.

W. J. Montgomery. The classification of twisted curves of the fifth order. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 524-525.

O. Mühlendyck. Klassifikation der regelmäßig symmetrischen Flächen fünfter Ordnung. Göttingen. 60 S. 8°.

F. R. Williams. Curves on quintic scrolls. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 304.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

C. L. E. Moore. Some properties of lines in space of four dimensions and their interpretation in the geometry of the circle in space of three dimensions. American J. **33**, 129-152.

Die Untersuchung von Geradensystemen im vierdimensionalen Raum ist eng verbunden mit dem Studium von Kreissystemen und anderen geometrischen Konfigurationen im gewöhnlichen Raum. F. Klein hat deshalb zuerst angeregt, die Liniengeometrie im R_4 zu studieren und daraus Schlüsse zu ziehen über die Eigenschaften von Kreissystemen. Da die linearen Komplexe im R_4 von Castelnuovo ausführlich untersucht wurden (Ven. Ist. Atti (7) 2, 855-901; F. d. M. **23**, 865, 1891) und auch die linearen Kreissysteme schon behandelt wurden, hat der Verf. diesen Gegenstand von seinen Betrachtungen ausgeschlossen. Er geht aus von den Gleichungen einer Geraden im R_4, deren Form folgende sei:

$$x = a_1 + \alpha_1 z;\ x_2 = a_2 + \alpha_2 z;\ x_3 = a_3 + \alpha_3 z;\ x_4 = z.$$

Betrachtet man nun der Reihe nach die sechs Größen $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ als Funktionen von 1, 2, 3, 4, 5 veränderlichen Parametern, so erhält man im Raum R_4 Systeme von einfach unendlich vielen Geraden, die eine Regelfläche bilden, von zweifach unendlich vielen Geraden, die eine Linienkongruenz bilden, sowie Familien von dreifach, vierfach und fünffach unendlichen Systemen von Geraden. Der Verf. untersucht der Reihe nach die Eigenschaften aller dieser Gebilde und findet dabei zahlreiche Einzelsätze, die zum Teil schon von anderen, namentlich italienischen Mathematikern (z. B. Segre) gefunden worden sind. Im zweiten Teil der Abhandlung werden diese Untersuchungen verwendet zur Ableitung der entsprechenden Eigenschaften von Kreissystemen im dreidimensionalen Raum. Die inhaltreiche Abhandlung bildet einen wertvollen Beitrag sowohl zur Kreisgeometrie, als auch zur Geometrie im vierdimensionalen Raum im Sinne der von F. Klein im Band I seiner Vorlesung „Einleitung in die höhere Geometrie“ auf S. 242 gegebenen Anregungen. Lö.

C. L. E. Moore. Conjugate directions on a hypersurface in a space of four dimensions and some allied curves. Annals of Math. (2) **13**, 89-102; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 286.

Ein Stück projektiver „ternärer“ Flächentheorie. Zuordnung zwischen geraden Linien und zweidimensionalen Ebenen als Verallgemeinerung der zwischen konjugierten Richtungen der gewöhnlichen binären Flächentheorie. Es würde nahe gelegen haben, die gewonnenen Ergebnisse für die Geometrie der Kugeln und Kreise des dreidimensionalen Raumes zu verwerten. B.

C. L. E. Moore. Infinitesimal properties of lines in S_4, with application to circles in S_3. Amer. Ac. Proc. **46**, 345-362.

Die Geraden des vierdimensionalen Raumes werden durch ihre zehn Plückerschen Koordinaten dargestellt, zwischen denen drei unabhängige quadratische Relationen bestehen, und summarisch die Mannigfaltigkeit von ∞^5, ∞^4 und ∞^3 Geraden untersucht. Die Ergebnisse lassen sich sofort auf die

Geometrie der Kreise im gewöhnlichen Raume deuten, da diese durch dieselben Koordinaten dargestellt werden können. Sk.

R. Weitzenböck. Über den Schnitt zweier quadratischen Räume im vierdimensionalen Raume. Monatsh. f. Math. u. Phys. 22, 150-156.

Im R_4 seien zwei quadratische Räume gegeben durch $R_x^2 = a_x'^2 = 0$, $T_x^2 = \alpha_x'^2 = 0$; sie bestimmen einen Büschel $N: N_x^2 = a_x'^2 + \lambda\alpha_x'^2 = 0$. Die beiden Räume R, T durchdringen sich in einer „Fläche" vierten Grades M, die ohne Doppelpunkt vorausgesetzt wird. Der Büschel N wird auch in Linienkoordinaten $\pi_{ik} = \varrho_{ik}$, in Ebenenkoordinaten $\pi_{ikm} = \varrho_{ikm}$ und in Raumkoordinaten u' dargestellt.

Bedeutet ξ einen Punkt von M, so schneiden sich die beiden Tangentialräume durch ξ an R und T in einer „Tangentialebene" E_ξ von M in ξ. Es wird die Bedingung untersucht, daß E zu einer „singulären" Tangentialebene von R wird, so daß E den Raum R nach einer Doppellinie schneidet; zu dem Behuf muß ξ auf einer „V_1-Kurve" liegen, d. i. dem Schnitt von M mit dem quadratischen Raume $V_1 = 0$, wo V_1 die polarreziproke Abbildung von T bezüglich R ist. Analog gibt es auf M eine V_2-Kurve; diese beiden Kurven sind aber nur partikulare Individuen einer quadratischen ∞^1-Schar von Kurven V_λ, die als Einhüllende auf M eine Kurve H von der Ordnung 16 besitzt. Das Hauptergebnis ist, daß die Kurve H nichts anderes ist, als die Gesamtheit der 16 Geraden auf M. My.

G. Marletta. Sopra i complessi di rette d'ordine uno dell' S_4. Atti Acc. Gioenia (5) **3**, Mem. II (1910).

Ergänzungen zu der Abhandlung des Verf. in Palermo Rend. **28**, 353-399 (F. d. M. **40**, 723, 1909). Lp.

J. Eiesland. On minimal lines and congruences in four-dimensional space. American M. S. Trans. **12**, 402-428.

Übertragung der Abbildung der Punkte des Raumes auf die Minimalgeraden und auf die Linienelemente der Ebene (Lie-Scheffers, Berührungstransformationen S. 446) auf den vierdimensionalen Raum. Die Bemerkung, daß im R_3 jede von Minimalgeraden gebildete Regelfläche eine Minimaldeveloppable sei (S. 408), ist unrichtig. B.

P. H. Schoute. Determination of distances and angles with respect to a regular simplex of coordinates in n-dimensional space. Nieuw Archief (2) **9**, 133-157 (1910).

„Bei der Beschäftigung mit den regelmäßigen Polytopen des Raumes S_n, des Simplex $A(n+1)$ mit $n+1$ Ecken, des Maßpolytopes $B(2^n)$ mit 2^n und des Kreuzpolytopes $C(2n)$ mit $2n$ Ecken, sowie der aus diesen durch regelmäßige Abstumpfung und den polar entgegengesetzten Prozeß abgeleiteten Polytope

ist ein großer Unterschied zwischen A auf der einen Seite, B und C auf der anderen zu bemerken. Während B und C nebst den aus ihnen abgeleiteten sich glatt einer Behandlung mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten fügen, verhalten sich der Simplex und seine Abkömmlinge dagegen widerspenstig. Diese Simplexgruppe wird aber ganz fügsam, wenn wir von homogenen Koordinaten bezüglich des Ursimplex als eines Koordinatensimplex Gebrauch machen und Formeln zu unserer Verfügung haben, welche Abstände und Winkel in diesen Koordinaten ausdrücken. Ich beabsichtige, diese Formeln herzuleiten."

I. Der Abstand zwischen zwei Punkten. 1. Die Gleichung des sphärischen, dem Koordinatensimplex umbeschriebenen Raumes. 2. Die Gleichung eines beliebigen sphärischen Raumes. 3. Bestimmung von Mittelpunkt und Radius. 4. Abstand zwischen den Punkten M und N. 5. Potenz eines Punktes bezüglich eines sphärischen Raumes. II. Polarität in bezug auf einen zu dem Simplex konzentrischen sphärischen Raum. 6. Die Korrespondenz zwischen dem Punkte M mit den Koordinaten μ_i und dem Raume $S_{n-1}^{(M)}$ mit der Gleichung $\sum_1^{n+1} \mu_i x_i = 0$. 7. Polarität in bezug auf den umbeschriebenen sphärischen Raum. III. Abstände zwischen linearen Räumen. 8. Abstand zwischen einem Punkt und einem linearen Raume S_{n-1}. 9. Abstand zwischen einer Linie und einem linearen Raume S_{n-2}. 10. Abstand zwischen einem Raume S_{k-1} und einem Raume S_{n-k}. IV. Bestimmung von Winkeln. 11. Winkel zwischen zwei Linien. 12. Winkel zwischen zwei Räumen S_{n-1}. 13. Winkel zwischen Linie und Raum S_{n-1}. 14. Räume, die miteinander mehr als einen Winkel bilden. 15. Räumliche und mehrdimensionale Winkel.

Lp.

D. A. Gravé. Zur Frage der singulären Punkte algebraischer Gebilde. Suslov Sammlung, 169-170. (Russisch.) Beilage zum Bericht d. Phys.-Math. Ges. f. d. Jahr 1910 (aus den Kiew. Univ. Nachr. Nr. 10).

Für den singulären Punkt n-ter Ordnung der Hyperfläche $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ der Ordnung N im R_{m-1} ist die Gleichung

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\cdots\Pi(\alpha_m)} \times f^{(n)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(\xi_1+\lambda x_1)^{\alpha_1}(\xi_2+\lambda x_2)^{\alpha_2}\cdots(\xi_m+\lambda x_m)^{\alpha_m} = 0$$

identisch befriedigt in bezug auf λ, wenn die Gleichheit existiert:

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\cdots\Pi(\alpha_m)} f^{(n)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m} = 0.$$

Si.

A. Terracini. Sulle V_k per cui la varietà degli S_h $(h+1)$-seganti ha dimensione minore dell' ordinario. Palermo Rend. **31**, 392-396.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden durch ein von Scorza (vgl. F. d. M., **39**, 716, 1908) angenommenes Theorem veranlaßt; ihre Resultate sind in den folgenden Sätzen enthalten:

1. Wenn eine Mannigfaltigkeit V_k des Raumes S_r [wo $r \geqq (h+1)k+h$ ist] die Eigenschaft besitzt, daß ihre $(h+1)$-mal schneidenden S_h eine Mannigfaltigkeit der Dimension $(h+1)k+h-i\,(i>0)$ bilden, so liegen beliebige $h+1$ ihrer k-dimensionalen Tangentenräume S_k in einem $S_{(h+1)k+h-i}$, und umgekehrt.

2. Wenn eine V_k von S_r [wo $r \geqq (h+1)k+h$] die Eigenschaft besitzt, daß ihre $(h+1)$-mal schneidenden S_h eine Mannigfaltigkeit $M_{(h+1)k+h-i}$ $(i>0)$ füllen, so besteht die M im allgemeinen aus $\infty^{(h+1)k+h-i-\delta-j}\,S_{\delta+j}$, wo $j \geqq 0$ und (*) $\frac{i}{h}+h \leqq \delta \leqq h+i$; längs jedem dieser Räume existiert ein fester Berührungsraum von der Dimension $(h+1)h+h-i$.

3. Wenn eine V_k von S_r [$r \geqq (h+1)k+h$] die Eigenschaft besitzt, daß $h+1$ beliebige ihrer k-dimensionalen Berührungsräume in einem $S_{(h+1)k+h-i}$ (wo $i>0$) liegen, so berührt dieser Raum die V_k längs einer gewissen Mannigfaltigkeit M, deren Dimension $d \geqq \dfrac{i+\frac{i}{h}}{h+1}$ ist; jener $S_{(h+1)k+h-i}$ berührt die Mannigfaltigkeit, die aus den S_h besteht, welche die V_k $(h+1)$-mal schneiden, eine Mannigfaltigkeit, die jetzt die Dimension $(h+1)k+h-i$ hat; die Berührung geschieht längs $\infty^{i+\delta+j-h}\,S_h$, welche die V_k in $h+1$ Punkten der Mannigfaltigkeit M schneiden (wo $j>0$ und δ die Einschränkung (*) befriedigt); diese S_h bilden einen $S_{\delta+j}$. La.

R. Torelli. Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche. Annali di Mat. (3) **18**, 81-98.

Ausgangspunkt und Anlaß der vorliegenden Untersuchungen ist eine Abhandlung von F. Severi, über die wir F. d. M. **40**, 711, 1909 berichtet haben. Der Verf. beweist eine Formel, welche allgemeiner als eine Severische ist und eine Beziehung zwischen der Forderung einer zerfallenden Mannigfaltigkeit und der Forderung ihrer Teile gibt. Die Nützlichkeit dieses Resultats erhellt aus der Anwendung, welche der Verf. im letzten Paragraphen seiner Abhandlung auf die Darstellbarkeit einer algebraischen Form als linearer Kombination mehrerer anderen in Fällen macht, die allgemeiner und schwieriger sind als die bis jetzt betrachteten. La.

R. Torelli. Osservazioni di geometria sopra una varietà algebrica. Napoli Rend. (3) **17**, 420-425.

Der Verf. verallgemeinert einige Sätze, welche die Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten betreffen, und die größtenteils Severi verdankt werden. Seine Resultate können hier nicht angeführt werden; um sie verständlich zu machen, würde es notwendig sein, mehrere längere Erklärungen vorauszuschicken. La.

M. Pannelli. Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni. Palermo Rend. 32, 1-47.

Ist V_3 eine dreidimensionale algebraische singularitätenfreie Mannigfaltigkeit, welche in einem linearen Raum R_d (wo d hoch genug vorauszusetzen ist) enthalten ist, so führt bekanntlich die Betrachtung eines in ihr enthaltenen Flächensystems und des ihm adjungierten Flächensystems zu drei invarianten Charakteren Ω_0, Ω_1, Ω_2. Ferner erweist es sich als nützlich, außer dem arithmetischen Geschlecht Π_a von V_3 zwei neue Invarianten I_0, I_1 zu betrachten, die man wie folgt definieren kann:

1. $I_0 = \delta - 2\pi - 2i_0$, wo δ die Anzahl der Flächen eines in V_3 enthaltenen Büschels ist, welche einen Doppelpunkt besitzen; π das Geschlecht der Grundkurve des Büschels, endlich i_0 die Zeuthen-Segresche Invariante desselben Büschels.

2. $I = g + P_0 - 9P_1 - 36P_2 - (\pi - 1) - 28$, wo g das Geschlecht der Jacobischen Fläche eines in V_3 enthaltenen Netzes, π das Geschlecht der Kurve, die im Verein mit P_0 Punkten die Grundkurve desselben Netzes bildet, P_1 das Geschlecht des (veränderlichen) Durchschnitts zweier Flächen desselben Netzes; endlich P_2 das arithmetische Geschlecht einer dieser Flächen.

Zwischen diesen Zahlen haben die folgenden Beziehungen statt:

$$48\Pi_a - 54 = 2I_1 - I_0,$$
$$2\Pi_a - 4 = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2,$$
$$24(\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2) = 2I_1 - I_0 - 42,$$

welche der Verf. schon 1908 dem IV. internationalen Mathematiker-Kongresse mitgeteilt hat (vgl. F. d. M. **40**, 685, 1909). In der vorliegenden Arbeit werden sie in dem Falle bewiesen, daß V_3 der Vollschnitt von vier sechsdimensionalen Mannigfaltigkeiten von R_7 ist. Indem der Verf. es einer künftigen Arbeit vorbehält, sich von dieser Voraussetzung zu befreien, macht er im letzten Paragraphen der vorliegenden Anwendung auf eine Aufgabe der abzählenden Geometrie bezüglich der Flächen eines in einer algebraischen dreidimensoinalen Mannigfaltigkeit enthaltenen Netzes. La.

M. Stuyvaert. Un théorème sur la collinéation dans l'espace à r dimensions. Lomb. Ist. Rend. (2) **44**, 314-330.

Der in Rede stehende Satz lautet wie folgt: „$r+1$ Paare von r-dimensionalen Räumen R_{r-1} im R_r entsprechen sich in ∞^r Kollineationen, deren Doppelpunkte ebenso viele Pyramiden G bilden. Jeder Scheitelpunkt einer G-Pyramide entspricht der Gegenfläche in einer birationalen Transformation von der Ordnung r, deren Fundamentalflächen durch die folgenden Gebilde gehen: 1. Linearräume, in denen sich die Paare gegebener R_{r-1} schneiden; 2. Gerade, welche diese R_{r-1} treffen.“ Falls die gegebenen Raumpaare zwei in bezug auf eine Quadrifläche reziproke Pyramiden bilden, wird die birationale Transformation eine Polarität.

Die Fälle $r = 2, 3$ sind längst bekannt.

Der Verf. beweist jenes Theorem durch einfache Überlegungen und Rechnungen (meist mit Matrizen, die, bekanntlich seine Spezialität bilden); auf

diesem Weg findet er einige erwähnenswerte Resultate, die größtenteils Verallgemeinerungen bekannter Tatsachen der gewöhnlichen Geometrie sind. La.

W. Fr. Meyer. Über die Anwendung eines Sylvesterschen Determinantensatzes auf ein metrisches Problem des R_n. Deutsche Math.-Ver. **20**, 211-216.

Die Elementarformel $2\Delta = bc \sin\alpha$ für den Inhalt Δ eines Dreiecks läßt im R_n für das mit $n!$ multiplizierte (absolute) Volumen V eines $(n+1)$-Ecks $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Analogien zu, die sich auf $n-1$ Reihen von bzw. $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ Ausdrücken verteilen; von diesen Formeln scheint bisher nur die erste Formel der ersten Reihe bekannt gewesen zu sein.

Die $n+1$ Ecken eines $(n+1)$-Ecks im R_n seien mit $1, 2, \ldots, n+1$ bezeichnet, die i-te Ecke habe die rechtwinkligen Koordinaten $\{x^{(i)}\}$. Ferner bedeute $V_{1,2,\ldots,r}$ das mit $(r-1)!$ multiplizierte Volumen des aus dem $(n+1)$-Eck abgespaltenen r-Ecks $(1, 2, \ldots, r)$ und V_1 den Wert Eins.

Zu irgendeinem solchen r-Eck, etwa $(1, 2, \ldots, r)$, gehört, als Verallgemeinerung des gewöhnlichen Sinus $(n = 2)$ und des Eckensinus $(n = 3)$, eine Anzahl $n-r$ von „r-Eckensinus", die sich mittels der Matrix der „Richtungskosinus" eines im R_{n+1} enthaltenen linearen Raumes festlegen lassen. Der s-te dieser Eckensinus sei mit $S^{(1,2,\ldots,r)}_{k_{r+1},\ldots,k_{r+s}}$ $(k > r)$ bezeichnet.

Dann lautet, korrespondierend einem bekannten Sylvesterschen Determinantentheorem, die s-te Formel in der r-ten Reihe $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ für das mit $n!$ multiplizierte Volumen V des $(n+1)$-Ecks:

$$(I_{r,s})\quad V^{\binom{n-r}{s-1}} = \frac{\prod\limits_k V_{1,2,\ldots,r;k_{r+1},\ldots,k_{r+s}}}{V_{1,2,\ldots,r}^{\binom{n-r}{s}}} \cdot S^{(1,2,\ldots,r)}_{k_{r+1},\ldots,k_{r+s}}.$$

Das Produkt $\prod\limits_k$ erstreckt sich hierbei auf die Volumina aller $(r+s)$-Ecke des $(n+1)$-Ecks, in denen das Ausgangs-r-eck $(1, 2, \ldots, r)$ enthalten ist; die links und rechts stehenden Binominalkoeffizienten $\binom{n-r}{s-1}$, $\binom{n-r}{s}$ sind Exponenten.

Im besondern ergibt sich für das Tetraeder $(n = 3)$ folgendes: Sei jetzt $r_{1,2}$ die Länge der Kante $(1, 2)$, Δ_{123} der doppelte Inhalt des Dreiecks (123), $\boldsymbol{T}$ das sechsfache Volumen des Tetraeders (1234). Dann gilt einmal, bei Bevorzugung der Ecke 1, die bekannte Formel: $(I_{1,1})\ \boldsymbol{T} = r_{12} r_{13} r_{14} \cdot S_1$, unter S_1 den Sinus des Dreikants 1 verstanden. Daneben stellt sich die „Polareckenformel". Ist Σ_1 der Sinus des zum Dreikant 1 gehörigen Polardreikants, so wird: $(I_{1,2})\ T^2 = \Delta_{123}\Delta_{124}\Delta_{134} \cdot \Sigma_1$. Endlich hat man noch die „Kantenformel": $(I_{2,1})\ \boldsymbol{T} = \frac{\Delta_{123}\Delta_{124}}{r_{12}} \cdot s_{12}$, wo s_{12} den gewöhnlichen Sinus des Winkels der beiden Ebenen (123), (124) bedeutet. My.

K. Rohn. Der Flächenbüschel zweiten Grades im S_n und gewisse $(n+1)$-Flache. Math. Ann. **70**, 266-293.

Die Invarianten und Kovarianten eines F_2-Büschels: $k_1 A + k_2 B = 0$ im Raume S_n haben sich für das Studium solcher Büschel von großer Bedeutung erwiesen. Das binäre Gebiet (k_1, k_2) bildet dabei vielfach den Ausgang. Die Parameter der $n+1$ „Kegel" des Büschels sind die Wurzeln der Büscheldeterminante Δ. Bei weiteren Fragen handelt es sich um verwickelte Eliminationen der Variabeln aus Systemen von Gleichungen, die teils linear, teils quadratisch sind. Auf den simultanen Invarianten von A und B beruht hierbei die Lösbarkeit des Problems, während das binäre Formensystem von Δ den Schlüssel zur Lösung liefert; oft existiert eine Lösung nur dann, wenn gewisse simultane Invarianten von A und B verschwinden.

Dahin gehört vor allem ein Satz von Rosanes (F. d. M. **16**, 731, 1884) über „konjugierte" Flächen A, B, der hier erweitert wird. Der Satz von Rosanes besagt: Liegen A, B so, daß ein A einbeschriebenes $(n+1)$-Flach zugleich Polar-$(n+1)$-flach von B ist, so gibt es $\infty^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ derartige $(n+1)$-Flache; zugleich existieren (dualistisch) $\infty^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ Polar-$(n+1)$-flache von A, die B umbeschrieben sind. Für die in Rede stehende Lage ist die Bedingung notwendig und hinreichend, daß die simultane Invariante von A, B, die in den Koeffizienten bzw. vom Grade $1, n$ ist, verschwindet, trotzdem das zu lösende System von Gleichungen zunächst sogar $\infty^{\frac{1}{2}(n+1)(n-2)}$ Lösungen erwarten ließe.

Die gemeinte Erweiterung ist folgende (I): Aus dem F_2-Büschel greife man eine Fläche M, andererseits $n+1$ weitere Flächen $\mathcal{A}_i$ so heraus, daß ein Polar-$(n+1)$-flach von M existiert, dessen Ecken einzeln auf den $\mathcal{A}_i$ liegen, so gibt es noch $\infty^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ solcher $(n+1)$-Flache; die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß der Parameter $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ von M der Relation (1) $(\Delta\Omega)\Delta_\mu^n\,\Omega_\mu^n = 0$ genügt. Hier besitzt Ω_k^{n+1} als Wurzeln die Parameter $\lambda_i = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i2}}$ der $\mathcal{A}_i$, und Δ_k^{n+1} als Wurzeln die Parameter $\delta_i = \frac{\delta_{i1}}{\delta_{i2}}$ der $n+1$ Kegel K_i des Büschels; die linke Seite von (1) ist die Funktionaldeterminante von Δ_k^{n+1} und Ω_k^{n+1}.

Der Beweis beruht im wesentlichen auf einer eigenartigen Umformung des Ausdrucks Δ_k^{n+1}. Multipliziert man (1) mit $(\mu\varrho) = \mu_1\varrho_2 - \mu_2\varrho_1$, so läßt sich (1) auf die andere bemerkenswerte Gestalt bringen:

$$(1') \qquad \Sigma\frac{(\lambda_i\varrho)}{(\lambda_i\mu)} = \Sigma\frac{(\delta_i\varrho)}{(\delta_i\mu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

bei beliebigem Werte von $\varrho = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$.

Ist die Bedingung (1) erfüllt, so wird das System der den Satz I charakterisierenden $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Gleichungen zwischen $n(n+1)$ Koordinatengrößen lösbar, und es existieren noch $\infty^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ Lösungen.

Sei weiter $\mathcal{A}_i'$ die zu $\mathcal{A}_i$ in bezug auf M polarreziproke Fläche. Nimmt man dann auf n beliebigen Flächen $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$ des Büschels je einen

Punkt derart an, daß diese n Punkte paarweise harmonisch zu $\boldsymbol{M}$ liegen, so bestimmt jede solche Punktgruppe einen S_{n-1}, und alle diese S_{n-1} umhüllen die Fläche Δ'_n.

Der Hauptsatz I läßt verschiedene beachtenswerte Spezialisierungen zu. Sind $\boldsymbol{K}_0, \ldots, \boldsymbol{K}_n$ die $n+1$ Kegel des Büschels, $\boldsymbol{M}$ eine beliebige Fläche desselben, so gibt es $\infty^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ $(n+1)$-Flache, die zu $\boldsymbol{M}$ polar sind, und deren Ecken einzeln auf den $n+1$ Kegeln liegen.

Andererseits mache man den Kegel $\boldsymbol{K}_n$ zur Fläche $\boldsymbol{M}$, dann muß auch eine der Flächen Δ_i mit $\boldsymbol{K}_n$ zusammenfallen, und ein Polar-$(n+1)$-flach von $\boldsymbol{K}_n$ hat stets eine Ecke im Scheitel K_n von $\boldsymbol{K}_n$. Wie im allgemeinen Falle umhüllen die zugehörigen S_{n-1} eine Fläche Δ'_n, die aber jetzt die Polarreziproke von $\boldsymbol{K}_n$ in bezug auf $\boldsymbol{K}_n$ selbst ist, so daß die Tangentialräume S_{n-1} von $\boldsymbol{K}_n$ auch solche von Δ'_n sind. Überdies liegen die Berührungspunkte von Δ'_n und $\boldsymbol{K}_n$ im Polarraume des Scheitels K_n bezüglich des Büschels. Es wird sodann die Figur zweier Polar-$(n+1)$-flache in bezug auf $\boldsymbol{M}$ näher untersucht. Bilden $2(n+1)$ Punkte in irgendeiner Verteilung die Ecken zweier Polar-$(n+1)$-flache, so bilden sie auch in jeder andern Verteilung die Ecken zweier Polar-$(n+1)$-flache in bezug auf eine (von $\boldsymbol{M}$ verschiedene) Fläche zweiten Grades. Zwischen den Koordinaten der Ecken zweier Polar-$(n+1)$-flache bestehen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Relationen; der angegebene Satz besagt, daß diese Relationen bei jeder Verteilung der Ecken in zwei Polar-$(n+1)$-flache die gleichen bleiben.

Im zweiten Abschnitte handelt es sich um Polar-$(n+1)$-flache einer Fläche zweiten Grades $\boldsymbol{B}$, deren Kanten eine andere Fläche zweiten Grades $\boldsymbol{A}$ berühren. Hierzu sind $n(n+1)$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Bei beliebiger Wahl von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ existiert indessen keine Lösung; es gilt vielmehr der Satz von Segre (F. d. M. **16**, 96, 1884): „Es muß die simultane Invariante von A, B verschwinden, die in den Koeffizienten vom Grade 2, bzw. $n-1$ ist, damit überhaupt ein $(n+1)$-Flach der gedachten Art existiert; dann aber gibt es ∞^1 solcher Vielflache.“ Vgl. für $n=3$ die Ausführung von Vogt (F. d. M. **26**, 730, 1895). Ein tieferes Eindringen in diesen Satz von Segre und zugleich eine vollständige Lösung des Problems wird ermöglicht durch den Satz (II): „Existiert ein Polar-$(n+1)$-flach von $\boldsymbol{B}$, dessen Kanten $\boldsymbol{A}$ berühren, so bestimme man im Büschel $k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{B}=0$ die $n+1$ Flächen durch die $n+1$ Ecken des $(n+1)$-Flachs; ihre Parameter hängen von einer Gleichung $\Omega_k^{n+1}=0$ ab, deren Koeffizienten mit den entsprechenden der Diskriminantengleichung $\Delta_k^{n+1}=0$ übereinstimmen, mit der alleinigen Ausnahme, daß der Koeffizient von $k_1^2 k_2^{n-1}$ in der ersteren Gleichung beliebig bleibt, während er in der letzteren Gleichung verschwindet.“

Die Ecken der ∞^1 $(n+1)$-Flache liegen auf einer Kurve $\boldsymbol{\Omega}$. Wählt man aus dem Büschel $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ $(n+1)$ Flächen aus, deren Parameter der Gleichung $\Omega_k^{n+1}=0$ genügen, so schneidet jede von ihnen die Kurve $\boldsymbol{\Omega}$ — abgesehen von 2^n festen Punkten — in einer Gruppe von 2^n weiteren Punkten. Es gibt dann 2^n $(n+1)$-Flache der gesuchten Art, so daß die Ecken eines jeden sich auf die $(n+1)$ Gruppen verteilen.

Der dritte Abschnitt behandelt die $(n+1)$-Flache, deren Kanten zwei Flächen zweiten Grades $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ berühren. Als wesentliches Beweismittel dient wiederum eine entsprechende Umformung der Diskriminantengleichung $\Delta_k^{n+1}=0$.

Wir beschränken uns hier auf den Fall des gewöhnlichen Raumes ($n = 3$). Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Tetraeders der gesuchten Art ergibt sich das Verschwinden einer gewissen simultanen Invariante von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, die in den Koeffizienten von Δ_k^4 vom vierten Grade ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es ∞^1 solcher Tetraeder.

Es lassen sich die Beziehungen angeben, die zwischen den Parametern der vier Kegel des Büschels ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$) und den Parametern der vier durch die Ecken eines solchen Tetraeders gehenden Flächen des Büschels bestehen. Es folgt, daß die Seitenflächen der ∞^1 Tetraeder eine abwickelbare Fläche achter Klasse umhüllen, während ihre Ecken auf einer Raumkurve achter Ordnung liegen.

Der Referent fügt noch die historische Bemerkung hinzu, daß er den im Eingange erwähnten Satz von Rosanes auf eine einfache Identität zurückgeführt hat, vgl. F. d. M. **40**, 630, 1909. My.

Ch. H. Sisam. On three-spreads satisfying four or more homogeneous linear partial differential equations of the second order. American J. **33**, 97-128.

Der Verf. behandelt in der vorliegenden Arbeit das dreifach ausgedehnte Gebilde des n-dimensionalen Raums S_n, welches der Ort solcher Punkte ist, deren homogene projektive Koordinaten x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) n linear unabhängige Lösungen von vier oder mehr homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind. Er folgt dabei dem Gedankengang und der Methode, die C. Segre angewandt hat bei der Diskussion der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, die einer oder mehreren homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen (Torino Atti **42**, 1047; F. d. M. 38, 671, 1907). Es wird zunächst festgestellt, unter welchen Bedingungen eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit mehr als vier der genannten Differentialgleichungen befriedigt; dabei ergibt sich, daß sie mehr als sechs solcher Gleichungen überhaupt nicht erfüllen kann. Befriedigt sie sechs, so liegt sie in einem S_3; befriedigt sie fünf, so ist sie entweder eine Hyperfläche in einem S_4, oder sie wird von einem System von Ebenen mit der Eigenschaft erzeugt, daß konsekutive Ebenen sich in einer Geraden schneiden. Hierauf wird gezeigt, daß, wenn die Mannigfaltigkeit vier der genannten Gleichungen genügt (d. h. wenn ihre Koordinaten, als Funktionen von drei Parametern betrachtet, vier linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen), sie in einem beliebigen Punkt vier Tangenten besitzt, die sie dreipunktig berühren. Endlich wird untersucht, unter welchen Bedingungen zwei oder mehr von diesen dreipunktig berührenden Tangenten in einem willkürlichen Punkt konsekutiv werden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen, die hier nicht im einzelnen aufgeführt werden können, sind zum Teil Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Ergebnisse von Segre. Sie liefern nicht bloß eine Reihe von Eigenschaften der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten im S_n und insbesondere der Hyperflächen im S_4, sondern sie sind auch von Wichtigkeit für die Theorie der homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Lö.

G. Kowalewski. Zur Differentialgeometrie der projektiven Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades. Wien. Ber. **120**, 531-542.

In dem R_n mit den homogenen Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ betrachtet der Verf. eine Kurve gegenüber der projektiven Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$. In jedem Punkt hat die Kurve eine Tangente, eine zweifach, eine dreifach usw. ausgedehnte Schmiegungsebene, und die Mannigfaltigkeit zweiten Grades liefert durch Polarenbildung auf jedem dieser Tangentialgebilde einen bei der Gruppe kovarianten Punkt. Der Verf. stellt explizite Formeln auf für die Koordinaten dieser kovarianten Punkte und für die nach der Bogenlänge genommenen Differentialquotienten der Koordinaten. Außer dieser Verallgemeinerung der Frenet-Serretschen Formeln auf den vorliegenden Fall entwickelt er auch die Verallgemeinerung der Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Pickschen Identitätsbedingungen für die kovarianten Koordinaten. Endlich gibt er eine bemerkenswerte Darstellung für die Mannigfaltigkeit zweiten Grades. Den Schluß der Arbeit bilden Andeutungen über den Fall einer ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades.

El.

Weitere Literatur.

Bates. An application of symbolic methods to the treatment of mean curvatures in hyperspace. Diss. Univ. Chicago 1911; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 286.

L. P. Eisenhart. Minimal surfaces in plane four-space. Amer. Math. Bull. (2) **18**, 60.

M. de Franchis. Sulle varietà algebriche ad n dimensioni transformabili razionalmente in varietà a $p < n$ dimensioni, aventi il genere p-dimensionale maggiore di p. Atti Acc. Gioenia (5) **3**, Mem. IV (1910).

L. Ingold. Curves in a function space. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 226.

L. Ingold. Surfaces in a function space. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 226-227.

C. Isabella. Esercizi relativi ad applicazioni e interpretazioni di alcuni teoremi trigonometrici; loro estensione ad un iperspazio. Atti Soc. dei Nat. e Mat. (4) **13**, 85-97.

J. Lipke. Natural families of curves in a general curved space of n dimensions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 287.

A. Löwenherz. Die Frenetschen Formeln im R_{n+1}. Diss. Königsberg. 73 S.

S. Mukhopadhyaya. Parametric coefficients in the differential geometry of curves. Bull. Calcutta M. S. **1**, 187-200 (1909).

W. Müller. Die rationale Kurve fünfter Ordnung im fünf-, vier-, drei-, und zweidimensionalen Raum. Diss. Leipzig. 100 S. 8°.

A. Ranum. Ruled surfaces and planed hypersurfaces in four-dimensional space. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 302.

A. Ranum. On the projective differential geometry of spreads generated by ∞^1 flats. Amer. Math. Soc. Bull. (2) 18, 61-62.

C. H. Sisam. On hyperconical connexes in space of r dimensions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 522.

R. Zucchetti. Proprietà metriche di una $C^{(n)}$ dell' S_n osculatrice all' iperpiano all' infinito. Milano: Pirola. 29 S. 8⁰.

Kapitel 4.

Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme).

E.-J. Wilczynski. Sur la théorie générale des congruences. Belg. Mém. (2) **3**, sep. 86 S. 4⁰.

Die rein projektive Theorie der Linienkongruenzen, die der Verf. in seiner preisgekrönten Abhandlung entwickelt, gründet sich auf die Betrachtung eines Systems (D) von linearen und homogenen partiellen Differentialgleichungen, denen vier Größenpaare $(y^{(k)}, z^{(k)})$ $(k = 1, \ldots, 4)$ genügen, die sich als die homogenen Koordinaten zweier Punkte P_y und P_z des laufenden Strahles auffassen lassen. Um nun die Eigenschaften der Kongruenz zu ermitteln, muß man die Invarianten und Kovarianten des Systems (D) bezüglich der durch die Formeln

$$\bar{y} = \alpha(u,v)y + \beta(u,v)z, \quad \bar{z} = \gamma(u,v)y + \delta(u,v)z, \quad \bar{u} = \varphi(u,v), \quad \bar{v} = \psi(u,v)$$

definierten Transformationsgruppe aufsuchen. Diese Eigenschaften sind dann offenbar auch projektiver Art.

Der angedeutete Grundgedanke wird nicht in voller Allgemeinheit durchgeführt; der Verf. identifiziert vielmehr zur Vereinfachung des analytischen Apparates die Flächen S_y und S_z mit den Mänteln der Fokalfläche und bedient sich der Parameter der Developpabeln. Er beginnt mit der Aufstellung des Systems (D), das zwei Differentialgleichungen erster Ordnung und zwei von der zweiten Ordnung umfaßt. Es folgt die Berechnung der Invarianten und Kovarianten, unter denen sich eine Größe W als besonders bedeutungsvoll erweist. Durch ihr Verschwinden werden die W-Systeme definiert, deren Identität mit Bianchis W-Systemen weiter unten bei Behandlung der Fokalfläche gezeigt wird. § 5 bringt die Einführung der homogenen Linienkoordinaten ω_{ik}. Für jedes ω lassen sich die zweiten Ableitungen durch $\omega, \frac{\partial\omega}{\partial u}, \frac{\partial\omega}{\partial v}$ mittels der Koeffizienten von (D) nur unter Hinzuziehung dreier Hülfsgrößen ausdrücken, deren Beseitigung im allgemeinen Differentiationen erfordert. Ist indessen $W = 0$, so können sie eliminiert werden, und es ergibt sich eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für ω. Dieses Ergebnis fällt mit einem Satze von Darboux zusammen, der für die projektive Theorie der W-Systeme, zu der erst Ansätze vorliegen, von fundamentaler Bedeutung zu sein scheint (vgl. die Mitteilungen von Tzitzéica, C. R. **151**, 971; **152**, 1077). An der Hand von Reihenentwicklungen für y, z und ω wird in § 6 der eine Kongruenz längs eines Strahles berührende lineare Komplex eingeführt. Be-

merkenswert ist die neue charakteristische Eigenschaft der *W*-Systeme, die sich dabei ergibt: zu jedem Strahl eines *W*-Systems gehört ein in der zweiten Ordnung berührender, also „oskulierender" linearer Komplex. In den folgenden Paragraphen wird die Fokalfläche behandelt. Gegenstand besonderer Untersuchung sind die vier (im Falle des *W*-Systems zwei) Regelscharen, welche die Fokalflächen längs ihrer Asymptotenlinien berühren. In §§ 10 und 11 wird das System (*D*) der Laplaceschen Transformation unterworfen. Von Interesse ist die Aufstellung derjenigen Kongruenzen, deren sämtliche Laplacesche Transformierte linearen Komplexen angehören. § 12 betrifft ebenfalls ein spezielles Problem: die Ermittlung der Kongruenzen, deren Fokalfläche aus zwei Flächen zweiten Grades besteht. Beide Aufgaben hängen in analytischer Hinsicht mit der Bestimmung der pseudosphärischen Flächen zusammen. Jo.

G. Sannia. Su due forme differenziali che individuano una congruenza o un complesso di rette. Palermo Rend. **31**, 244-256.

Der Verf. zeigt, daß die drei Koeffizienten der zweiten quadratischen Grundform, deren er sich bei der Darstellung einer Linienkongruenz bedient (s. z. B. Math. Ann. **68**, 409; F. d. M. **41**, 733, 1910), mit Hülfe zweier willkürlichen Funktionen und eines Integrals ϱ einer Laplaceschen Differentialgleichung ausgedrückt werden können. Für die Komplexe gilt eine ähnliche Transformation der zweiten Fundamentalgrößen. Die Entwicklungen werden auf die folgenden drei Probleme angewendet, von denen das erste von Guichard, das zweite von Bianchi und das dritte von Burgatti bereits behandelt worden ist: Bestimmung der Kongruenzen mit gegebenen sphärischen Bildern 1. der abwickelbaren Flächen, 2. der Hauptflächen und 3. der Hauptschränkungsflächen (rigate medie oder distributrici) (bezgl. der ersten beiden Aufg. s. Bianchi, Lezioni di geom. diff. **1**, § 147 u. 145; bezgl. der dritten: Burgatti, Sopra alcune formole fond. rel. alle congruenze di rette, Rom. Acc. L. Rend. (5) 8_1, 515, 1899). Das überraschende Ergebnis, daß die drei Probleme analytisch äquivalent sein sollten, wird in zwei späteren Mitteilungen, über die im folgenden Bande der F. d. M. zu berichten sein wird, insofern erheblich modifiziert, als sich schließlich zeigt, daß man das zweite und das dritte Problem überhaupt nicht von einer partiellen Differentialgleichung abhängig zu machen braucht.

Dem Referenten sei gestattet, auf die Wichtigkeit einer geometrischen Deutung eingeführter Hülfsgrößen hinzuweisen. Es hätte erwähnt werden müssen, daß die Einführung der Größe ϱ eine Abbildung der Kongruenz auf eine neue Kongruenz mit gleichen Strahlrichtungen bedeutet, deren Developpabeln den Regelflächen u oder $v =$ const. der ersten Kongruenz entsprechen. Dann ist sofort zu ersehen, daß die Kenntnis eines Lösungspaares A, B des Gleichungssystems (13) von Art. 9 gleichbedeutend ist mit der Kenntnis einer neuen Lösung ϱ der Laplaceschen Gleichung, so daß die in Art. 10 enthaltenen Folgerungen auf die triviale Tatsache hinauslaufen, daß die Summe zweier Integrale der Laplaceschen Differentialgleichung ein neues Integral derselben darstellt. Jo.

S. Rossi. Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 22, 235-248.

Im ersten Teil der Arbeit behandelt der Verf. den Zusammenhang zwischen den Kummerschen und den Zindlerschen Fundamentalgrößen, übrigens, ohne auf die wichtigen von Cifarelli und von Sannia angegebenen Differentialrelationen einzugehen. Der zweite Teil betrifft Kongruenzen, deren laufender Strahl mit der Normale der Ausgangsfläche sowie mit den Tangenten ihrer Krümmungslinien konstante Winkel bildet. Die Kummerschen Größen einer solchen „Haupttriederkongruenz" werden durch die sechs Fundamentalgrößen der Fläche ausgedrückt. Schließlich wird das Krümmungsmaß einer in der Kongruenz enthaltenen Regelfläche für die auf der Ausgangsfläche gelegenen Punkte berechnet. Eine geometrische Deutung der komplizierten Formel wird nicht gegeben. Jo.

G. Fontené. Sur la coïncidence principale d'un certain connexe. S. M. F. Bull. **39**, 57-78.

Der Verf. hat in seiner Abhandlung „Système différentiel attaché à la coïncidence principale d'un connexe" (S. M. F. Bull. 38, 164; F. d. M. **41**, 736, 1910) das System von Differentialgleichungen aufgestellt, von dem die Bestimmung der in einem Konnex enthaltenen Hauptkoinzidenz abhängt. Es umfaßt als besonderen Fall das Gleichungssystem, auf das man die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückführt. Die vorliegende Arbeit behandelt ein auch in geometrischer Hinsicht interessantes Beispiel, bei dem die Bestimmung eines vollständigen Integrals gelingt. Der Verf. verfolgt zunächst den umgekehrten Weg: er definiert eine zweiparametrige Schar von Flächen zweiten Grades, stellt ihre Differentialgleichung auf und ersetzt diese durch die allgemeinere Gleichung eines Punkt-Ebenenkonnexes. Im zweiten Abschnitt wird dann die Bestimmung der dem Konnex angehörigen Hauptkoinzidenz gemäß der in der angeführten Abhandlung entwickelten Theorie auf das Gleichungssystem der charakteristischen Streifen zurückgeführt, die Punkt und Ebene des Konnexes in vereinigter Lage enthalten. Die eingangs definierte Schar von Flächen zweiten Grades ergibt sich dabei als ein besonders einfaches vollständiges Integral. Es folgt eine Diskussion der Sonderfälle, die sich bieten, wenn gewisse Konstanten verschwinden. Jo.

E. Turrière. Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné. Toulouse Ann. (3) **2**, 143-223 (1910). Auch Sonderausgabe als Thèse. Toulouse: Privat 87 S. 4°.

Verf. beschäftigt sich mit dem von Transon [C. R. **52**, 245-247; J. de l'Éc. Polyt. **22** (1861)] zuerst behandelten Problem, die Normalenkongruenzen eines gegebenen Komplexes zu bestimmen. Zunächst gibt er eine historische Übersicht über den augenblicklichen Stand des Problems und skizziert die Ergebnisse, die von Transon, Darboux (Darboux Bull. 1870; C. R. 1909), Lie (Math. Ann. **5**, 1872), Geisenheimer (Zs. f. Math. u. Phys. 1872)

und Picard (Doktorthese 1877) gewonnen sind. Seine eigenen Untersuchungen knüpfen sich an den Darbouxschen Satz, daß man das Transonsche Problem explizit lösen kann, sobald man ∞^1 nicht parallele Flächen kennt, deren Normalen dem Komplex angehören. Im ersten Kapitel wird die Bedeutung dieses Satzes dargelegt und durch Beispiele erläutert. Das zweite Kapitel gibt die nötigen analytischen Grundformeln, bezogen auf passend ausgewählte Koordinatensysteme. Sodann werden die Komplexe untersucht, die eine bekannte infinitesimale Transformation zulassen. Die nach Lie zu erwartende Integrationsvereinfachung besteht darin, daß die des Problems auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung reduziert wird. Zu ihnen gehören diejenigen Komplexe, deren Gleichung in den Plückerschen Koordinaten der zweiten Reihe homogen sind. Das vierte Kapitel gibt eine Einteilung der Komplexe nach dem Grade der Differentialgleichung des Problems $f(p, q, x, y) = 0$ (in der die unbekannte Funktion explizit nicht vorkommt). Nach Hadamard wird die Gleichung interpretiert als die einer ebenen Kurve, indem p, q als kartesische Koordinaten, x, y als Parameter angesehen werden. Diese Kurve, die als Figuratrix des Komplexes bezeichnet wird, charakterisiert diesen vollständig, so daß damit eine Einteilung der Komplexe gewonnen ist, die der Klassifikation der ebenen Kurven entspricht. Die allermeisten der bisher untersuchten speziellen Komplexe haben als Figuratrix eine Kurve ersten oder zweiten Grades (sind semilinear oder semiquadratisch). Ihr Studium wird in dem Kapitel V wesentlich weitergeführt. Während der Darbouxsche Satz die Kenntnis von ∞^1 Lösungen des Transonschen Problems verlangt, untersucht Turrière im VII. Kapitel, welchen Vorteil die Kenntnis einer einzigen Partikularlösung für die allgemeine Lösung des Problems bietet. Es ergibt sich, daß, wenn von vornherein eine Fläche bekannt ist, die eine gegebene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt, und deren Normalen dem gegebenen Komplex angehören, sofort ∞^1 Flächen derselben Art angegeben werden können, daß das Problem somit als gelöst betrachtet werden kann. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit den speziellen Komplexen, für die das Transonsche Problem identisch ist mit dem Problem der Geodätischen der Singularitätenfläche. In den abschließenden Kapiteln nimmt Verf. die Transonsche Methode auf, um ihre Beziehungen zu seinen eigenen Untersuchungen aufzudecken. Hierbei gewinnt er eine interessante physikalische Interpretation, die das Problem mit der Theorie der Wirbelbewegungen in Beziehung setzen.

Die inhaltreiche Arbeit, die sehr lesbar geschrieben ist, zeichnet sich durch eine Fülle von Einzelergebnissen aus, die hier nicht einmal angedeutet werden konnten. Es hat dem Verf. offenbar Freude gemacht, seine allgemeinen Methoden auf eine möglichst große Anzahl von Beispielen anzuwenden, wodurch er auch für die Spezialuntersuchung der bisher bekannten Komplexe wertvolle Beiträge geliefert hat. Sk.

E. Turrière. Une application du théorème de Malus au problème de Transon. Nouv. Ann. (4) **11**, 160-165.

Hat ein Komplex C die Eigenschaft, daß jeder seiner Kegel eine Symmetrieachse zuläßt, so bilden diese Achsen einen zweiten Komplex C', der, wie zunächst am Beispiel des linearen und eines speziellen quadratischen Komplexes gezeigt

wird, eine gewisse Bedeutung für die Auflösung des Transonschen Problems (Bestimmung der im Komplex enthaltenen Normalensysteme) besitzt. Allgemein ergibt sich durch Anwendung des Malusschen Satzes über die Reflexion der Normalensysteme und im Anschluß an einen wichtigen Satz von Darboux, daß, wenn das Transonsche Problem für C' bereits gelöst ist, die Kenntnis einer in C enthaltenen Normalenkongruenz die Auffindung aller ermöglicht. Jo.

E. Turrière. Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale. Nouv. Ann. (4) **11**, 165-175.

Eine Linienkongruenz, deren Mittelenveloppe (surface centrale) sich auf einen Punkt reduziert, kann stets durch eine Transformation aller Geraden des Raumes in eine Normalenkongruenz übergeführt werden. Die Aufgabe, alle in einem Komplex enthaltenen Kongruenzen zu bestimmen, deren Mittelebenen durch einen Punkt gehen, ist demnach analytisch äquivalent mit dem Transonschen Problem (vgl. das vorstehende Referat), besitzt aber eine größere Allgemeinheit insofern, als der Punkt im Raume beliebig angenommen werden darf. Eine von Keraval (Surfaces partiellement cylindroïdes, Nouv. Ann. (4) **10**, 539; F. d. M. **41**, 702, 1910) gefundene Eigenschaft der Humbertschen Schar von Flächen zweiten Grades hat den Verf. zur Behandlung eines speziellen Problems angeregt: Er fragt nach der allgemeinsten einparametrigen Schar koaxialer Flächen zweiten Grades, für die die Gesamtheit der Erzeugenden eine Kongruenz bildet, deren Mittelebenen sich in dem gemeinsamen Zentrum schneiden, und findet als Bedingung, daß die Flächen der Schar die zyklischen Ebenen gemein haben müssen. Es schließen sich einige Bemerkungen über die Humbertsche Schar an: die Kongruenz der Erzeugenden ist in gewissen Komplexen dritter Ordnung enthalten. Jo.

E. Turrière. Sur un complexe du quatrième ordre. Nouv. Ann. (4) **11**, 205-213.

Die Beschäftigung mit der Wellenfläche führte seinerzeit Darboux dazu, diejenige Kongruenz zu untersuchen, die durch eine bewegte Gerade erzeugt wird, von der drei bestimmte Punkte auf drei festen, zueinander senkrechten Ebenen bleiben. Er zeigte unter anderem, daß sie eine Normalenkongruenz ist. Der Verf. verallgemeinert den Darbouxschen Gedanken, indem er den Komplex behandelt, aus dessen Geraden zwei zueinander senkrechte Ebenen ein Segment von konstanter Länge ausschneiden. Er ist von der vierten Ordnung. Die Bestimmung der in ihm enthaltenen Normalenkongruenzen (Transonsches Problem) gelingt auf Grund der Tatsache, daß der Komplex sich durch Translation der Darbouxschen Kongruenz längs der Schnittlinie zweier Ebenen erzeugen läßt, so daß bereits eine Schar nicht paralleler Orthogonalflächen bekannt ist. Zu einer neuen geometrischen Definition des Komplexes gelangt der Verf. mit Hülfe seiner Transformation der Geraden des

Raumes (Nouv. Ann. (4) 9, 254; F. d. M. 40, 722, 1909). Für die Darbouxsche Kongruenz weist er dabei nach, daß sie einem tetraedralen Komplex angehört. Jo.

E. Turrière. Détermination des complexes dont les surfaces résolvantes sont de révolution et coaxiales. Nouv. Ann. (4) 11, 262-266.

Die Bestimmung derjenigen Komplexe, für die die Resolventenflächen des Transonschen Problems Rotationsflächen sind, ist gleichbedeutend mit der Ermittlung aller Vektorfelder von der Intensität 1, deren Wirbellinien koaxiale Kreise sind. Es zeigt sich zunächst, daß die Komponenten von der Form $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} + \zeta(z, \sqrt{x^2+y^2})$ sind. Die Bedingung $\Sigma X^2 = 1$ läßt sich dann auf verschiedene Weisen behandeln, je nachdem man V oder ζ als gegeben ansieht. In einem speziellen Falle läßt sich die Integration durchführen. Jo.

E. Turrière. Sur un complexe quadratique dont tous les cônes sont de révolution. Nouv. Ann. (4) 11, 308-313.

In seiner Abhandlung: Une application du théorème de Malus au problème de Transon (Referat S. 684 dieses Bandes) hat der Verf. gezeigt, daß sich für die Lösung des Transonschen Problems in bezug auf einen gegebenen Komplex (Bestimmung der in ihm enthaltenen Normalenkongruenzen) besondere Vorteile ergeben, wenn jeder Kegel des Komplexes eine Symmetrieachse besitzt. Für den linearen Komplex ist die Zahl der Symmetrieachsen sogar unendlich groß. Doch ist das nicht der einzige derartige Fall, wie der Verf. an dem Beispiel eines quadratischen Komplexes ausführt, dessen sämtliche Kegel Rotationskegel sind. Die allgemeinsten Orthogonalflächen dieses Komplexes lassen sich auf Grund infinitesimaler Transformationen, denen gegenüber der Komplex invariant ist, bestimmen. Sie sind durch eine Eigenschaft der sphärischen Bilder ihrer Krümmungslinien ausgezeichnet; ihre Differentialgleichung charakterisiert sie außerdem als kongruent mit ihren Parallelflächen (Darboux, Systèmes orthogonaux, 86). Jo.

E. Turrière. Le problème de Transon en géométrie réglée. Ens. math. 13, 216-220.

Die Arbeit bringt einen geschichtlichen Überblick über die Entwicklung des Transonschen Problems: die in einem gegebenen Linienkomplex enthaltenen Normalenkongruenzen zu ermitteln. Der Verf. verweist auf eigene, neue Untersuchungen (Referate vorstehend). Jo.

E. Turrière. Sur les fonctions synectiques. Ens. math. 13, 221-223

Es wird ein spezieller Linienkomplex betrachtet, für den die Ermittlung der in ihm enthaltenen Normalenkongruenzen (Transonsches Problem) von zwei Differentialrelationen abhängt, die mit den Cauchy-Riemannschen Gleichungen der Funktionentheorie übereinstimmen. Jo.

E. Turrière. Sur certaines transformations de droites. Ens. math. **13**, 362-368.

Der Verf. bedient sich einer speziellen Darstellung der Linienkongruenzen: die Bildkugel wird auf die Parameter u und v der imaginären Erzeugenden bezogen; die Ausgangsfläche wird von den Fußpunkten der Lote gebildet, die vom Koordinatenanfang auf die Strahlen gefällt sind. Durch zwei willkürliche Funktionen p und q von u und v wird dann eine bestimmte Kongruenz festgelegt. Die Formeln $p' = P(p, q), q' = Q(p, q)$ definieren eine Transformation der Kongruenz mit Beibehaltung der Richtung. Es wird nach denjenigen Transformationen gefragt, die Normalenkongruenzen in ebensolche überführen. Jo.

E. Turrière. Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1910): question de mathématiques spéciales. Solution. Nouv. Ann. (4) **11**, 72-80.

Der Verf. löst die auf S. 402 des voraufgehenden Bandes der Nouv. Ann. im Wortlaut mitgeteilte Aufgabe, die, wie er in der Einleitung ausführt, einen ausgearteten tetraedralen Komplex betrifft. Er beweist: 1. Sind P und Q zwei kongruente gleichseitige hyperbolische Paraboloide mit derselben Achse und gemeinsamem Scheitel, so haben die Geraden D, deren konjugierte Polaren bezüglich der Paraboloide, D' und D'', in einer Ebene liegen, die Eigenschaft, die Achse entweder rechtwinklig zu kreuzen oder sie zu schneiden; D' und D'' haben gleichen Abstand von der Achse, ihre Projektionen auf die Normalebene zur Achse schließen einen konstanten Winkel ein. 2. Nimmt man zu einer solchen Geraden D die konjugierte D_1 in bezug auf P, zu D_1 die konjugierte D_2 in bezug auf Q usf., so liegen $D_1, D_3, \ldots$ einerseits, $D, D_2, \ldots$ andrerseits auf je einem einschaligen Hyperboloid. 3. Bewegt die Gerade D sich so, daß sie einen konstanten Winkel mit der Achse bildet, während D' und D'' miteinander einen konstanten Winkel einschließen, so erzeugt D eine Schraubenregelfläche und der Schnittpunkt von D' und D'' eine Schraubenlinie. Für den Fall einer partiellen Painlevéschen Schraubenfläche liegt die Schraubenlinie auf dieser. Jo.

R. Baldus. Über die algebraischen Strahlensysteme, welche unendlich viele Strahlenbüschel enthalten. Math. Ann. **71**, 275-288.

Eine (algebraische) Linienkongruenz kann ∞^1 Strahlenbüschel enthalten, deren Scheitel dann eine Kurve C bilden, während ihre Ebenen eine abwickelbare Fläche (C') mit der Rückkehrkante C' umhüllen. Im allgemeinen ist eine

derartige Kongruenz also Schnitt des Sekantenkomplexes von C mit dem Tangentenkomplex von C'. Je nach der Wahl der beiden Raumkurven ist indessen die Unterscheidung besonderer Fälle erforderlich, so daß man zu einer Klassifikation der in Rede stehenden Kongruenzen geführt wird. Der erste Teil der Untersuchungen bezieht sich auf Ordnung, Klasse und Rang sowie auf das Verhalten der Brennpunkte, der Brennebenen und der stationären Tangenten. Der zweite Teil behandelt eine Abbildung solcher Kongruenzen aufeinander, vermöge deren sich auch die Strahlenbüschel entsprechen. Jo.

M. J. van Uven. Algebraische Strahlenkongruenzen und verwandte komplexe Ebenen als Schnitte derselben. Amst. Ak. Verhdl. **10**, 1-527.

Für die Untersuchung von Paaren komplexer Zahlen $w = u + iv$, $w' = u' + iv'$ bietet ihre Abbildung auf die vierdimensionale Mannigfaltigkeit der Geraden des Raumes ein vorteilhaftes Hülfsmittel. Der vom Verf. gewählte Weg besteht darin, die Ebene $[w']$ parallel zur Ebene $[w]$ anzunehmen und die Achsen von $[w]$ senkrecht auf $[w']$ zu projizieren. Aus der Gesamtheit der Verbindungslinien, die den Zahlenpaaren entsprechen, wird durch die Festsetzung $w' = f(w)$ eine Kongruenz herausgehoben, die als „Abbildungskongruenz“ bezeichnet wird. Durch das Studium derartiger Kongruenzen soll die Behandlung konformer Abbildungen erleichtert werden. Von Bedeutung ist dabei die Tatsache, daß eine Abbildungskongruenz, die eine Funktion darstellt, gleichzeitig eine Gruppe von anderen, meist komplizierteren Funktionen vertritt. Das Hauptgewicht bei seinen Untersuchungen legt der Verf. auf die Regelflächen, die von einem Komplexstrahl beschrieben werden, der sich auf eine gewisse Kurve stützt.

Nach einem einleitenden Abschnitt über Koordinatensysteme werden zunächst die zu den Funktionen $w' = \frac{c^2}{w}$ und $w' = \frac{w^2}{c}$ gehörigen Abbildungskongruenzen behandelt.

Im dritten Abschnitt wird zur Vorbereitung des folgenden ein Diskussionsverfahren entwickelt, das sich auf gewisse irrationale Gleichungen triangularsymmetrischer Kurven bezieht.

Im vierten Abschnitt werden unter Verwendung dieses Prinzipes die zu $w' = w^N$ gehörigen Kongruenzen untersucht. Dabei werden die Fälle $N > 0$ und $N < 0$ unterschieden; die Abbildungskongruenzen heißen parabolisch oder hyperbolisch.

Die gewonnenen Ergebnisse werden im folgenden Abschnitt für die Annahmen $N = 3, = \frac{3}{2}$ und $= -2$ spezialisiert.

Im sechsten Abschnitt wird gezeigt, wie eine Abbildungskongruenz zur Untersuchung mehrerer konformen Abbildungen verwendet werden kann. Die Methode besteht darin, die Kongruenz mit zwei weiteren Parallelebenen zum Schnitt zu bringen.

Über die Fülle von Einzelheiten, die sich ergeben, berichtet eine Übersicht am Schlusse jedes Abschnitts. Jo.

C. SERVAIS. Sur la torsion d'une ligne géodésique. Mathesis (4) 1, 9-11.

Beweis des Satzes: Eine Gerade n einer Normalenkongruenz ist Tangente an den beiden Schalen Σ_1, Σ_2 der Brennfläche in den beiden Punkten M_1, M_2. Man bezeichne mit R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien von Σ_1 in M_1, mit τ_1 den Torsionsradius der geodätischen Linie von Σ_1, die in diesem Punkte die Gerade n berührt; mit R_1', R_{22}', τ_2' die analogen Größen von Σ_2 in M_2. Dann ist $\tau_1 \tau_2 \overline{M_1 M_2^2} = R_1 R_2 \,.\, R_1' R_2'$. Mn. (Lp.)

E. v. WARTBURG. Über den Achsenkomplex. Monatsh. f. Math. u. Phys. 22, 249-278.

Der Achsenkomplex, d. h. die Gesamtheit der Lote, die von den Punkten des Raumes auf ihre Polarebenen bezüglich einer Fläche zweiten Grades gefällt sind, wird mit Hülfe der Methoden der differentialen Liniengeometrie untersucht, wie sie Zindler im 2. Bande seines Werkes (Liniengeometrie mit Anwendungen, Leipzig 1906) entwickelt hat. Die Beziehungen eines Komplexstrahles zu seiner Umgebung werden mittels des Verteilungsparameters behandelt, der Quotient zweier ternären quadratischen Differentialformen ist. Er gestattet die Abbildung der Fortschreitungsrichtungen auf einen Kegelschnittbüschel der Ebene. Von ausgezeichneter Bedeutung sind die beiden Kegelschnitte der schneidenden und der zylindrischen Richtungen, von denen der zweite stets in ein konjugiert imaginäres Geradenpaar zerfällt, ferner der ebenfalls zerfallende Kegelschnitt der komplementaren Richtungen; dazu kommen diejenigen Punkte der Bildebene, die der isotropen Richtung, der isotropen Nebenrichtung und der Gegenrichtung entsprechen. Es folgt die Bestimmung der im Achsenkomplex enthaltenen Normalenkongruenzen nach der von Zindler (l. c. 2, § 49) angegebenen Methode. Nach Behandlung der Hauptrichtungen und Hauptflächen, der Wenderichtungen und Wendeflächen werden mit Hülfe der Mongeschen Gleichung des Komplexes die Orthogonalflächen ermittelt. Der vorletzte Abschnitt betrifft die parabolischen Kongruenzen des Komplexes; der letzte bringt die Anwendung einer von Zindler herrührenden Parameterdarstellung, bei der die Koordinaten des Zentralpunktes die Rolle der Parameter spielen. Jo.

V. JAROLÍMEK. Ein Beitrag zum Achsenkomplexe von Reye. Prag. Ber. 1911, Nr. 9, 10 S. (Böhmisch.)

Eine Untersuchung dieses Komplexes mit Hülfe der analytischen Geometrie. Pe.

L. GODEAUX. Sur les congruences de droites. Ens. math. 13, 27-31.

Die Arbeit gibt eine Klassifikation der linearen Strahlenkongruenzen an der Hand eines elementaren Verfahrens, das sich auf die Betrachtung zweier, zunächst nicht spezifizierter, die Strahlen enthaltender Ebenensysteme gründet. Es ergeben sich folgende Typen von linearen Kongruenzen: 1. die gemeinsamen Sekanten zweier Geraden, 2. der Strahlenbündel, 3. die gemeinsamen

Sekanten einer Geraden und einer Kurve von der Ordnung $\alpha n + 1$, die auf der Geraden n α-fache Punkte hat, 4. die Strahlenbüschel, deren Scheitel auf einer Geraden liegen, und deren Ebenen durch diese Gerade gehen, wobei zwischen den Punkten der Geraden und den Ebenen eine Korrespondenz $(1, n)$ besteht, 5. die Bisekanten einer Raumkurve dritter Ordnung. Jo.

L. GODEAUX. Sur les congruences linéaires de coniques. C. R. **152**, 1149-1151.

Die Gesamtheit der Kegelschnitte, von denen sechs Punkte auf einer gegebenen Raumkurve C liegen, ist eine Kegelschnittkongruenz (System von ∞^2 Kegelschnitten). Der Verf. fragt, wie C beschaffen sein muß, damit die Kongruenz linear wird, d. h. durch jeden Punkt des Raumes je ein Kegelschnitt hindurchgeht. Die möglichen Kurven werden genauer charakterisiert (Klasse, Geschlecht usw.) und in vier Fälle eingeteilt. Die gefundenen Kongruenzen sind von Montesano bereits 1895 angegeben worden (Napoli Rend. (3) **1**, 93, 155; F. d. M. **26**, 624, 1895). Der Verf. vermißt bei Montesano den Nachweis, daß diese Kongruenzen die einzigen von der verlangten Eigenschaft sind. Am Schlusse findet sich eine Bemerkung über lineare Kongruenzen von Kegelschnitten, die sich mit im ganzen sechs Punkten auf mehrere Raumkurven stützen. Jo.

D. MONTESANO. Sur les congruences linéaires de coniques. C. R. **153**, 45-47.

Der Verf. wendet sich gegen den Inhalt der vorstehend besprochenen Note von Godeaux: 1. Die Behauptung von Godeaux, der Verf. habe nicht gezeigt, daß die von ihm gefundenen Kongruenzen von Kegelschnitten, die eine gegebene Raumkurve in sechs Punkten schneiden, auch wirklich die einzigen seien, ist unzutreffend; 2. die von Godeaux zu einer neuen Herleitung seiner eigenen Ergebnisse benutzte Methode ist nicht exakt; 3. eine von Godeaux angegebene Formel ist falsch. Jo.

D. MONTESANO. Le congruenze lineari di coniche nello spazio. Batt. G. **49** [(3) **2**], 376-377.

Dieser Aufsatz, welcher die Übersetzung der vorstehend angezeigten Mitteilung: „Sur les congruences linéaires de coniques" ist, hat einen zweifachen Zweck: eine Prioritätsreklamation gegen Godeaux und Nachweis einiger Fehler in jener Note. La.

L. GODEAUX. Sur les congruences linéaires de coniques dotées de deux lignes singulières ou d'un point principal et d'une ligne singulière. C. R. **152**, 1461-1463.

Die Mitteilung betrifft 1. die linearen Kongruenzen von Kegelschnitten, von denen immer zwei Punkte auf einer Kurve von mindestens zweiter Ordnung

und vier Punkte auf einer Kurve von mindestens vierter Ordnung liegen, und 2. die linearen Kongruenzen von Kegelschnitten, die durch einen festen Punkt gehen und eine gegebene Raumkurve in vier Punkten treffen. Die möglichen Kurven werden in bezug auf Ordnung, Geschlecht, mehrfache Punkte usw. untersucht, so daß sich eine Klassifikation der beiden Arten von Kongruenzen ergibt. Die erste Art wurde bereits früher von Montesano (Napoli Rend. (3) **1**, 93, 155) behandelt. Jo.

L. Godeaux. Sur un système de coniques de l'espace. Amst. Ak. Versl. **19**, 942-946.

Die Arbeit behandelt ein fünffach unendliches System von Kegelschnitten, dessen Definition an sechs Konnexe von der Ordnung 1 geknüpft ist. Die Kegelschnitte entsprechen birational den ∞^5 aus je einer Ebene und einer in ihr liegenden Geraden gebildeten Raumelementen. Der Kegelschnitt, der einem solchen Element zugeordnet wird, liegt in der Ebene und läßt sich durch eine quadratische Transformation innerhalb der Ebene in die Gerade überführen. Zur Definition dieser Transformation dienen die sechs Konnexe. Diejenigen Geraden, die den durch einen gegebenen Punkt gehenden Kegelschnitten des Systems entsprechen, bilden einen Linienkomplex, der Gegenstand besonderer Untersuchung ist. Jo.

L. Godeaux. Sur la quatrième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert. Nouv. Ann. (4) **11**, 1-17.

Stuyvaert hat in seiner Preisschrift „Cinq études de géométrie analytique" (F. d. M. **38**, 591, 1907) sechs Typen linearer Kongruenzen von Raumkurven dritter Ordnung aufgestellt, die sich ergeben, wenn man eine sechsgliedrige Matrix gleich Null setzt, deren Glieder linear von den homogenen Punktkoordinaten $x_1, \ldots, x_4$ abhängen und außerdem linear und homogen bezüglich dreier Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind. Die ersten beiden Typen wurden von Stuyvaert selber behandelt (Belg. Bull. Sciences; F. d. M. **38**, 659, 1907 u. Palermo Rend. **26**, 64; F. d. M. **39**, 723, 1908), die Typen I, III und VI hat der Verf. mit Hülfe einer birationalen Transformation des Raumes untersucht (Nouv. Ann. (4) **9**, 312 u. Belg. Bull. Sciences 1909; F. d. M. **40**, 721, 1909). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Typus IV, dessen sämtliche C_3 in je vier Punkten eine feste C_6, in je fünf Punkten eine feste C_3 und in je einem Punkte eine feste Gerade schneiden. Es wird eine birationale Transformation des Raumes angegeben, durch welche die Kongruenz von Kurven dritter Ordnung in eine lineare Kongruenz von Geraden übergeführt wird. Mit Hülfe dieser Transformation gelingt es dann auch, noch neue Typen von linearen C_3-Kongruenzen zu bilden. Jo.

L. Godeaux. Détermination des congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe. Palermo Rend. **32**, 286-291.

Es sei $|Q|$ die Gesamtheit der durch eine feste Raumkurve dritter Ordnung Γ gehenden Flächen zweiten Grades, $|F|$ ein lineares System von ∞^5 Flächen dritter Ordnung, die ebenfalls Γ enthalten und keinen Basispunkt außerhalb von Γ besitzen. Ein Flächenpaar Q, F bestimmt eine zweite Schnittkurve γ, ebenfalls von der dritten Ordnung, die Γ in fünf Punkten trifft. Auf Grund dieser Bemerkung gelingt die Bestimmung der linearen Kongruenzen von Raumkurven dritter Ordnung, die eine gegebene Raumkurve Γ in fünf variablen Punkten schneiden. Je nachdem die in $|Q|$ und $|F|$ enthaltenen erzeugenden Flächen K und F einfach oder zweifach unendliche Systeme bilden, lassen sich vier Kategorien derartiger Kongruenzen unterscheiden. Für jeden der Fälle wird die von den singulären Linien gebildete Konfiguration ermittelt. Jo.

L. Godeaux. Sur la cinquième congruence de cubiques de M. Stuyvaert. Belg. Bull. Sc. 1911, 371-375.

Der Verf. bestimmt die zehnte Bedingung, der die Kurven einer Kongruenz genügen, die von Stuyvaert in den „Cinq études de géométrie analytique" untersucht sind (Liége Mém. (3) **7**; F. d. M. **38**, 591, 907). Mn. (Lp.)

D. Montesano. Sur la théorie des complexes linéaires de coniques. Amst. Ak. Versl. **20**, 584-588.

∞^2 Kurven n-ter Ordnung bilden eine Kongruenz, ∞^3 einen Komplex. Ordnung der Kongruenz ist die Zahl der durch einen Punkt gehenden Kurven, Klasse die Zahl der Kurven, die eine gegebene Gerade in zwei Punkten treffen. Für einen Komplex von ebenen Kurven ist die Ordnung die Zahl der in einer Ebene liegenden Kurven, die Klasse diejenige des Kegels, der von den Ebenen der durch einen Punkt gehenden Kurven umhüllt wird. Sind Ordnung und Klasse 1, so heißt die Kongruenz oder der Komplex bilinear. Diese Definitionen rühren vom Verf. her, der 1892 eine vollständige Theorie der bilinearen Kegelschnittkongruenzen veröffentlicht hat (Torino Atti **27**) und jetzt das Erscheinen eines Werkes über Kegelschnittsysteme in Aussicht stellt, in dem ein Kapitel die bilinearen Komplexe von Kegelschnitten ausführlich behandelt. In der vorliegenden Arbeit werden in der Hauptsache Arbeiten von Godeaux (Belg. Bull. Sciences 1908, 597; 1909, 499; Nouv. Ann. (4) **9**, 312) einer Kritik unterzogen: Drei Sätze G.'s über bilineare Kegelschnittkongruenzen seien teils unvollständig, teils unrichtig; insbesondere erweise sich die bei ihrem Beweise benutzte Annahme, daß zwei Kegelschnitte eines bilinearen Komplexes nicht zwei Punkte gemein haben könnten, als irrig. Ähnliches gilt von einer Behauptung G.'s bezüglich eines von Humbert (J. de l'Éc. Pol. **64**) behandelten Komplexes. Die Ebenen der durch einen Punkt gehenden Kegelschnitte eines bilinearen Komplexes bilden einen Büschel, die Achsen aller dieser Büschel einen Linienkomplex; die von G. als 3 angegebene Ordnung desselben sei tatsächlich 6.

Den Schluß der Mitteilung bilden einige Bemerkungen über die Ausdehnung der für die Systeme von Kegelschnitten in Betracht kommenden Methoden auf Kongruenzen und Komplexe anderer ebener Kurven. Jo.

J. Klobouček. Über Kongruenzen von Parabeln, welche ein System von ∞^1 Normalenflächen zulassen. Rozpravy **20**, Nr. 25, 18 S. (Böhmisch.)

J. Klobouček. Sur les congruences des paraboles qui admettent un système ∞^1 de surfaces normales. Bulletin international **16**, 207-213.

Inhalt: 1. Allgemeine, das Problem definierende Gleichungen. 2. Fokalfläche. 3. Über Kongruenzen, deren Fokalfläche sich auf eine Kurve oder einen Punkt reduziert. 4. Einige Kongruenzen, deren Gleichungen sich leicht integrieren lassen. Pe.

J. Wolff. Quadratische omwentelingscomplexen en omwentelingscongruenties (2, 2) (Quadratische Rotationskomplexe und Rotationskongruenzen zweiter Ordnung und zweiter Klasse). Amst. Ak. Versl. **19**, 1280-1284.

Anknüpfend an Untersuchungen von de Vries (Amst. Ak. Versl. **15**, 211, 1906), behandelt der Verf. den Rotationskomplex Ω:

$$A(p_1^2+p_2^2)+Bp_3^2+2Cp_3p_6+Dp_6^2+E(p_4^2+p_5^2)=0,$$

dessen singuläre Flächen aus zwei Rotationsflächen zweiten Grades, O_1^2 und O_2^2, besteht, die sich in den Endpunkten ihrer gemeinsamen Rotationsachse berühren. Die Untersuchung der in Ω enthaltenen linearen Kongruenzen führt auf vier verschiedene Arten, Ω durch Rotation einer linearen Kongruenz entstehen zu lassen. Die singulären Strahlen von Ω bilden zwei Rotationskongruenzen von Ordnung und Klasse 2. Der Schnitt von Ω mit einem linearen Komplex, der Oz zur Achse hat, ist eine quadratische Rotationskongruenz, deren Fokalflächen Rotationsflächen zweiten Grades sind, die O_1^2 und O_2^2 in den Scheiteln der Rotationsachse berühren. Jo.

J. de Vries. Een bilineaire congruentie van biquadratische ruimtekrommen der eerste soort (Eine bilineare Kongruenz von Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies). Amst. Ak. Versl. **20**, 197-201.

Die ∞^2 Schnittlinien zweier Büschel (Q^2) und $(Q^2)'$ von Flächen zweiten Grades bilden eine Kongruenz Γ von Raumkurven vierter Ordnung. Die Ordnung dieser Kongruenz (Zahl der durch einen Punkt gehenden ϱ^4) und die Klasse (Zahl der ϱ^4, für die eine beliebige Gerade Bisekante ist) sind beide gleich 1. Die Basiskurven der Büschel sind singuläre Kurven. Die Untersuchung erstreckt sich besonders auf folgende Punkte: 1. die beiden von den Bisekanten der Basiskurven gebildeten Linienkongruenzen, 2. die durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehenden Bisekanten der ϱ^4 und die von ihren Schnittpunkten gebildete Fläche fünfter Ordnung, für die P trikonischer Punkt

ist, 3. die von den Kurven ϱ^4, die eine Gerade l schneiden, bedeckte Fläche achter Ordnung, für die diejenige ϱ^4, die l zur Bisekante hat, sowie die beiden Basiskurven Doppelkurven sind, 5. die Kurven ϱ^4 mit Doppelpunkt und die zerfallenden Kurven von Γ. Jo.

G. Tzitzéica. Sur les congruences *W*. C. R. **152**, 35-37.

In einer früheren Abhandlung (C. R. **151**, 971) hat der Verf. im Anschluß an einen neuen Beweis des Darbouxschen Satzes, demzufolge die sechs homogenen Linienkoordinaten für ein *W*-Strahlensystem derselben Laplaceschen Differentialgleichung genügen, gezeigt, daß die projektive Behandlung dieser Strahlensysteme gleichbedeutend ist mit der Untersuchung konjugierter Systeme einer vierdimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeit Γ im linearen Raume von fünf Dimensionen. Er konstruiert nun mittels einer Lösung der adjungierten Gleichung zu einem gegebenen konjugierten System auf Γ drei weitere. Die geometrische Deutung für den dreidimensionalen Raum führt auf vier sich zyklisch zusammenschließende *W*-Systeme, von denen je zwei aufeinander folgende einen Brennflächenmantel gemein haben. Zu derartigen Konfigurationen gelangte Bianchi seinerzeit durch Zusammensetzung der Moutardschen Transformationen (Lezioni di geom. diff. 2 (1903), §§ 247 u. 248). Jo.

G. Tzitzéica. Sur certains réseaux conjugués. C. R. **152**, 1077-1079.

Die *W*-Kongruenzen entsprechen, wie der Verf. in zwei früheren Mitteilungen (C. R. **151**, 971; **152**, 35) ausgeführt hat, den konjugierten Systemen einer vierdimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeit Γ im linearen R_5. Von besonderem Interesse ist nun der Fall eines konjugierten Systems von Γ, das gleiche Invarianten besitzt. Die Eigenschaft eines derartigen Systems, die hier abgeleitet wird, überträgt sich auf den gewöhnlichen Raum in Gestalt des folgenden Satzes, der, wie Demoulin in einer späteren Note (C. R. **153**, 590) angibt, von ihm selber bereits 1909 in etwas allgemeinerer Form ausgesprochen worden ist (Belg. Bull. Sciences 1909, 1189): „Bilden die Tangenten eines konjugierten Systems zwei *W*-Kongruenzen, so kommt dieselbe Eigenschaft den durch sukzessive Anwendung der Laplaceschen Transformation gewonnenen neuen konjugierten Systemen zu.“

Für diese konjugierten Systeme, die übrigens stets „isotherm-konjugiert“ sind, führt der Verf. den Namen *R*-Systeme ein und gibt zum Schluß einige spezielle Beispiele. Jo.

G. Tzitzéica. Sur les réseaux *R*. C. R. **153**, 1127-1129.

Die Bestimmung der *R*-Systeme, d. h. derjenigen konjugierten Systeme, deren Tangenten zwei *W*-Kongruenzen bilden, erfordert die Ermittlung von sechs Lösungen einer Laplaceschen Gleichung mit gleichen Invarianten, zwischen denen eine quadratische Relation $\sum_1^6 x_i^2 = 0$ besteht (vgl. des Verf.

frühere Mitteil. C. R. **152**, 1077). Die Kenntnis einer neuen Lösung μ der Laplaceschen Gleichung ermöglicht bekanntlich die Anwendung der Moutardschen Transformation, durch die die x_i in die Lösungen x_i' einer neuen Laplaceschen Gleichung mit gleichen Invarianten übergehen. Es wird gezeigt, daß μ gleichzeitig eine gewisse Differentialgleichung dritter Ordnung erfüllen muß, wenn das Lösungssystem x_i' wieder „quadratisch" sein soll. Bemerkt wird überdies die Existenz von W-Kongruenzen, für die beide Brennflächenmäntel von R-Systemen gebildet werden. Jo.

A. Demoulin. Sur les surfaces R et les surfaces Ω. C. R. **153**, 590-593.

Eine Kongruenz wird unter besonderer Berücksichtigung der beiden zu jedem Strahl konjugierten Brennflächentangenten der Lieschen Transformation unterworfen, welche Geraden in Kugeln verwandelt. Es werden die beiden folgenden Fälle untersucht: 1. daß die Kongruenz dem linearen Komplex, durch den die Liesche Transformation bestimmt wird, angehört, und 2. daß die Kongruenz ein W-System ist. Für den zweiten Fall ergibt sich der vom Verf. bereits 1909 mitgeteilte (Belg. Bull. Sciences), inzwischen von Tzitzéica (C. R. **152**, 1077) in etwas speziellerer Form neu bewiesene Satz: „Ist eine Kongruenz und gleichzeitig eine ihrer Laplaceschen Transformierten ein W-System, so kommt diese Eigenschaft allen ihren Laplaceschen Transformierten zu."

Tzitzéica hat in der zitierten Note für diejenigen konjugierten Systeme, deren Tangenten W-Kongruenzen bilden, den Namen R-Systeme eingeführt. Der Verf. dehnt die Bezeichnung R auf die Flächen und auf die zugehörigen W-Kongruenzen aus. Durch die Liesche Transformation gehen die R-Flächen in gewisse „Ω-Flächen" über, die durch die Eigenschaft charakterisiert werden, daß ihre abwickelbaren Normalenflächen eine geeignet gewählte Fläche in einem konjugierten System mit gleichen Invarianten schneiden. Zu den Ω-Flächen gehören die isothermen Flächen und die Flächen mit isothermer sphärischer Abbildung. Jo.

A. Demoulin. Sur les surfaces R et sur les surfaces Ω. C. R. **153** 705-707.

Die Liesche Transformation, durch welche Geraden in Kugeln verwandelt werden, gestattet, einer isothermen Fläche ein R-System zuzuordnen, von dem immer eine der beiden Tangenten in dem zu der Transformation gehörigen linearen Komplex enthalten ist (s. voriges Referat). Durch Anwendung der Darbouxschen Transformation auf gewisse isotherme Flächen weist der Verf. nach, daß jede Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = \sin\theta$ konjugierte Systeme liefert, für die beide Tangenten in nicht-speziellen linearen Komplexen enthalten sind. Zu demselben Ergebnis ist auf andere Weise Wilczynski in seiner Preisarbeit gelangt (Belg. Mém. (2) 3). Der zweite Abschnitt betrifft diejenigen unter diesen konjugierten Systemen, die sich durch Laplacesche Transformationen reproduzieren; der dritte behandelt die Differentialrelation

der Ω-Flächen, d. h. derjenigen Flächen, die den R-Flächen vermöge der Lieschen Transformation entsprechen. Es wird gezeigt, daß die von Guichard untersuchten Flächen (C. R. **130**, 159) Ω-Flächen sind. Jo.

A. Demoulin. Sur les surfaces *R*. C. R. **153**, 797-799.

Bezüglich der Definition der R-Systeme und der R-Flächen sei auf die Mitteilungen von Tzitzéica (C. R. **152**, 1077; **153**, 1127) und von Demoulin (C. R. **153**, 590, 705) verwiesen (Referate vorstehend). Der Verf. geht von einer Laplaceschen Gleichung mit gleichen Invarianten aus, der die vier homogenen Linienkoordinaten des Strahls und eine Kombination derselben bei einem R-System genügen müssen, und gibt eine spezielle Transformation der Differentialgleichung und ihrer Lösungssysteme an, die man mit den projektiven Transformationen zusammensetzen kann, um dadurch zu beliebig vielen neuen R-Kongruenzen zu gelangen. Es folgt die Aufstellung einer charakteristischen Bedingung für die R-Flächen, die (in die meist übliche Schreibweise übertragen)

$$\frac{\partial \left\{ {11 \atop 2} \right\}}{\partial \beta} = \frac{\partial \left\{ {22 \atop 1} \right\}}{\partial \alpha}$$

lautet, wobei α und β die Parameter der Asymptotenlinien sind. Die Bestimmung dieser Flächen läßt sich dann auf zwei partielle Differentialgleichungen mit zwei unbekannten Funktionen zurückführen. Jo.

M. F. Egan. The linear complex, and a certain class of twisted curves. Dublin Proc. Roy. Ir. Acad. **29**, 33-72.

Egan nennt „P-Kurven" (Picardsche Kurven) Kurven doppelter Krümmung, bei denen die Klasse jedes Zykels der Kurve gleich ihrem Grad ist. Die Abhandlung besteht aus zehn Abschnitten. In Abschnitt III zeigt Egan, daß jede Kurve, deren Tangenten zu einem linearen Komplex gehören, eine P-Kurve ist (Ausdehnung eines Picardschen Satzes). Abschnitt IV ist den rationalen P-Kurven, Abschnitt V den algebraischen P-Kurven gewidmet. In Abschnitt VI gibt Egan hinreichende Bedingungen, daß eine algebraische Kurve zu einem linearen Komplex gehört. In Abschnitt VII sind hauptsächlich metrische Resultate enthalten. In Abschnitt VIII werden die Singularitäten der „P-Quintics" behandelt. In Abschnitt IX werden einige Resultate Pittarellis über die asymptotischen Linien der geradlinigen Flächen eines linearen Komplexes mit Zusätzen gegeben, und daraus folgt dann in Abschnitt X die Diskussion der Eigenschaften der „P-Quintics" mit einer Bitangente. J.

R. Weitzenböck. Über einige spezielle Kollineationen im R_4. Palermo Rend. **31**, 300-317.

Linearer Strahlenkomplex und linearer Ebenenkomplex sind im vierdimensionalen Raume zueinander duale Gebilde. Der Strahlenkomplex besitzt einen Brenn p u n k t, der Ebenenkomplex einen Brenn r a u m (dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit); jede Gerade durch den Brennpunkt gehört dem Strahlenkomplex, jede Ebene des Brennraumes dem Ebenenkomplex an. Die Geraden des Strahlenkomplexes, die durch einen Punkt y gehen, bilden den „Nullraum" von y. In analoger Weise läßt sich bezüglich des Ebenenkomplexes einem dreidimensionalen Raume ein „Nullpunkt" zuordnen. Die Kollineation $M(y)$ im R_4, die den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet, wird nun dadurch festgelegt, daß man zu einem gegebenen Punkte y zunächst in bezug auf den gegebenen Strahlenkomplex den Null r a u m und zu diesem dann wieder den Null p u n k t bezüglich des gegebenen Ebenenkomplexes sucht. Der Verf. bedient sich durchweg des symbolischen Algorithmus, den er in seinem Buche „Komplex-Symbolik" (Sammlung Schubert Nr. 53 (1908)) auseinandergesetzt hat. Er untersucht zunächst die iterierte Operation $M(y)$ (symbolisch: die Potenzen von $M(y)$) und andere damit verwandte Kollineationen. Die dabei auftretenden Invarianten des Komplexpaares lassen sich mit Hülfe zweier Fundamentalinvarianten ausdrücken. Es folgt dann die Bestimmung der Doppelelemente, d. h. derjenigen Elemente, die gegenüber der Operation $M(y)$ invariant sind. Zum Schluß wird der Gang der dualen Betrachtung angedeutet. Jo.

L. Tuschel. Über eine Schraubenliniengeometrie und deren konstruktive Verwertung. Wien. Ber. **120**, 231-254.

Als Elemente einer „Pseudogeometrie" betrachtet Verf. die sämtlichen Schraubenlinien von konstanter vorgegebener Ganghöhe und mit parallelen Schraubungsachsen. In der Tat kann man die Elemente der so konstruierten Mannigfaltigkeit (allerdings nur sehr „im allgemeinen") den Geraden des Raumes zuordnen (Verfahren der „windschiefen Projektion"). Daher nennt Verf. seine Schraublinien Pseudogerade und erhält auf diese Weise gewisse Wendelflächen als „Pseudoebenen"; entsprechend wird der Begriff des Pseudopunktes gedeutet.

Der Gegenstand steht in naher Beziehung zu den von E n g e l behandelten Linienelementen zweiter Ordnung (hier heißen sie „befestigte Kegelschnitte"); auch werden sich fruchtbringende Zusammenhänge mit der komplexen Geometrie der Ebene und der Kinematik herstellen lassen. Dazu ist aber eine analytische Behandlung des Gegenstandes unerläßlich, die erst eine genaue Einsicht in den Gültigkeitsbereich der einzelnen Behauptungen ermöglicht. B.

C. H. Sisam. On algebraic hyperconical connexes in space of r dimensions. Torino Atti **46**, 481-487.

Als algebraischen „hyperkonischen Konnex" im r-dimensionalen Raume S_r bezeichnet der Verf. die Gesamtheit der Punktepaare x, y, deren Koordinaten der Relation

$$F\left(x_0, \overset{m}{\ldots}, x_r;\ y_0, \overset{n}{\ldots}, y_r\right) = 0$$

genügen, wo das Polynom F in den x homogen und vom Grade m und in den y homogen und vom Grade n ist und außerdem die besondere Bedingung erfüllt, daß $F = 0$ bei festgehaltenem Punkt x die Gleichung eines Hyperkegels mit dem Scheitel x wird. Für den S_3 ist dieser Konnex bereits von Masoni (Napoli Rend. **22**, 145) behandelt worden. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, daß die Gleichung $F = 0$ für $m > n$ als Hauptkoinzidenz eines Punkt-Linienkonnexes im S_r gedeutet werden kann, und daß sie für $m = n$ einen Linienkomplex in S_r darstellt. Der Nachweis erfordert die Einführung der Linienkoordinaten $\varrho p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$, mittels deren die y eliminiert werden. An diese Transformation des Ausdruckes F knüpft sich eine Abzählung der willkürlichen Parameter. Jo.

D. Sintzow. Zur Frage der singulären Elemente der Konnexe. IV. Theorie des konjugierten Konnexes. Charkow Ges. (2) **12** Nr. 3, 97-105. (Russisch.)

Abschluß der Abhandlung, besprochen F. d. M. **41**, 738, 1910. Si.

K. Zindler. Réclamation de priorité. Annali di Mat. (3) **18**, 335.

Entgegen einer Bemerkung von G. Sannia hat bereits K. Zindler zwei ternäre quadratische Differentialformen zum Studium der Linienkomplexe benutzt (Zindler, Liniengeometrie Bd. II (1906), S. 184). B.

R. de Saussure. Réponse à l'article de M. Study sur ma „Géométrie des Feuillets" (Communication présentée au Congrès de la Soc. Helvétique des Sc. Nat. Soleure, Août 1911). Deutsche Math.-Ver. **20**, 334-338.

E. Study. Herrn de Saussure zur Erwiderung. Deutsche Math.-Ver. **20**, 338-339.

Schluß der Polemik des Vorjahres (F. d. M. **41**, 731, 1910). Lp.

Weitere Literatur.

F. W. Beal. Associated normal congruences. Diss. Princeton Univ. 1911.

F. W. Beal. Normal congruences determined by centers of geodesic curvature. Amer. Math. Soc. Bull. (2) 18, 56-57.

A. Emch. On the congruence of rays realizing circular transformations between two planes. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 57.

A. S. Hawkesworth. Three new dimension theorems. Amer. Math. Soc. Bull (2) **17**, 281-282.

E. Kasner. Equitangentials in space. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 393.

D. N. Lehmer. Certain theorems in line geometry. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 447-448.

H. B. Phillips. The Galois theory of multipartite variables. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 286.

A. Séférian. Notice sur le système des six coordonnées homogènes d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires. Lausanne: Deneréaz-Spengler. 79 S. 8⁰.

M. J. Uven. Algebraische Strahlenkongruenzen und verwandte komplexe Ebenen als Schnitte derselben. Amsterdam: Müller. 527 S. 8⁰ (vgl. S. 688).

Kapitel 5.

Verwandtschaft, Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Kleber. Über einige mehrdeutige Verwandtschaften zweier Ebenen. Diss. Rostock 1911. 106 S.

Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung einer ein-dreideutigen und einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit von ein-vierdeutigen Verwandtschaften zwischen zwei Ebenen gewidmet. Die zugrunde gelegte Transformation hat Ähnlichkeit mit einer von R. Müller aufgestellten kinematischen Verwandtschaft (Zs. f. Math. u. Phys. **36**, 129, 193, 257; F. d. M. **23**, 913, 1891) und ist eine Verallgemeinerung der quadratischen Verwandtschaft. Sie entsteht auf folgende Weise: In einer festen Ebene E liegt ein Kreis vom Halbmesser R, in einer beweglichen Ebene E' ein solcher vom Halbmesser r; die letztere bewegt sich so gegen die erstere, daß ihr Kreis auf dem festen Kreis rollt. Ist dann $P(x_1, y_1)$ ein Punkt, dessen Koordinaten in bezug auf ein veränderliches Koordinatensystem gegeben sind, das den jeweiligen Berührungspunkt der Kreise zum Ursprung und die gemeinsame Tangente zur x_1-Achse hat, so kann man den Krümmungsmittelpunkt K des Bahnpunkts P suchen und den zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt K_e der ersten Evolute der Bahn. Die Verwandtschaft zwischen den Punkten K_e und K ist der Untersuchung zugrunde gelegt. Sie ist im allgemeinen ein-vierdeutig; rollt aber der bewegliche Kreis im festen Kreis und ist $r = \frac{R}{2}$, so ist die Verwandtschaft ein-dreideutig. Dieser Spezialfall wird im ersten Teil gesondert behandelt. Es werden die Fundamentalelemente der Verwandtschaften untersucht und einige Transformationen von Kurven durchgenommen. Besonderer Wert ist auf das Studium der Realitätsverhältnisse gelegt, d. h. auf die Einteilung des Trägers in solche Gebiete, in denen eine bestimmte Anzahl von Bildern reell ist. Dabei wird unter Benutzung des Begriffs der Überdeckungszahl, den z. B. F. Klein in seiner „Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus" Bd. I, S. 206 ff. verwertet hat, eine geometrische Diskussion der kubischen oder biquadratischen Gleichungen geliefert, durch welche die Verwandtschaft analytisch bestimmt ist.

Der größte Teil der Arbeit ist einer andern Fragestellung gewidmet. Die drei oder vier Punkte der einfachen Ebene, die einem Punkte der mehrfachen

Ebene entsprechen, werden als Ecken von Dreiecken und Vierecken aufgefaßt, und es werden einige Sätze über die Gestalt dieser Figuren abgeleitet. Ferner werden Forderungen an ihre Gestalt erhoben, und es wird der Ort aller Punkte bestimmt, denen Dreiecke und Vierecke von bestimmter Gestalt entsprechen. Auch die Schnittpunktsysteme solcher Örter werden genauer untersucht. Endlich werden zwei Vierecke und Dreiecke betrachtet, und es wird an ihre gegenseitige Lage die Forderung gestellt, daß ihre Ecken auf einem Kegelschnitt liegen sollen. Ein Teil der angewandten Methoden und der gewonnenen Sätze erweist sich als verallgemeinerungsfähig. Lö.

D. Montesano. Su le curve omologhe in una corrispondenza birazionale piana. Palermo Rend. **31**, 363-368.

In dieser kurzen Note werden die Fundamentalrelationen aufgestellt, die zwischen zwei in einer ebenen birationalen Korrespondenz einander entsprechenden Kurven bestehen, und die bis jetzt noch nicht bestimmt worden waren. Der Verf. zeigt zunächst, daß zwischen den Ordnungen μ und μ' zweier Kurven c und c', die einander in einer birationalen quadratischen Transformation entsprechen, und zwischen den Multiplizitäten ϱ_i und ϱ_i', mit denen diese Kurven durch die Fundamentalpunkte O_i und O_i' der Transformation hindurchgehen, die Gleichungen bestehen

$$3\mu - \Sigma\varrho = 3\mu' - \Sigma\varrho',$$
$$\mu^2 - \Sigma\varrho^2 = \mu'^2 - \Sigma\varrho'^2.$$

Hierauf wird gezeigt, daß diese Relationen auch für eine birationale Korrespondenz gelten. Sie stellen eine Erweiterung der von Döhlemann für $\mu = \mu'$ gegebenen Formeln dar (Math. Ann. **39**, 567-597; F. d. M. **23**, 649, 1891). Weiterhin gibt der Verf. noch eine Relation an, die als eine Art Erweiterung eines Resultats von Roberts erscheint (Lond. M. S. Proc. **4**, 128; F. d. M. **4**, 424, 1872). Schließlich wird noch der einfachere Fall untersucht, daß die betrachtete Korrespondenz symmetrisch und von der 2., 5., 8., 17. Ordnung ist. Lö.

H. Mohrmann. Über die automorphe Kollineationsgruppe des rationalen Normalkegels n-ter Ordnung. Palermo Rend. **31**, 170-200.

H. Mohrmann. Bestimmung aller Normalflächen mit transitiven automorphen Gruppen von projektiven Transformationen. Palermo Rend. **32**, 158-187.

H. Mohrmann. Normalflächen und projektive Gruppen. Habil.-Schrift Karlsruhe 1911, 30 S.

Diese drei Arbeiten gehören eng zusammen und mögen, da sie ein abgerundetes Ganzes bilden, zusammen betrachtet werden.

Enriques hat gezeigt, daß sich alle endlichen kontinuierlichen Gruppen von Cremonatransformationen in der Ebene birational auf drei Typen (nebst

Untergruppen) zurückführen lassen, nämlich auf die achtgliedrige Kollineationsgruppe, die sechsgliedrige Gruppe der quadratischen Transformationen mit zwei festen Punkten (direkte Kreisverwandtschaften) und endlich die $(n+5)$-gliedrigen Gruppen von Jonquièresschen Transformationen n-ter Ordnung.

Mohrmann stellt sich die Aufgabe, alle Flächen F_2 des R_n zu bestimmen, welche eine automorphe Gruppe von projektiven Transformationen gestatten, die mit der umfassendsten Gruppe einer dieser drei Enriquesschen Typen gleich zusammengesetzt ist. Die expliziten Gleichungen dieser Flächen werden angegeben. Dann wird gezeigt, daß die Aufgabe identisch ist mit der Frage nach den Normalflächen F_2 des R_n mit einer automorphen kontinuierlichen transitiven Gruppe von Kollineationen.

Den Ausgangspunkt bildet die am wenigsten bekannte und interessanteste Klasse, die der genannten Jonquièresschen Gruppen, oder mithin die Klasse der automorphen projektiven Gruppen G_{n+5} eines rationalen Normalkegels K_2^n. Für diese wird die Aufgabe ausführlich behandelt. Die zugehörigen Flächen tragen Gebiete, die als Jonquièressche Gebiete (1. und 2. Art, vgl. u.) n-ter Ordnung bezeichnet werden. Dann wird eine Darstellung der Elemente dieser Gebiete vermittelst einer Art homogener Parameter gegeben (homogen allerdings nur in einem etwas andern Sinne als üblich), die ein solches Gebiet erschöpfend darstellt („Studysche Normalkoordinaten" im Jonquièresschen Gebiet).

Mit Hülfe dieser Koordinaten studiert Verf. ausführlich die Struktur der Jonquièresschen Gruppen sowie die geometrischen Eigenschaften ihrer Transformationen und gelangt auf sehr elegante Weise zu merkwürdigen und interessanten Ergebnissen, welche Untersuchungen von Enriques vertiefen und auch berichtigen.

Ferner wird mit Hülfe der Theorie der projektiven Invarianten der binären Formen die projektive Geometrie auf dem K_2^n, insbesondere seiner algebraischen Kurven und ihrer linearen Mannigfaltigkeiten analytisch so weit entwickelt, als es sich um die Übertragung der Bézoutschen Sätze oder Aufstellung ihrer Analoga für die Jonquièresschen Gebiete handelt, wodurch zunächst für die Jonquièresschen Gebiete die Lösung der Hauptaufgabe gelingt. Die gefundenen Sätze werden dann auf sämtliche zu den drei Gruppentypen gehörigen Normalflächen ausgedehnt und für die Geometrie auf allen diesen Flächen gemeinsam gültige Formeln aufgestellt.

Diese Flächen sind Träger ternärer Gebiete oder doppelt binärer oder endlich Jonquièressche Gebiete mit einer invarianten Schar von ∞^1 rationalen Normalkurven der Ordnung $\alpha \geqq 1$ und einem invarianten Punkt (Gebiete erster Art) oder einer isolierten invarianten rationalen Normalkurve der Ordnung $\beta \geqq 1$ (Gebiete zweiter Art). Die Ordnung jeder anderen algebraischen Kurve auf der Fläche ist größer als α und größer als β.

Zum Schluß wird gezeigt, daß ein von Beck beschriebenes Geradenkontinuum der Ebene, wo anstatt der einen uneigentlichen Geraden der projektiven Geometrie deren ∞^1 auftreten (Zeitschr. f. math. u. phys. Unterricht **40**, 129-136; F. d. M. **40**, 527, 1909) Träger eines Jonquièresschen Gebietes erster Ordnung zweiter Art ist. B.

J. Grünwald. Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Wien. Ber. **120**, 677-741.

Zwei Kontinua von geordneten Paaren reeller Punkte der Ebene, das eine auf einen R_4 abbildbar, das andere auf eine M_4^2, die in einem R_5 verläuft und singularitätenfrei ist. Damit ist dann die Möglichkeit gegeben, ein solches geordnetes Punktepaar der Ebene auf eine Gerade des R_3 zu beziehen, und es wird eine sehr einfache geometrische Konstruktion dieses Zusammenhanges gegeben. Eine Punkttransformation der Ebene wird dadurch auf eine Linienkongruenz des Raumes bezogen; eine Umlegung auf ein Geradenfeld, eine Bewegung auf einen Geradenbündel, also auf einen Punkt. Eine kontinuierliche Schar von Bewegungen (Somen) der Ebene erhält auf diese Weise eine Bildkurve im Raume. Diese werden gegenüber den räumlichen Kollineationen einer sechsgliedrigen Gruppe („Quasibewegungen") klassifiziert, und damit ist ein Äquivalenzproblem der ebenen Kinematik gegeben. Der Grundgedanke findet sich auch in Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, erstes Heft (Referat S. 590 dieses Bandes). Die Geometrie der sechsgliedrigen Gruppe hat Blaschke als Grenzfall der elliptischen Geometrie dargestellt (Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie I, II (Zeitschr. f. Math. u. Phys. **60**, 61-91; Referat S. 499 dieses Bandes). B.

A. Kanda. Lineale Erzeugung von algebraischen Transformationen und Kurven. Monatsh. f. Math. u. Phys. **22**, 279-302.

Grundeigenschaften der algebraischen Abbildungen in der Ebene. Rationale Abbildungen und ihre Umkehrungen. Operationen des Verkettens (Multiplizierens) und des Paarens von Abbildungen. Begriff der rein geometrischen (linealen) Erzeugung. Beurteilung der Graßmannschen Kurvenerzeugung. Zum letzten Punkte eine Ergänzung in Monatsh. f. Math. u. Phys. **23**, 347-348. B.

H. P. Hudson. On the 3-3 birational transformation in three dimensions. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, 15-47.

Fortsetzung der Lond. M. S. Proc. (2) **9**, S. 51 ff. (F. d. M. **41**, 745, 1910) erschienenen Arbeit. Klassifikation und Aufstellung kanonischer Vertreter. B.

M. Pieri. Nuovi principii di geometria delle inversioni. Batt. G. **49** [(3) **2**], 49-96.

„Grundlagen" (Axiomatik) für die Geometrie der reziproken Radien. Fortsetzung in Batt. G. **50** [(3) **3**], 106-140. B.

L. I. Neikirk. A theorem on (m, n) correspondences. Annals of Math. (2) **13**, 52-54.

Erweiterung eines Satzes von Weyr (Math. Ann. **3**, 34-44, 1870; Prag. Ber. 1870, 14-19). B.

B. Bydžovský. Ein Beitrag zur Theorie der zyklischen Projektivitäten. Časopis **40**, 281-295. (Böhmisch.)

Der Verf. sucht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Gruppe von n Elementen, damit diese Gruppe einen Zyklus in einer zyklischen Kollineation n-ten Grades bilde. Insbesondere beweist er den folgenden Satz: Wenn eine Gruppe von n Elementen (n ungerade) durch zwei Involutionen reproduziert wird, von denen die erste das in der Gruppe liegende Doppelelement der zweiten Involution in ein Element überführt, welches um k Stellen in der gegebenen zyklischen Anordnung entfernt ist, so bildet diese Gruppe einen Zyklus in einer n-ären zyklischen Projektivität dann und nur dann, wenn die Zahlen k, n relativ prim sind. Ein ähnlicher Satz gilt auch für gerade n. Pe.

V. Snyder. The involutorial birational transformation of the plane, of order 17. American J. **33**, 327-336.

Bertini hat gezeigt (Annali di Mat. (2) 8, 1877), daß es außer den bis dahin bekannten involutorischen Cremonatransformationen der Ebene noch eine 17-ter Ordnung gibt (vgl. Pascal, Rep. 2. Aufl., Geom. S. 370). Für diese werden die Gleichungen aufgestellt und diskutiert. B.

L. Godeaux. Sur les transformations birationnelles involutives du plan. Belg. Bull. Sc. 1911, 217-225.

J. Neuberg. Rapport. Ebenda, 194-196.

Aufzählung der verschiedenen Typen birationaler involutorischer Transformationen der Ebene. Der Verf. betrachtet jedes Paar konjugierter Punkte als den Schnitt einer Geraden d der Ebene mit einem Kegelschnitt C eines Kegelschnittnetzes ohne Basispunkte. Vier Klassen: die d und die C an Zahl gleich ∞; die d an Zahl gleich ∞, die C an Zahl $= \infty^2$; die d an Zahl gleich ∞^2, die C an Zahl $= \infty$; die d und die C an Zahl gleich ∞^2. Der Verf. findet nicht vollständig die Transformation der letzten Kategorie. — Neuberg sucht die den drei ersten Transformationskategorien entsprechenden Formeln und gibt die Namen der Geometer an, die sich vordem mit der Frage beschäftigt haben. Mn. (Lp.)

D. Montesano. I gruppi cremoniani di numeri. Napoli Atti (2) **15**, Nr. 7, 34 S. Vgl. Napoli Rend. (3) **17**, 146-147.

Diese Abhandlung ist eine Fortsetzung derjenigen, über die wir F. d. M. **34**, 730, 1905 berichtet haben. Der Zweck, welchen der Verf. noch immer

verfolgt, ist: Kriterien zu geben, um die „geometrischen" von den „arithmetischen" Auflösungen der Grundgleichungen der ebenen Cremonaschen Transformationen zu unterscheiden. Nennt man jede Auflösung der genannten Gleichungen „Cremonasche Gruppe", so kann man mit dem Verf. sagen: „Ist $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_p$ eine Cremonasche Gruppe einer Ordnung $n > 1$, und subtrahiert man von den drei höchsten der Zahlen r die Differenz $(r_1 + r_2 + r_3) - n$, so bekommt man eine neue Cremonasche Gruppe". Daraus folgt ein Verfahren, um aus einer Cremonaschen Gruppe eine ganze Reihe abzuleiten.

Daß solche Betrachtung eine höchst ergiebige Quelle wichtiger Resultate ist, ersieht man aus den folgenden Sätzen, die wir nur als Beispiele anführen wollen:

1. Die einzige Cremonasche geometrische Gruppe von der Ordnung n, welche als Element die Zahl $n-1$ enthält, ist die de Jonquièressche oder „isologische" Gruppe. 2. Es gibt nur vier „symmetrische" Cremonasche Gruppen (d. h. solche, für die alle Zahlen r gleich sind); ihre Ordnungen sind 2, 5, 8, 17; alle sind geometrische. 3. Gegen die Meinung von Clebsch gibt es „asymmetrische" Cremonasche geometrische Gruppen (d. h. solche, für die alle Zahlen r untereinander verschieden sind); diejenige kleinster Ordnung ist von der Ordnung 23 und besteht aus den folgenden Zahlen: 12, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

Zum Schluß gibt der Verf. eine vollständige Liste der Cremonaschen geometrischen Gruppen der Ordnungen 1, 2, ..., 11; sie umfaßt, nach den Ordnungen der entsprechenden Transformationen geordnet, der Reihe nach $1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 + 10 + 17 + 19$ Elemente.

In der vorliegenden Abhandlung findet man auch vergleichende Betrachtungen der dargelegten Resultate mit denjenigen, welche von andern Verfassern über dasselbe Thema erhalten wurden, wie auch einige Verbesserungen derselben.

La.

F. Palatini. Sulle equazioni delle reti cremoniane di curve piane. Periodico di Mat. (3) **9**, 129-143.

„In einer Note der Ven. Ist. Atti (7) 8, 1555-1568 (F. d. M. **28**, 598, 1897) habe ich die vorgelegte Aufgabe gelöst, alle allgemeinen Lösungen zu finden, die der geometrischen Aufgabe der Bedingungsgleichungen der Cremonaschen Netze ebener Kurven genügen. Der Ausschuß, welcher der Accademia dei Lincei über den Bewerb zu den ministeriellen Preisen für die mathematischen Wissenschaften im Jahre 1898 zu berichten hatte, erachtete die Behandlung jener Arbeit für dunkel und verschleiert, so daß sie den Leser über das Zutreffen der Ergebnisse, die an sich bedeutend sein würden, in Zweifel lasse. Deshalb gedenke ich in dieser Note die erhaltenen Ergebnisse wieder darzulegen, indem ich die Herleitung wesentlich ändere. Dadurch werden jene Zweifel behoben, auf die schon Bezug genommen ist, und ich benutze diese Gelegenheit, um auf einige Einzelheiten näher einzugehen, welche es ermöglichen, die Tragweite der gefundenen Formeln in ein besseres Licht zu stellen." Der Verf. verweist auf die Arbeiten gleichen Inhalts: D. Montesano, Su le reti omaloidiche di curve (Napoli Rend. (3) **11**, 259-303; F. d. M. **36**, 730, 1905)

und die beiden vorstehend besprochenen Arbeiten. — I. Larice, Sulle trasformazioni cremoniane (Ven. Ist. Atti (8) **12**, 731-756; F. d. M. **40**, 729, 1909).
Lp.

M. Pannelli. Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 404-409.

Wie allgemein bekannt ist, gilt bei den birationalen Transformationen in der Ebene der (Cremonasche) Satz, daß, „wenn kein singulärer Fundamentalpunkt existiert, die Anzahl dieser Punkte in den beiden Ebenen dieselbe ist". Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist: dieses Theorem auf den Raum auszudehnen. Um ihn zu erreichen, betrachtet der Verf. zwei Räume Σ, Σ', zwischen denen eine birationale Transformation statthat. Man habe in Σ τ Fundamentalkurven der Geschlechter ϱ_i und σ Fundamentalpunkte; analog in Σ'. Dann gilt bei den gewöhnlichen Fällen die folgende Relation: $\sigma + \tau - \sum_i \varrho_i = \sigma' + \tau' - \sum_{i'} \varrho'_{i'}$. Der Beweis ist nur angedeutet, da es sich um eine vorläufige Mitteilung handelt, die als Fortsetzung einer vorigen (F. d. M. **41**, 744, 1910) desselben Verf. anzusehen ist.
La.

A. Tummarello. Le trasformazioni birazionali monoidiche $[n, n^2]$ dello spazio. Napoli Rend. (3) **17**, 427-440.

Nach Cayley ist ein „Monoid" eine Fläche n-ter Ordnung, welche einen $(n-1)$-fachen Punkt O besitzt; da eine solche Fläche auf einer Ebene eindeutig abbildbar ist, so kann sie, nach Cremona, als Ausgangselement von homaloidischen Flächensystemen dienen. Daraus entstehen viele birationale Raumtransformationen, welche besonders von R. de Paolis (F. d. M. **7**, 478, 1875) und D. Montesano (F. d. M. **20**, 595, 1888) schon untersucht worden sind. Dasselbe Thema wird in dem vorliegenden Aufsatze behandelt. Der Hauptzweck, welchen der Verf. verfolgt, ist: ins klare Licht zu setzen, daß die in Rede stehenden Transformationen von zwei Arten sind, je nachdem alle Flächen des homaloidischen Systems in dem gemeinschaftlichen Singularpunkt O denselben Tangentialkegel haben oder nicht. Die Transformationen der zweiten Art sind von endlicher Anzahl (drei), während es von den andern so viele gibt wie homaloidische Systeme ebener Kurven n-ter Ordnung.
La.

Ph. Engelhardt. Untersuchungen über die im Schlußwort des Lieschen Werkes „Geometrie der Berührungstransformationen" angedeuteten Probleme. Leipzig: B. G. Teubner. 65 S.

Es handelt sich um die sechs Probleme, die Lie am Schlusse jenes Werkes formuliert hat, und die die Bestimmung von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des R_3 verlangen. Einerseits sollen nämlich die Charakteristiken der Differentialgleichung sein: 1. Haupttangentenkurven auf den Integralflächen, 2. Krümmungslinien, 3. geodätische Linien, 4. gerade Linien; andrer-

seits sollen die Integralflächen 4. zu Normalen lauter Gerade eines Linienkomplexes haben, 6. ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem vorgelegten Linienkomplex angehören. Der Verf. verfolgt die von Lie selbst gegebene Anregung, diese sechs Probleme zu je zweien zu kombinieren, und er erledigt die Probleme (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (2,5), (4,5), während er Beiträge zur Lösung der Probleme (1,6), (2,6), (3,4), (3,6), (4,6), (5,6) liefert.

El.

J. L. Coolidge. The metrical aspect of the line-sphere transformation. American M. S. Trans. **12**, 43-69.

Bei Lies berühmter Berührungstransformation gehen zwei einander schneidende gerade Linien über in zwei einander berührende Kugeln. Der Verf. will zeigen, daß hierin nur ein besonderer Fall der metrischen Beziehung ausgesprochen ist, die zwischen dem Geradenraume und dem Kugelraume hergestellt wird. Es besteht nämlich überhaupt eine Beziehung zwischen den Abständen der Geraden und den Winkeln, unter denen die entsprechenden Kugeln einander schneiden. Um im Geraden- und im Kugelraume genau dieselben Formeln zu erhalten, benutzt er als Geradenraum den nichteuklidischen Raum vom elliptischen Typus und ersetzt die Plückerschen Linienkoordinaten durch die sechs Kleinschen $x_0, x_1, \ldots, x_5$, zwischen denen die Gleichung $\Sigma x_i^2 = 0$ besteht. Dann kann jede Formel im Geradenraume ohne weiteres im Kugelraume gedeutet werden. Insbesondere ist eine gewisse Invariante

$$I = \frac{\Sigma x_i y_i}{x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5}$$

im Geradenraum $= \operatorname{tg} d_1 \cdot \operatorname{tg} d_2$, wo d_1 und d_2 die beiden Abstände der Geraden x und y sind; im Kugelraume ist sie $= \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta : \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta'$, wo ϑ den Winkel bedeutet, unter dem die Kugeln x und y einander schneiden, ϑ' den Winkel, unter dem jede Kugel das Spiegelbild der andern am Koordinatenanfange schneidet. Auf die sehr ausführliche und eingehende Darstellung des Entsprechens zwischen beiden Räumen, die der Verf. gibt, kann hier nicht weiter eingegangen werden.

El.

Th. de Donder. Sur les transformations de contact spéciales et le théorème de Jacobi. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 400-404.

Der Verf. betrachtet eine Berührungstransformation in den x, p:

(1) $$x_i' = X_i(x, p, t),\ p_i' = P_i(x, p, t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

die einen Parameter t enthält. Aus der dann bestehenden Relation:

(2) $$\Sigma p_i' \delta x_i' = \Sigma p_i \delta x_i + \delta U(x, p, t)$$

leitet er eine „Fundamentalformel" her, die er nur unter der beschränkenden Voraussetzung beweist, daß die Gleichungen $x_i' = X_i$ nach den p auflösbar sind. In Wahrheit gilt die Formel ganz allgemein und wird erhalten, wenn man t als veränderlich betrachtet, sodann (2) so schreibt:

$$\Sigma p'_i \delta x'_i = \Sigma p_i \delta x_i + \delta U + \left(\Sigma P_i \frac{\partial X_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) \delta t,$$

hiervon die bilineare Kovariante bildet und in dieser wieder $\delta t = 0$ setzt:

$$\Sigma (dp'_i \delta x'_i - dx'_i \delta p'_i) = \Sigma (dp_i \delta x_i - dx_i \delta p_i) - \delta \left(\Sigma P_i \frac{\partial X_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) \cdot dt.$$

Jetzt ergibt sich sofort, daß jedes kanonische System von Differentialgleichungen:

(3) $$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H(x, p, t)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(x, p, t)}{\partial x_i}$$

bei der Transformation (1) wieder kanonisch wird, und zwar tritt an Stelle von H die Funktion:

$$\overline{H}(x', p', t) = H(x, p, t) + \frac{\partial U}{\partial t} - \Sigma P_i \frac{\partial X_i}{\partial t}.$$

Dieser Satz findet sich übrigens, nur anders ausgedrückt, schon in der Abhandlung von Lie: „Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen", Archiv for Math. og Naturvid. Bd. II, Kristiania 1877. — Der Verf. beweist dann auch noch den Satz von Jacobi, daß die Kenntnis einer vollständigen Lösung der Differentialgleichung:

$$H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

die Integration des kanonischen Systems (3) nach sich zieht, und verallgemeinert diesen Satz. El.

L. E. J. Brouwer. Over één-éénduidige, continue transformaties van oppervlakken in zichzelf. (3de mededeeling.) Amst. Ak. Versl. **19**, 737-747.

L. E. J. Brouwer. Over één-éénduidige, continue transformaties van oppervlakken in zichzelf. (4de mededeeling.) Amst. Ak. Versl. **20**, 24-34.

Fortsetzung der Arbeiten, über die F. d. M. **40**, 691, 1909 berichtet ist. In der dritten Mitteilung werden zwei Sätze bewiesen: Wird eine zweiseitige Oberfläche durch eine eineindeutige kontinuierliche Transformation mit invarianter Indikatrix in sich selbst transformiert, so enthält jedes invariante zirkulare Kontinuum mindestens einen invarianten Punkt. Dasselbe gilt von jedem invarianten, nirgends dichten parabolischen Kontinuum. In der vierten Mitteilung wird gezeigt, daß ein zirkulares Kontinuum unter gewissen Voraussetzungen mindestens zwei invariante Punkte enthält. El.

E. Kasner. The group of turns and slides and the geometry of turbines. American J. **33**, 193-202.

Eine Turbine ist die Menge der orientierten Linienelemente, deren Punkte auf einem Kreise liegen, während ihre Richtungen mit denen des Kreises einen festen Winkel bilden. Es wird nun die Gruppe aller der Elementtransformationen studiert, die Turbinen in Turbinen überführen. Diese G_{15} wird in Verbindung gebracht mit den ∞^{15} Kollineationen eines dreidimensionalen Raumes, wobei jeder Turbine eine gerade Linie des Raumes entspricht. Bemerkenswert ist die Untergruppe G_{10}, welche orientierte Kreise (das sind spezielle Turbinen) in ebensolche transformiert. Ihr entspricht die Gruppe der ∞^{10} Kollineationen, die ein bestimmter linearer Komplex zuläßt. Die Nullkorrelation dieses Komplexes erzeugt dann eine Verwandtschaft unter den Linienelementen der Ebene, bei der jeder einparametrigen Schar von Kurven eine andere einparametrige Schar von Kurven entspricht. Den Schluß bilden Anwendungen auf Sätze von Scheffers über Trajektorien. C.

Weitere Literatur.

W. B. Carver. The poles of finite groups of substitutions in the complex plane. Amer. Math. Monthly **18**, 27-29.

A. Cohen. An introduction to the Lie theory of one parameter groups. New York: Heath. 247 S. 12mo.

J. A. Eiesland. On a contact transformation in physics. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 393-395.

Betrifft das Huygenssche Prinzip. Lp.

D. N. Lehmer. On the combination of involutions. Amer. Math. Monthly **18**, 52-57.

V. Snyder. An application of a (1-2) quaternary correspondence. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 281.

V. Snyder. Periodic quadratic transformations in a ternary field. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 62-63.

E. B. Van Vleck. On the classification of collineations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 523.

B. Konforme Abbildungen und dergleichen.

R. Courant. Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung. Math. Ann. **71**, 145-183.

Die Abhandlung ist bis auf einige redaktionelle Änderungen ein Abdruck der Dissertation des Verf. (Göttingen 1910). Es wird in ihr im Anschluß an einen Gedanken von Hilbert mit Hülfe des Dirichletschen Prinzips die Existenz einer durch eine von Hilbert aufgestellte Minimaleigenschaft charakterisierten eindeutigen Potentialfunktion u auf der allgemeinsten endlich- oder unendlich-vielblättrigen Riemannschen Fläche Ω nachgewiesen, die in einem Punkte O unstetig wird wie der reelle Teil von $1/z$ im Punkte $z = 0$. Es handelt sich dann weiter darum, zu zeigen, daß die Funktion $u + iv$ im Falle der Schlichtartigkeit der Fläche $\boldsymbol{\Omega}$ eine eindeutige konforme Abbildung der Fläche Ω auf einen schlichten Schlitzbereich liefert, gleichgültig, ob der

Zusammenhang endlich oder unendlich ist. Dieses um dieselbe Zeit auch von Koebe in seiner Abhandlung „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. IV" (Gött. Nachr. 1909) und in einer Note „Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode" (Gött. Nachr. 1910) gelöste Problem findet in der Courantschen Arbeit eine in verschiedener Hinsicht eigenartige und bemerkenswerte Lösung. Im Falle einfachen Zusammenhangs gibt der Verf. eine Herleitung der Abbildungseigenschaft direkt aus der Minimaleigenschaft; im Falle unendlich hohen Zusammenhangs jedoch geht Courant, wie auch Koebe in der ersten seiner genannten Abhandlungen, auf die Näherungsfunktionen zurück, indem $\boldsymbol{\Omega}$ als Grenze endlich-vielfach zusammenhängender Bereiche aufgefaßt wird.

Zum Schlusse wird gezeigt, wie sich nun in der Auffassung der Methode des Dirichletschen Prinzips die Lösung des ursprünglich von Koebe (Gött. Nachr. 1908) erledigten Problems der Uniformisierung durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus und der konformen Abbildung eines mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf einen von Vollkreisen begrenzten Bereich im Sinne der Methode der Überlagerungsfläche ergibt. Kb.

R. König. Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke.

Math. Ann. 71, 184-205; auch Sonderdruck (Habilitationsschrift). Leipzig: B. G. Teubner. 24 S. 8°.

Zum Nachweis der Existenz der eindeutigen algebraischen Funktionen und ihrer Integrale auf einer gegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche hat man die kombinatorische Methode von Neumann-Schwarz und die schon von Riemann verwendete, von Hilbert aber erst streng begründete Methode des Dirichletschen Prinzips. Während die erstere bereits für den Fall ausgebildet wurde, daß die Riemannsche Fläche nicht einfach mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet oder als durchaus reguläre Fläche im Raum liegend vorgestellt wird, sondern man es mit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit im allgemeinen Sinne von Klein zu tun hat, ist das mit der letzten Methode bisher noch nicht der Fall, sondern bildet vielmehr den Gegenstand eines Teiles der Arbeit. Wird angenommen, die Riemannsche Mannigfaltigkeit bestehe aus einer endlichen Anzahl verschiedener Flächenstücke, welche, längs Kanten und Ecken zusammenstoßend, eine geschlossene Fläche bilden, so handelt es sich wesentlich um den Nachweis, daß ein einen Eckpunkt im Innern enthaltendes Flächenstück konform — im Eckpunkte selbst nur stetig — auf einen schlichten ebenen Bereich abgebildet werden kann. Dieses im Jahre 1870 von Schwarz gestellte Abbildungsproblem, welches Schwarz selbst nur in dem speziellen Falle einer von lauter Ebenen oder kugelförmigen Flächenstücken gebildeten Ecke gelöst hatte, wurde zum erstenmal allgemein (für analytische Flächenstücke) von P. Koebe im Zusammenhang mit der von ihm entwickelten allgemeinen Abbildungstheorie gelöst (Gött. Nachr. 1908). Koebe löste das gestellte Problem dadurch, daß er zunächst die unmittelbare Umgebung des Eckpunktes, diesen selbst ausgeschlossen, eineindeutig konform auf ein schlichtes (zweifach zusammenhängendes) Gebiet abbildete, welches etwa als Kreisring normiert gedacht werden kann. Es gilt dann, was der wesentlich leichtere Teil

der Untersuchung ist, nachträglich noch zu zeigen, daß der eine Begrenzungskreis sich auf einen Punkt reduziert. Diese Gedankenfolge wird auch von König innegehalten, der sich auch sonst wesentlich auf vorausgegangene Entwicklungen Koebes stützt, so namentlich beim Nachweise, daß die gefundene Minimalfunktion die Abbildung auf einen schlichten Bereich (Schlitzbereich) tatsächlich leistet. Kb.

L. Lichtenstein. Beweis des Satzes, daß jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann. Berl. Abh. 1911 (Anhang). 49 S.

Bekanntlich hat Gauß zuerst bewiesen, daß jedes analytische Flächenstück auf einen Teil einer Ebene konform abgebildet werden kann. Das Problem der konformen Abbildung wurde von Gauß auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung im Gebiete komplexer Variabeln zurückgeführt. Dieses Hülfsmittel versagt, sobald das vorgelegte Flächenstück nichtanalytisch ist. Es erhebt sich daher die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen auch nichtanalytische Flächenstücke auf einen Teil einer Ebene konform abgebildet werden können. Diese Frage ist, wie es scheint, zuerst von Lipschitz aufgeworfen worden.

Es seien $X(x,y)$, $Y(x,y)$, $Z(x,y)$ reelle, eindeutige und stetige Funktionen der Variabeln x und y im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebietes c der Ebene (x,y). Es wird vorausgesetzt, daß diese Funktionen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Es sei $\omega(x,y)$ irgendeine dieser partiellen Ableitungen. Es wird weiter angenommen, daß $\omega(x,y)$ einer Ungleichheitsbedingung

$$|\omega(x+h, y+h') - \omega(x,y)| < A_0\{|h| + |h'|\}$$

genügt, unter A_0 eine gewisse positive Zahlgröße verstanden. Durch die Gleichungen

$$X = X(x,y),\ Y = Y(x,y),\ Z = Z(x,y)$$

wird dem Gebiete c ein Stück C einer Fläche zugeordnet. Es wird angenommen, daß die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(x,y)},\ \frac{\partial(Z,X)}{\partial(x,y)},\ \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}$$

nicht gleichzeitig verschwinden. Alsdann gilt der Satz: In der Umgebung eines jeden Punktes im Innern des Gebietes C läßt sich ein Flächenstück abgrenzen, das zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf ein ebenes Flächenstück abgebildet werden kann.

In dem ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit werden einige den bekannten Sätzen der Potentialtheorie analoge Hülfssätze entwickelt. Im zweiten Kapitel wird eine Grundlösung der allgemeinen sich selbst adjungierten partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus konstruiert und damit die Möglichkeit der konformen Abbildung in demjenigen besonderen Falle

bewiesen, wenn $X(x,y)$, $Y(x,y)$, $Z(x,y)$ stetige, der Hölderschen Bedingung genügende partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben. In dem dritten, letzten Kapitel werden diese Voraussetzungen fallen gelassen, und es wird der vorhin genannte Satz endgültig bewiesen. Die Betrachtungen des zweiten Kapitels berühren sich mit gewissen Untersuchungen von E. E. Levi (Palermo Rend. **24**, 275-317; F. d. M. **38**, 402, 1907). Durch diese ist die Möglichkeit der konformen Abbildung in allen Fällen dargetan, wenn $X(x,y)$, $Y(x,y)$, $Z(x,y)$ stetige, einer Dinischen Bedingung genügende partielle Ableitungen dritter Ordnung haben. Ltn.

L. Lichtenstein. Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken. J. für Math. **140**, 100-119.

Die Möglichkeit, ein beliebiges von einer endlichen Anzahl von Stücken regulärer analytischer Kurven begrenztes, einfach zusammenhängendes Gebiet auf ein Kreisgebiet konform abzubilden, ist zuerst von H. A. Schwarz vollständig bewiesen worden. Die Untersuchungen von Schwarz, die von ihm wiederholt in den Vorlesungen an der Berliner Universität vorgetragen worden sind, sind nicht veröffentlicht. Ein anderer, von jenem unabhängiger Beweis ist in den Arbeiten von Koebe enthalten (Gött. Nachr. 1907, 633-669; F. d. M. **38**, 455, 1907). In der vorliegenden Arbeit wird vorausgesetzt, daß alle von je zwei Nachbarseiten der Randkurve eingeschlossenen Winkel >0 sind, d. h. daß nur Ecken, keine Spitzen vorkommen, und es wird (im ersten Kapitel) die Möglichkeit der konformen Abbildung nach einem neuen, elementaren Verfahren bewiesen. Ist $\alpha\pi$ der in einer Ecke im Koordinatenursprung eingeschlossene Winkel und $F(z)$ die abbildende Funktion, so ist in der Umgebung der Ecke $\frac{dF(z)}{dz} = z^{\frac{1}{\alpha}-1} \times$ stet. Funktion. Analoge Sätze ergeben sich für die Ableitungen höherer Ordnung der Funktion $F(z)$. Diese Beziehungen waren bis dahin nur in dem Falle einer Kreisbogenecke oder einer Ecke, die sich auf jene durch Vermittlung einer regulär analytischen Funktion zurückführen läßt, bekannt. In dem zweiten Kapitel werden die linearen Randwertaufgaben der Potentialtheorie für ebene analytische Gebiete mit Ecken betrachtet. Neu dürften dabei namentlich die Ergebnisse betreffend die dritte Randwertaufgabe sein. Man kommt auf eine besondere Integralgleichung, deren Kern nebst allen seinen Iterationen unstetig ist, die aber durch Abspaltung eines Faktors der Fredholmschen Theorie zugänglich gemacht werden kann. Ltn.

G. Darboux. Sur la construction des cartes géographiques. Darb. Bull. (2) **35**, 23-28.

Hier wird ein einfacher und allgemeiner Beweis des berühmten Satzes gegeben, den Tschebyschef nur für Rotationsflächen aufgestellt, dessen Beweis er aber nicht veröffentlicht hat: Unter allen Arten der konformen Abbildung eines (im Verhältnis zur Gesamtoberfläche kleinen) Gebietes auf die

Ebene ist diejenige die beste, bei der der Abbildungsmaßstab längs der gesamten Begrenzung des Gebietes konstant ist. Z.

D. Gravé. Démonstration d'un théorème de Tchébychef généralisé. J. für Math. **140**, 247-251.

Der Satz von Tschebyschef, von dem Darboux in dem vorstehend besprochenen Aufsatze sagt, er sei nicht bewiesen, nicht einmal reinlich ausgesprochen, war von Gravé in dem Artikel „Sur une question de Tchébychef" behandelt und mit einem Beweise versehen worden (Assoc. Franç. Caen (1894) **23**, 196-199; F. d. M. **26**, 775, 1895). Der Verf. wiederholt jetzt seinen unbekannt gebliebenen Beweis, indem er die Frage unter dem allgemeinsten Gesichtspunkte behandelt. Der Satz von Tschebyschef gilt für eine ganz willkürlich gewählte Oberfläche unter der alleinigen Bedingung, daß die Krümmung der Oberfläche für das ganze Gebiet der abgebildeten Fläche das Vorzeichen nicht wechselt. Lp.

G. Darboux. Sur un problème posé par Lagrange. Darb. Bull. (2) **35**, 28-30.

Lagrange war der erste, der die Aufgabe löste, eine beliebige Rotationsfläche konform auf eine Ebene so abzubilden, daß sowohl den Meridianen, wie auch den Parallelkreisen Kreise entsprechen. Er hat auch zuerst gezeigt, daß man noch vorschreiben kann, drei beliebige Punkte der Fläche sollen sich in drei beliebige Punkte der Ebene abbilden. Lagrange hat aber für diese letzte Tatsache keinen geometrischen Beweis gefunden, sondern zur Rechnung seine Zuflucht genommen. Hier wird ein einfacher, rein geometrischer Beweis dieses schönen Satzes gegeben. Z.

G. Darboux. Sur une méthode de Tissot relative à la construction des cartes géographiques. Darb. Bull. (2) **35**, 55-64.

Tissot hat durch Reihenentwicklungen gezeigt, daß die beste Methode, ein verhältnismäßig kleines Stück der Erdoberfläche auf die Ebene abzubilden, diejenige ist, bei der die Winkel- und Längenverzerrungen möglichst gering sind. In der vorliegenden Arbeit werden die Tissotschen Untersuchungen präzisiert und geklärt. Z.

A. Ender. Die konformen Raumtransformationen. I. Teil. Progr. Waidhofen.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher usw.).

Jos. Finger. Elemente der reinen Mechanik als Vorstudium für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und Technischen Hochschulen sowie zum Selbstunterricht. Dritte, neu bearbeitete und vermehrte Auflage. Wien und Leipzig: Alfred Hölder. XVI u. 842 S. Mit 213 Figuren im Text.

Die beiden ersten Auflagen dieses für die ersten Studiensemester an Technischen Hochschulen bestimmten und in seiner Breite und Klarheit dafür sehr geeigneten Lehrbuchs sind F. d. M. **16**, 743, 1884 u. **32**, 685, 1901 angezeigt worden. Ohne sich durch die jüngsten Bestrebungen zur Umwandlung der mechanischen Prinzipien wankend machen zu lassen, hält der Verf. an seiner Überzeugung fest, daß die Galilei-Newtonschen Grundlagen den Charakter der Mechanik als einer exakten Wissenschaft nicht beeinträchtigen, und daß die Elimination des Kraftbegriffs und dessen Ersetzung durch andere Grundbegriffe und Grundsätze sich für einen faßlichen Unterricht in der Mechanik, zumal an Technischen Hochschulen, in keiner Weise empfiehlt. Behufs Erzielung größerer Klarheit ist in der neuen Auflage der Lehrstoff zum großen Teile neu bearbeitet und in einigen Kapiteln aus logischen Gründen anders gegliedert. Der Umfang ist dadurch von 797 Seiten der zweiten Auflage auf 842 gestiegen. Als Lehrbuch der theoretischen Mechanik ist das Werk auch für Physiker zu empfehlen; doch ist zu beachten, daß nur die niedere Mechanik gelehrt wird, und die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die einfachsten Operationen der Differential- und Integralrechnung beschränkt bleibt. Die Potentialtheorie ist ausgeschlossen; von der Hydromechanik sind nur die ersten Sätze entwickelt. Dafür sind jedoch die den Technikern nötigen Methoden der graphischen Statik in hinreichender Vollständigkeit entwickelt. Lp.

R. Marcolongo. Theoretische Mechanik. Autorisierte deutsche Bearbeitung von H. E. Timerding. 1. Band: Kinematik und Statik. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 346 S. gr. 8°.

Von der 1905 erschienenen Meccanica razionale hat die deutsche Ausgabe, deren erster Band zur Besprechung vorliegt, Plan, Einteilung und Behandlungsweise übernommen (vgl. das Referat F. d. M. **36**, 740, 1905). Dabei hat es aber doch im einzelnen die wesentlichsten Änderungen erfahren: viele Kapitel sind gänzlich umgearbeitet, andere neu hinzugefügt worden (Vektorenrechnung, Kinematik starrer Körper, Hydrostatik). Ganz abweichend ist die Behandlung der zahlreichen Übungsbeispiele. Während im Original die Lösungen nur ganz kurz angedeutet waren, sind sie hier (allerdings erkauft durch Verringerung ihrer Zahl) ausführlich dargestellt worden. Grundsätzlich kommt überall die Symbolik der Vektorenrechnung zur Anwednung; das Werk eignet sich gerade durch seine ausführliche Darstellung ganz vorzüglich zur Einarbeitung in diese Methode, die ja der Anfänger nur durch beständige Übung als geistiges Eigentum erwirbt.

Sk.

J. Massau. Leçons de mécanique rationnelle. Tome I: Géométrie vectorielle. Statique. Gand: F. et R. Buyk Frères. XVI u. 260 S. + 1 S. Druckfehler.

Dieser Band ist nach den Vorlesungen 1906/7 des verewigten Massau als Anhang zu den Annales de l'Association des ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand (5) **4** veröffentlicht. Der Gang ist besonders wegen des Gebrauches der vom Verf. in einer imaginären Form zusammengedrängten Vektormethode bemerkenswert. Auf diese Weise hat er die klassischen Gegenstände eines Lehrganges der Mechanik in gedrängter Form auf einfache Weise behandeln könnnen. Folgendes Inhaltsverzeichnis läßt die in dem ersten Bande berührten Dinge erkennen.

Einleitung. 1. Summe, Differenzen und Produkte von Vektoren. 2. Darstellung einer Fläche durch einen Vektor, das Moment zweier Vektoren. 3. Zusammensetzung der Massen, der Strecken, der Flächen. 4. Vektorfunktionen. 5. Infinitesimalanalysis der Vektorfunktionen. 6. Allgemeine Begriffe der Mechanik.

Erster Teil. 1. Statik des Punktes. 2. Statik der unveränderlichen Systeme. 3. Statik beliebiger Systeme. 4. Methode der virtuellen Geschwindigkeiten. 5. Anwendung auf die Maschinen. 6. Bestimmung der Schwerpunkte. 7. Gegenseitige Anziehung der Körper. 8. Verschiedene Anwendungen.

Mn. (Lp.)

Edwin H. Barton. Analytical mechanics comprising the kinetics and statics of solids and fluids. London: Longmans, Green and Co. XX + 535 S. 8°.

Das Studium der theoretischen Mechanik ist in England stets besonders gepflegt worden; daher ist an tüchtigen Lehrbüchern in englischer Sprache kein Mangel. Während der letzten 50 Jahre beherrschten vornehmlich die Lehrbücher von Routh den englischen Universitätsunterricht, sowohl wegen ihrer Vielseitigkeit, als auch wegen der Zweckmäßigkeit ihrer auf die nicht leichten englischen Prüfungen berechneten Abfassung. Außerdem wurde das klassische Werk Natural Philosophy von Thomson und Tait, um nur dieses noch anzuführen, wegen seiner Richtung auf die Physik und in gerechter Würdigung der von ihm vertretenen Anschauungen eifrig durchgearbeitet.

Nach dem Muster solcher Vorbilder darf man von einem neuen englischen Lehrbuche Gutes erwarten, und das vorliegende rechtfertigt eine solche Erwartung. Ohne für bestimmte Prüfungen direkt vorzubereiten, bringt es in großer Vollständigkeit alles, was in solchen englischen Universitätsprüfungen verlangt wird, und enthält natürlich am Ende jedes Kapitels bezügliche Übungsaufgaben, zum Schlusse dann eine Sammlung zahlreicher anderer. Die prinzipiellen Erörterungen, deren Erledigung ja eine recht schwierige Sache ist, sind in das Kapitel „Physical basis" zusammengedrängt, und in diesem werden der Reihe nach die Lehren von Newton nebst ihrer Kritik von Mach vorgetragen; hieran werden die Ansichten von Pearson, Love und Lodge gereiht, und dann wird zusammengestellt, was als Hauptgrundlage der Mechanik zu gelten hat. Außer den Dingen, die in einem Lehrgang der theoretischen Mechanik abgehandelt zu werden pflegen, ist auch die graphische Statik mit ihren ersten praktischen Anwendungen aufgenommen; ebenso sind die Elemente der Hydrodynamik und der Elastizitätslehre behandelt. Praktisch eingerichtet, wie alle englischen Lehrbücher, um den Schüler schnell zum selbständigen Arbeiten anzuleiten, erledigt das Werk einen recht ausgedehnten Stoff und wird, da es nicht allzu viele mathematische Vorkenntnisse verlangt, den Studierenden ein sicherer Wegweiser zum gewünschten Ziele sein.

Lp.

E. H. Barton. Dynamical enunciations. Nature **86**, 415-416.

A. E. H. Love. Dynamical enunciations. Nature **86**, 416.

In dem vorstehend angezeigten Buche gibt der Verf. S. 196 als Ergebnisse der Erörterungen der mechanischen Grundbegriffe acht Sätze, die in kurzer Zusammenfassung alles enthalten, was als allgemein angenommen gelten darf. In der vorliegenden Note schlägt er vor, daß vier von diesen Aussagen an die Spitze jedes Lehrganges der Mechanik gestellt werden sollen (Bewegungsgesetz, Definition von Masse, von Kraft, Wahl der Bezugsachsen). Love ist nicht mit der Fassung einverstanden, weil sie dem, der die Mechanik kennt, nichts sagen, für den Anfänger aber irreführend sein können. Eine kurze Schrift nach Art von Maxwells „Matter and Motion" müßte Abhülfe bringen.

Lp.

A. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. In sechs Bänden. Erster Band: Einführung in die Mechanik. Vierte Auflage. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. XV u. 424 S. 8/. Mit 104 Textfig.

Schon bei der Anzeige der dritten Auflage des ersten Bandes dieses bekannten Werks (F. d. M. **36**, 744, 1905) wurde darauf hingewiesen, daß an der Gestalt, welche die ersten vier Bände erhalten haben, keine einschneidenden Änderungen mehr erfolgen sollten. Deshalb sind in der neuen Auflage, die vier Seiten weniger aufweist als die vorangehende, nur an wenigen Stellen eingreifendere Abweichungen zu bemerken; hauptsächlich ist der die Reibung behandelnde Abschnitt hiervon betroffen, wo der erste Paragraph völlig umgearbeitet und am Schlusse eine neue Aufgabe über Reibung einer Keilverbindung hinzugefügt ist.

Lp.

A. Gray and J. G. Gray. A treatise on dynamics, with examples and exercises. London: Macmillan and Co., Ltd. XVI u. 626 S. 8°.

Ein Lehrbuch über höhere Dynamik für Studenten der Technik, Physik und Astronomie [Nature 88, 578, 1912; vgl. Math. Gaz. **6**, 300-301, 1912].

J.

J. Andrade. Le mouvement. Mesures de l'étendue et mesures du temps. Paris: Félix Alcan. VI u. 328 S. 8°.

Der Anlage nach gipfelt das Buch in der Darstellung der Feinmethoden zur Ausmessung des Raumes und der Zeit. Die Richtung des Verf. in seinen Veröffentlichungen geht auf eine philosophische Vertiefung der von ihm behandelten Dinge hinaus. Daher hat er in sein Werk alle Gegenstände aufgenommen und in der ihm eigentümlichen Weise behandelt, die mit dem Hauptzwecke irgendwie zusammenhängen. Somit erhält der Leser einen Abriß der Geometrie, wie sie der Verf. in seiner Géométrie naturelle auf kinematischer Grundlage entwickelt hat. Die nichteuklidische Geometrie, innerhalb deren er besonders die Lehren der Statik durch frühere Untersuchungen erweitert hat, findet ebenfalls Berücksichtigung. Die Prinzipien der Differential- und Integralrechnung werden unter den gleichen Gesichtspunkten in Kürze entwickelt. Ein Lehrgang der theoretischen Mechanik von den Prinzipien an bis zu den Elementen der Elastizitätstheorie hin wird entworfen. Die Grundlagen der analytischen Geometrie bezüglich der Bedeutung der Koordinatensysteme und ihrer Anwendung in der Astronomie, sowie die ersten Elemente der Vektoranalysis werden besprochen. Astronomische und geodätische Messungen verlangen eine vorgängige Erörterung der in der Astronomie und Geodäsie üblichen Vorstellungen. Alle diese Dinge werden in den ersten beiden Teilen auf 221 Seiten des Buches erledigt; dann erst wird in den beiden folgenden Teilen die Messung des Raumes und der Zeit bis zu der eingehenden Besprechung der Konstruktion der feinsten Chronometer und der astronomischen Uhren behandelt. „Es hat mich bedünkt, daß eine neue und vielleicht fruchtbare Art in der Darstellung der Philosophie der Geometrie und der Mechanik, dieser beiden Wissenschaften der Bewegung, darin bestehe, die von selbst entstehenden und treibenden Anschauungen darzulegen, sowie die Bestrebungen der Menschen, seien es Denker, Künstler oder Handwerker, die unter sehr verschiedenen Ausbildungen diese Wissenschaften ins Leben gerufen haben, und schließlich daran die Resultate anzureihen, die in den angewandten Wissenschaften gewonnen sind.“ Ein Buch, das in diesem Geiste abgefaßt ist, kann nicht im Fluge durchgelesen werden und wird oft bei dem Leser Bedenken, ja Widerspruch erregen; es kann auch nicht jeden Gegenstand allseitig beleuchten, sondern muß in einer gewissen Einseitigkeit verharren. Der Verf. beschränkt sich vorzugsweise auf Gedanken, in denen er innerhalb seines Vaterlandes erwachsen ist. Die Schrift, deren Verständnis immerhin einige Vorkenntnisse verlangt, wird vielen Lesern Anregung und genußreiche Stunden verschaffen.

Lp.

H. Lorenz. Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. Für den Schulgebrauch und zum Selbtsunterricht. Berlin u. München: R. Oldenbourg. VI u. 176 S. 8°.

Das Buch soll den Stoff bringen, der nach der Ansicht des Verf. in Zukunft auf den höheren Realanstalten Deutschlands zu lehren ist. Für diesen Zweck ist der Stoff sehr reichlich bemessen. Die Ausführung des mechanischen Teils der Schrift (etwa ein Drittel des Büchleins) geht ziemlich tief in den Gegenstand hinein. Lp.

H. E. Cobb. Elements of applied mathematics. Boston, New York, Chicago, London: Ginn and Co. VII u. 274 S. 8°.

Eine nützliche Aufgabensammlung für die praktische Seite des mathematischen Unterrichts. Ein besonderer Vorteil ist der enge Zusammenhang, in welchen Arithmetik, Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Mechanik und Physik gebracht sind. Inhalt: Measurement and approximate number. Vernier and micrometer calipers. Work and power. Levers and beams. Specific gravity. Geometrical constructions with algebraic applications. The use of squared paper. Functionality; maximum and minimum values. Exercises for algebraic solution in plane geometry. Common logarithms. The slide rule. Angle functions. Geometrical exercises for advanced algebra. Variation. Exercises in solid geometry. Heat. Electricity. Logarithmic paper. Mit Tafeln, Bibliographie, vierstelligen Logarithmen und Inhaltsverzeichnis endet das Buch. J.

P. Mansion. A propos de la mécanique nouvelle. Mathesis (4) 1, 169.

In der theoretischen Mechanik verschwindet jede Schwierigkeit bezüglich der Prinzipien, wenn jeder neue Ausdruck scharf definiert, das angenommene Bezugstetraeder sorgfältig angegeben wird. Mn. (Lp.)

H. S. A. The definition of mass. Nature 88, 78.

Auseinandersetzungen mit einem Rezensenten über die Schwierigkeit einer „Definition“ des Massenbegriffes. Lp.

F. R. Barrell. The unit of momentum. Nature 88, 144.

John Perry. The unit of momentum. Nature 88, 144,

Barrell vermißt eine Einheit für die Zahlenbewertung der Bewegungsgröße. Er schlägt daher vor: „Die Bewegungsgröße von m Grammen, die sich mit v Zentimetern in der Sekunde bewegen, ist mv „sec-dynes“, ihre kinetische Energie ist $\frac{1}{2}mv^2$ „ergs“ (cm-dynes). Perry nimmt den Vorschlag „sec-dyne“ (außerdem für englische Ingenieure „sec-pound“) mit Begeisterung an. Für die anderen Kultursprachen sind entsprechende Abkürzungen erst zu finden. Lp.

J. D. van der Waals jr. Energie en massa. Amst. Ak. Versl. **20**, 342-359.

Der Verf. erörtert den Zusammenhang zwischen Energie und Trägheit. Unter anderem leitet er die relativistische Dynamik des Massenpunktes aus diesem Zusammenhange und dem Impulssatze ab. Ferner wird der Versuch gemacht, den Energiestrom so in Teile zu zerlegen, daß sich jeder Teil als Produkt einer Energiedichte und ihrer Geschwindigkeit ergibt, damit so die Transformationsformel für den Energiestrom erhalten wird. Lp.

Ph. Frank. Über den Zusammenhang von kinetischer Energie und transversaler Masse. Physik. Zs. **12**, 1112-1113.

„Aus dem Energiesatz läßt sich bekanntlich eine Beziehung zwischen der kinetischen Energie $L(v)$ eines Massenpunktes von der Geschwindigkeit v und seiner longitudinalen Masse herleiten (Abraham, Theorie der Elektrizität, 2. Aufl. 2, § 20, Gl. 115 b). Im folgenden möchte ich nun zeigen, daß man in ebenso einfacher Weise aus energetischen Betrachtungen eine unmittelbare Beziehung zwischen kinetischer Energie und transversaler Masse gewinnen kann." Lp.

Ph. Frank. Eine neue Ableitung für die Dynamik der Relativtheorie. Physik. Zs. **12**, 1112-1113.

„In der vorstehenden Arbeit habe ich gezeigt, daß sich aus energetischen Betrachtungen zwischen der kinetischen Energie L, der transversalen Masse m_t und der Ruhmasse m eines Massenpunktes die Beziehung $L = k(m_t - m)$ herleiten läßt, wobei k eine noch unbestimmte Konstante bedeutet. Bei dieser Ableitung war keinerlei Voraussetzung benutzt worden, die der Relativtheorie eigentümlich ist. In den folgenden Zeilen möchte ich zeigen, daß sich mit Hülfe jener Beziehung und anderer schon bekannter Beziehungen, die ebenfalls ohne Zuhülfenahme irgend einer speziellen Theorie nur aus allgemeinen dynamischen Erwägungen abgeleitet sind, der vollständige Ausdruck für die lebendige Kraft, den Impuls, die longitudinale und die transversale Masse als Funktionen der Geschwindigkeit gewinnen läßt. Und diese ohne relativtheoretische Voraussetzungen abgeleiteten Formeln stimmen genau mit denen der Relativtheorie überein. Ja selbst das Einsteinsche Additionstheorem für zwei zueinander senkrechte Geschwindigkeiten ergibt sich aus diesen allgemeinen energetischen Betrachtungen ohne jede speziellere Annahme". Lp.

M. Laue. Das Relativitätsprinzip. Mit 14 in den Text hineingedruckten Abbildungen. Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn. X u. 208 S. 8°. (Die Wissenschaft, Heft 38.)

Das Buch ist eine zeitgemäße und höchst willkommene Darstellung dieser neuen Theorie, verfaßt von einem besonnenen Forscher, der selbst bedeutsame Beiträge zu den in ihr zu erledigenden Fragen geliefert hat. Die Teile des Buches sind: I. Die Problemstellung. II. Die älteren Theorien der elektro-

dynamik bewegter Körper. III. Die Relativitätstheorie, kinematischer Teil. IV. Weltvektoren und -tensoren. V. Die Elektrodynamik des leeren Raumes nach dem Relativitätsprinzip. VI. Die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper. VIII. Dynamik. — Anhang.

In dem Rückblicke (§ 30, S. 184) stellt der Verf. die in dem Buche zugrunde gelegten Annahmen zusammen. In § 6 wird zunächst das Relativitätsgesetz an die Spitze gestellt, welches die Gleichartigkeit einer dreifach unendlichen Schar von Bezugssystemen für alle Naturgesetze ausspricht. Aus dem hinreichend bekannten Naturgesetz der Lichtfortpflanzung im leeren Raume wird in § 7 die Lorentz-Transformation abgeleitet, welche den Übergang von einem berechtigten System zu allen anderen ermöglicht und zugleich die Einsteinsche Kinematik enthält. Danach wird in § 14 bewiesen, daß die (über das Gesetz der Lichtfortpflanzung hinausgehende) Elektrodynamik des Vakuums durch die Lorentz-Transformation in sich selbst übergeführt wird. In § 15 treten als neue Annahmen die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses hinzu. Bei Minkowskis Elektrodynamik der bewegten Körper wird dann die Maxwellsche Theorie für ruhende Körper zugrunde gelegt, nur unwesentlich im Ansatz der ponderomotorischen Kraft entsprechend der Überlegung modifiziert, daß alle Kräfte sich gegen die Lorentz-Transformation gleich verhalten müssen, und daß daher dem Energiestrom auch ein elektromagnetischer Impuls zugeordnet sein muß. Auf derselben Grundlage baut sich auch die Dynamik der bewegten Körper auf; doch enthält der Verzicht auf gewisse an sich mögliche Zusätze bei der Deutung der Komponenten des Welttensors T als Energiestrom, Impulsdichte usw. eine neue Hypothese, deren physikalische Bedeutung in dem Satze von der Trägheit der Energie zu Tage tritt, welche unter anderem die vollständige Zurückführung der mechanischen Trägheit auf die Energie und die Spannungen ermöglicht. In den beiden letzten Paragraphen wird schließlich noch der zweite Hauptsatz hinzugezogen. Als physikalische Grundlagen der Relativitätstheorie sind also zu bezeichnen: das Einsteinsche Relativitätsprinzip, die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses, das Energieprinzip, die Maxwellsche Elektrodynamik, sowie jene Deutung der Trägheit. Lp.

G. Mahler. Das Prinzip der Relativität. Korresp.-Bl. f. d. höheren Schulen Württembergs **18**, 234-240; 278-287.

Der Verf. gibt mit einfachen Mitteln unter Anwendung elementar-geometrischer Betrachtungen eine Darstellung des Relativitätsprinzips sowie der Gründe und Tatsachen, die zu seiner Aufstellung geführt haben. Der erste Abschnitt handelt von der Hypothese des ruhenden Äthers und von den darauf bezüglichen Untersuchungen, wobei namentlich über die Arbeiten von Lorentz, Michelson und Morley in einfacher Weise berichtet wird. Der zweite Abschnitt behandelt dann das Relativitätsprinzip selbst, erläutert zunächst seine Bedeutung an einigen Beispielen und bringt das wesentliche über die Lorentz-Transformationen. Aus den hierbei aufgestellten Gleichungen wird eine Reihe interessanter und wichtiger Folgerungen gezogen, die durch Beispiele erläutert werden. Hieran schließt sich eine elementare Darstellung des bekannten Vortrags von Minkowski; den Schluß bilden

einige Bemerkungen über die experimentelle Prüfung und die allgemeine Bedeutung des Prinzips. Der Wert des Aufsatzes besteht vor allem darin, daß er mit einfachen Mitteln in die Theorie der Relativität einführt. Lö.

N. Campbell. The common sense of relativity. Phil. Mag. (6) 21, 502-517.

Der Verf. will durch seine Ausführungen das Relativitätsprinzip dem gesunden Verstande des „Laboratoriumsmenschen" näher bringen. Der sei nämlich geneigt zu denken, diese neue Entwicklung der Wissenschaft (nach Ansicht des Verf. die wichtigste seit den Tagen Newtons) sei äußerst verworren und unfaßbar. In dem Aufsatze soll der Versuch gemacht werden, diesen Mißgedanken zu beseitigen; sogar soll gezeigt werden, daß die gemäß dem Relativitätsprinzipe angenommene Vorstellung von den Beziehungen sich bewegender Systeme viel einfacher ist als die, welche sie verdrängt, und daß alle ihre scheinbaren Schwierigkeiten von gedanklichen Unklarheiten und Mißverständnissen herrühren." Am Schluß wird als Inhaltsübersicht ausgesprochen: 1-5. Die von dem Relativitätsprinzip gemachten Annahmen werden festgestellt, und es wird der Versuch gemacht, einige von ihnen beim ersten Anblick annehmbarer zu machen. 6. Eine mit der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten zusammenhängende Schwierigkeit wird geprüft und auf eine Unklarheit der Sprechweise zurückgeführt. 7. Die durch das Wort „wirklich" (real) eingeführten Unklarheiten werden erörtert. 8. Die Beziehung zwischen Dynamik und Relativität wird kurz betrachtet." Lp.

A. Einstein. Die Relativitätstheorie. Zürich. Naturf. Ges. **56**, 1-14.

Der Vortrag, gehalten in der Sitzung der Zürcher Naturforschenden Gesellschaft am 16. Januar 1911, entwickelt in einfacher und musterhaft klarer Darstellung die Grundvorstellungen der Relativitätstheorie und ihrer Bedeutung für die Physik. Lp.

H. Rohmann. Ein Modell zum Relativitätsprinzip. Physik. Zs. **12**, 1227-1230.

In dem Vortrage „Physikalisches über Raum und Zeit" (Himmel und Erde **23**, 117-136; auch sep. Leipzig: B. G. Teubner, 1911) hat Cohn ein Modell zur Veranschaulichung der Relativitätstheorie gegeben. Auf seine Anregung gibt der Verf. des Artikels eine Beschreibung der Konstruktion dises Modelles. Lp.

O. Lehmann. Das Relativitätsprinzip der neue Fundamentalsatz der Physik. S. A. Verh. Naturw. Ver. Karlsruhe **23**, 25 S.

O. Lehmann. Die Umwandlung unserer Naturauffassung infolge der Entdeckung des Relativitätsprinzips. S. A. Aus der Natur **7**, 705-711, 751-761.

Zwei Aufsätze, in denen durchgeführt wird, welches der Einfluß des Relativitätsprinzips auf alle Zweige der Physik sein muß. In dem ersten Artikel heißt es S. 14: „Das Relativitätsprinzip sagt aus, daß wir stets nur relative, nie absolute Bewegung der Körper beobachten und nachweisen können; es gilt somit nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik und Optik, also im Gesamtgebiete der Physik. . . . Damit ist ein neuer ungemein wichtiger Fundamentalsatz der Physik gewonnen, der sich hinsichtlich seiner Bedeutung anschließt an den Satz von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile, und dem auch ähnliche Fruchtbarkeit zukommen dürfte, insofern man nur nötig hat, Erscheinungen aufzusuchen, bei welchen sich, wenn auch nur theoretisch, die Existenz absoluter Bewegung, z. B. der Erde, geltend machen müßte. Der Ansatz, daß ein solcher Einfluß tatsächlich nicht existieren kann, ergibt sofort ein neues Naturgesetz, ähnlich wie zahlreiche Naturgesetze sich einfach durch den Ansatz ergeben, daß ein Perpetuum mobile nicht existieren kann.“ — Die Durchführung dieser Auffassung in den Haupterscheinungen geschieht in dem ersten Aufsatze in schärferer mathematischer Form. Der zweite, ein Vortrag im Karlsruher Naturwissenschaftlichen Verein am 2. Dezember 1910, geht unter Vermeidung der mathematischen Formeln auf die Wirkungen der neuen Auffassung ein bei den Gegenständen: Ort und Zeit, Masse, Energie, Äther, Relativitätsprinzip, Relativität der Maße, Umkehrung der Physik, Äquivalenz von Masse und Energie, Weltformel. Zur ersten Einführung in diesen Gedankenkreis sind beide Abhandlungen recht geeignet. Lp.

F. Jüttner. Einige Beispiele zur Lorentz-Einsteinschen Relativmechanik. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur. 24. Juli 1911, 21 S. 8°.

Der Verf. behandelt im ersten Abschnitt einen Oszillator, dessen Anziehungsmittelpunkt ruht, im zweiten die Bewegung bei konstanter Kraft nach der neuen Mechanik. Jedesmal wird zuerst die Bewegung bei Beschränkung auf eine gerade Linie erörtert, danach der räumliche Vorgang. Die Darstellung ist so gestaltet, daß die Analogie zu den Rechnungen der gewöhnlichen Mechanik recht deutlich hervortritt. Daher wird zunächst von der allgemeinen, durch H. Poincaré begründeten Auffassung der Relativtheorie als einer Invariantentheorie eines gewissen vierdimensionalen Raumes nicht unmittelbar Gebrauch gemacht. Zuerst wird der Begriff der gewöhnlichen Zeit und der gewöhnlichen oder Newtonschen Kraft zugrunde gelegt und dann erst der Begriff der Eigenzeit und der „Minkowskischen Kraft“ (nach dem Ausdruck von H. A. Lorentz) angewandt. Von den Resultaten erwähnen wir, daß bei der Bewegung eines Massenpunktes im ersten Abschnitt unter einer Newtonschen quasielastischen Kraftwirkung die Zeit durch elliptische Integrale ausgedrückt wird, die für Geschwindigkeiten, die sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c sind, auf die der harmonischen Bewegung entsprechenden zurückkommen. Im zweiten Abschnitt zeigt sich, daß bei konstanter Kraft die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit c mit wachsender Zeit zustrebt.

„Wie sowohl die im einzelnen durchgeführten Beispiele, als auch die zuletzt angestellten Betrachtungen zeigen, hat in der Relativtheorie sowohl der Newtonsche, wie der Minkowskische Kraftbegriff je seine besonderen

Vorzüge, und vom Standpunkte der Mechanik aus sind beide Begriffe gleichberechtigt. Erst die weitere Erfahrung kann lehren, ob in physikalischer Hinsicht der eine von ihnen den Vorrang verdient.“ Lp.

J. Ishiwara. Über die Raumzeittransformation in der Relativitätstheorie. **Tôkohu Math. Journ. 1, 19-30.**

„An der Spitze seiner Originalabhandlung stellte Einstein die eigentliche Methode der zeitlichen Verbindung zweier räumlich entfernten Ereignisse dar, wo das Licht als Signal zur Zeitregulierung eine besondere Rolle spielt. Dabei ist allerdings ganz unerklärt geblieben, warum das Licht allein von allen Naturphänomenen eine solche Sonderstellung einnehmen soll. Zwar war angenommen, daß sich das Licht im Vakuum stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustand des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit fortpflanzt. Kann dies aber der wesentliche Grund dafür sein, daß die Lichterscheinung vor den anderen einen Vorzug hat? Es darf daher auch gefragt werden, was folgen muß, falls man statt des Lichtsignals eine andere Erscheinung gebraucht.“

Zur Beantwortung dieser Fragen wird die vorliegende Mitteilung veröffentlicht. Zuerst wird (§§ 2, 3) durch Betrachtung eines beliebigen kinematischen Vorganges eine allgemeine Raumzeittransformation aufgestellt. Dann wird gezeigt (§ 4), daß die Beschreibung des Relativitätsprinzips zur Lorentztransformation führt. Diese Transformation enthält aber noch zwei unbestimmte Konstanten, welche die Raum- und Zeitmaßeinheiten in verschiedenen Bezugssystemen miteinander in Beziehung setzen. Zur Bestimmung dieser Konstanten (§ 5) braucht man ein zweites Postulat. Werden die „Vermutungen“ hinzugefügt, daß ein starrer Stab, wenn er senkrecht zu sich selbst bewegt wird, seine Länge ungeändert behält, und daß eine Uhr ihren Gang durch Bewegung nicht ändert, so gelangt man zur Lorentztransformation. Zur Gewinnung der Formeln von Einstein und Ignatowsky muß der Verf. eine Konstante gleich 1 setzen; dies hat die Bedeutung: die Relativitätsgeschwindigkeit eines Sytems in bezug auf ein anderes soll in ihrem Betrage gleich der des letzteren in bezug auf das erstere sein; hieraus folgt dann das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Ob die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit oder die Unabhängigkeit des Uhrganges von der Bewegung richtig ist, sei durch die Erfahrung zu entscheiden. Lp.

Ph. Frank und H. Rothe. Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme. **Ann. der Phys. (4) 34, 825-855.**

Die Transformationsgleichungen, welche die Raumzeitkoordinaten (x, y, z, t) eines ruhenden Systems mit denen in einem bewegten System (x', y', z', t') verknüpfen, dessen Geschwindigkeit q nach Richtung und Größe konstant ist, haben in der heutigen Physik eine große Wichtigkeit erlangt. Die Prüfung, welche Voraussetzungen physikalischer oder anderer Natur notwendig sind zur Ab-

leitung dieser Gleichungen, bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Nach der Relativitätstheorie sind sie durch die Lorentztransformation gegeben. Wenn mit c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet wird und die Koordinatensysteme so gewählt sind, daß zur Zeit 0 das bewegte System mit dem ruhenden zusammenfällt und sich dann in x-Richtung weiterbewegt, hat man bekanntlich:

$$(1) \qquad t' = \frac{1}{\sqrt{1-q^2/c^2}}\left(t - \frac{q}{c^2}x\right), \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1-q^2/c^2}}(-qt + x).$$

Als Grenzfall für $c = \infty$ erhält man hieraus die Gleichungen der Galileitransformation:

$$(2) \qquad t' = t, \quad x' = -qt + x.$$

In der Form

$$(3) \qquad t' = (1 - q/c_1)t, \quad x' = -qt + x,$$

die dem Dopplerschen Prinzip entspricht, seien die Gleichungen als Dopplertransformation bezeichnet. Das Resultat, zu welchem die Verff. gelangen, lautet:

Unter allen Transformationsgleichungen, die eingliedrigen linearen homogenen Gruppen entsprechen, gibt es drei Typen, bei denen der Betrag der Kontraktion nicht von der Richtung der Bewegung im absoluten Raume abhängt. Darunter hat nur ein Typus eine tatsächliche Kontraktion der Längen zur Folge, nämlich die Lorentztransformation (1); die beiden anderen Typen, die Galilei- und die Dopplertransformation (2) und (3), lassen die Längen unverändert. Bei der Lorentztransformation hat die Lichtgeschwindigkeit in allen bewegten Systemen bei beliebiger Fortpflanzungsrichtung denselben endlichen Wert c. Bei der Dopplertransformation hingegen nur bei Fortpflanzung nach einer Richtung, bei der Galileitransformation überhaupt nur, wenn die Lichtgeschwindigkeit unendlich wäre. Lp.

F. Grünbaum. Über einige ideelle Versuche zum Relativitätsprinzip. Physik Zs. **12**, 500-509.

Gelegentlich eines Vortrages über Längen- und Zeitmessung in der Relativitätstheorie (F. d. M. **41**, 757, 1910) hat H. v. Mangoldt darauf hingewiesen, daß sich z. B. die ruhenden Beobachter von den Vorgängen im bewegten Systeme durch Benutzung der Momentphotographie bequem ein Bild verschaffen können. Da v. Mangoldt diese Betrachtung nur näherungsweise und in großer Kürze durchführt, untersucht der Verf. allgemein und streng, was der ruhende und was der bewegte Beobachter auf solchen Momentphotographien vorfinden muß. Dabei werden zu der Darstellung v. Mangoldts einige Ergänzungen gegeben, damit einer möglichen irrtümlichen Auffassung der Konsequenzen des Relativitätsprinzips vorgebeugt werde.

Lp.

E. Gehrcke. Bemerkungen über die Grenzen des Relativitätsprinzips. Verh. Deutsche Phys. Ges. **13**, 665-669.

Zuerst wird darauf hingewiesen, daß das Relativitätsprinzip zwar für die Translationsbewegung gilt, nicht aber für die Rotationsbewegung, die sich unabhängig von dem Dasein eines anderen Körpers durch das Auftreten der Zentrifugalkräfte und den Widerstand der Rotationsachse gegen Drehungen bekunde. Außer dem vom Verf. angedeuteten bekannten Newtonschen Versuche eines rotierenden Gefäßes mit Flüssigkeit ist vielleicht anzuführen H. Streintz, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik (F. d. M. **15**, 760, 1883), eine Schrift, die als Vorläuferin der Arbeiten über das Relativitätsprinzip angesehen werden kann. Sodann wird die Einsteinsche Auffassung von der Zeit in Parallele gestellt mit den Vorstellungen in der nichteuklidischen Geometrie vom Raume. „Die Einsteinsche Zeit ist etwas ganz anderes als die Zeit unserer Anschauung", zwar logisch, aber nicht anschaulich denkbar.

Lp.

F. Grünbaum. Bemerkungen über die Grenzen des Relativitätsprinzips. **Verh. Deutsche Phys. Ges. 13, 851-855.**

Polemisch gegen die Auffassungen von Gehrcke (vgl. das vorstehende Referat) über absolute und relative Bewegung, über die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie, über die Parallele zwischen der nichteuklidischen Geometrie und dem Einsteinschen Zeitbegriff. „Ich stimme mit Gehrcke darin überein, daß die Frage nach der Allgemeingültigkeit des Prinzips die größte Bedeutung hat; nur kann ich nicht anerkennen, daß seine Gründe gegen diese Allgemeingültigkeit stichhaltig sind." Lp.

E. Gehrcke. Nochmals über die Grenzen des Relativitätsprinzips. **Verh. Deutsche Phys. Ges. 13, 990-1000.**

Wegen des Widerspruchs, den seine „Bemerkungen" gefunden haben (vgl. das vorstehende Referat), legt der Verf. seinen Standpunkt ausführlich dar. „Die Grundpfeiler einer jeden physikalischen Theorie werden mitten unter persönlichen Sympathien und Antipathien errichtet. Wir sind heute außerstande, zwischen der Stokesschen, Lorentzschen oder Einsteinschen Theorie zu entscheiden. Ob und inwieweit diese Theorien die Eigenschaften des Vakuums richtig wiedergeben, muß also vorläufig dahingestellt bleiben; aber soviel darf als feststehend erachtet werden, daß jede dieser Theorien die Vorliebe ihres Erfinders für gewisse Gedankenverbindungen widerspiegelt". Lp.

M. Laue. Ein Beispiel zur Dynamik der Relativitätstheorie. **Verh. Deutsche Phys. Ges. 13, 513-518.**

M. Laue. Bemerkungen zum Hebelgesetz in der Relativitätstheorie. **83. Vers. D. Naturf. u. Ärzte, Karlsruhe 1911,; Phys. Zs. 12, 1008-1010.**

Der Verf. richtet sich gegen einen Aufsatz von Lewis und Tolman im Phil. Mag. (6) **18**, 510 (F. d. M. **40**, 749, 1909), wo eine Betrachtung zur Ableitung der Transformationsformeln für die Kraft an das Beispiel eines Winkel-

hebels angeknüpft ist. Der Verf. kommt durch seine Überlegungen zu dem Schluß: „Das Ganze ist ein Analogon zu dem bewegten Kondensator beim Trouton-Nobleschen Versuch. Sein Feld können wir mit dem Winkelhebel, seine materiellen Teile mit dem Gehäuse vergleichen. Weder der elektromagnetische Impuls des einen, noch der mechanische des anderen Teils liegt zur Geschwindigkeit parallel, beide brauchen daher zur translatorischen Bewegung Drehmomente. Da aber der Impuls des Ganzen zur Geschwindigkeit parallel ist, so sind diese beiden zur Geschwindigkeit senkrechten Impulskomponenten einander entgegengesetzt gleich, und dasselbe gilt somit von den Drehmomenten. Das Ganze bedarf keines Drehmomentes; es stellt vielmehr ebenso wie das aus Winkelhebel und Gehäuse bestehende Modell ein „vollständiges statisches System“ dar, das für stationäre und quasistationäre translatorische Bewegungen der Dynamik des Massenpunktes gehorcht.“ Lp.

M. Laue. Zur Diskussion über den starren Körper in der Relativitätstheorie. Physik. Zs. **12**, 85-87.

In den bisherigen Vorschlägen (Born, Ehrenfest, Herglotz, Noether) ist angenommen, daß ein starrer Körper im Gegensatz zu den unendlich vielen Freiheitsgraden des deformierbaren nur eine endliche Zahl von ihnen besitzen kann. Der Verf. zeigt, daß das Relativitätsprinzip diese Möglichkeit aus dynamischen Gründen ausschließt. Wenn sich unter gewissen Umständen ein Körper ohne Änderung der auf das jeweils mitbewegte System bezogenen Form bewegen kann, so ist dies bei keinem Körper die allgemeinste mögliche Bewegung. Sodann werden bei der Betrachtung des starren Körpers als Grenzfall eines deformierbaren Körpers mit sehr großem Elastizitätskoeffizienten die Schlüsse angedeutet. Die Notwendigkeit, bei jedem Körper die Möglichkeit von Formveränderungen zuzugeben, wird zuletzt an einem Beispiele erläutert. Lp.

M. Laue. Zur Dynamik der Relativitätstheorie. Ann. der Phys. (4) **35**, 524-542.

Der Verf. knüpft an die Frage von Ehrenfest an, ob die Dynamik des Massenpunktes auch dann noch für ein Elektron gilt, wenn man diesem nicht radiale Symmetrie, sondern etwa elliptische Gestalt zuschreibt; sowie an die andere Frage nach der Theorie des Trouton-Nobleschen Versuchs. Er bemerkt: „Schon bei der Newtonschen Mechanik ist oft dargelegt worden, daß es folgerichtiger ist, die Dynamik der Kontinua der des Massenpunktes voranzustellen. Mir scheint in den beiden genannten Problemen ein Hinweis darauf zu liegen, daß in der Relativitätstheorie die Vorzüge des genannten Weges vor dem umgekehrten, die Dynamik der Kontinua aus der des Massenpunktes abzuleiten, noch weit größer sind als in der alten Theorie. Wir wollen deshalb im folgenden den Begriff der elastischen Spannungen in seinem Zusammenhange mit dem Impuls und der Energie untersuchen“. (Vgl. M. Laue, Das Relativitätsprinzip. Referat S. 718).

Inhalt: Vorbemerkungen (Bezeichnungen). § 1. Die Transformation der Kraft; Energie- und Impulssatz. § 2. Die Transformation von Impuls, Energie und Spannungen. § 3. Die absoluten und die relativen (elastischen) Spannungen. § 4. Der Flächensatz. § 5. Vollständiges statisches System. — „Die Dynamik der Relativitätstheorie ist im allgemeinen ziemlich verwickelt. Die Verhältnisse gestalten sich aber wieder einfach bei einem vollständigen statischen System. Wir verstehen darunter ein solches, welches in irgendeinem berechtigten Bezugssystem K^0 im statischen Gleichgewicht ist, ohne mit anderen Körpern in Wechselwirkung zu stehen; also etwa ein elektrostatisches Feld mit Einschluß aller Ladungskörper.“ Lp.

Max Born. Elastizitätstheorie und Relativitätstheorie. **Physik. Zs. 12**, 569-575.

Das Ziel der Untersuchung ist nicht die vollständige Aufstellung der Elastizitätstheorie, die dem Relativitätsprinzip genügt, auch nicht eine kritische Betrachtung aller dabei möglichen Ansätze, sondern der Nachweis, daß ein bestimmter, von Minkowski eingeschlagener Weg, gegen dessen Gangbarkeit mehrfache Einwände erhoben worden sind, sich in konsequenter Weise ein beträchtliches Stück weiter verfolgen läßt. Minkowski hat im Anhange seiner „Grungleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern“ (Gött. Nachr. 1908, 53-111; F. d. M. 39, 909, 1908) einen Ansatz sehr allgemeiner Natur für die elastischen Kräfte gegeben, der von einer Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips ausgeht und so eingerichtet ist, daß sich die Minkowskischen Ausdrücke für die elektromagnetischen Kräfte und Spannungen der allgemeinen Mechanik einordnen. Dieser Ansatz entspricht genau dem Verfahren für die gewöhnliche Statik elastischer Medien, wie der Verf. es darlegt. Dagegen fehlt bei Minkowski die ebenfalls vom Verf. gegebene Ableitung der Symmetriebedingungen. Daher wird nun in der gegenwärtigen Abhandlung gezeigt, wie man auf genau demselben Wege diese Bedingungen aufstellen kann. Am Schlusse wird bemerkt, es fehle zur Aufstellung der vollständigen Elastizitätstheorie jetzt noch eine Methode, um die Spannungen in einer gegen die Lorentztransformationen kovarianten Weise mit den Deformationen in Beziehung zu setzen, durch die sie erzeugt werden kann. Der Nachweis dieses Zusammenhangs wird in einer weiteren Veröffentlichung versprochen. Lp.

V. Varićak. Zum Ehrenfestschen Paradoxon. Physik. Zs. **12**, 169-170.

„Das Zustandekommen des Ehrenfestschen Paradoxons ist einleuchtend, wenn man sich auf den Standpunkt stellt, den Lorentz bei der Aufstellung seiner Kontraktionshypothese eingenommen hat, d. h. wenn man die Kontraktion des bewegten starren Körpers in der Bewegungsrichtung als eine objektiv stattfindende Veränderung ansieht. Unabhängig von dem Beobachter wird sich jedes Element der Peripherie nach Lorentz tatsächlich verkürzen, während die Elemente eines Radius unverkürzt bleiben. Stellt man sich hingegen auf den Einsteinschen Standpunkt, demzufolge die besagte Kontraktion nur eine scheinbare, subjektive Erscheinung ist, verursacht

durch die Art unserer Uhrenregulierung und Längenmessung, so scheint jener Widerspruch nicht begründet zu sein." Lp.

W. v. IGNATOWSKY. Zum Ehrenfestschen Paradoxon. (Auszug aus einem Briefe an Prof. V. Varićak in Agram.) Physik. Zs. 12, 414.

„Das Beispiel, das Sie anführen (vgl. vorstehendes Referat), habe ich mir früher schon genau überlegt und möchte Ihnen im folgenden das Resultat mitteilen. — ... Macht der ruhende Beobachter beim ruhenden Stabe eine Pause π und beim bewegten Stabe eine Pause π_1, so werden π und π_1 nicht gleich sein." Lp.

A. EINSTEIN. Zum Ehrenfestschen Paradoxon. Bemerkung zu V. Varićaks Aufsatz. Physik. Zs. 12, 509-510.

Varićak „hat mit Unrecht einen Unterschied der Lorentzschen Auffassung von der meinigen mit Bezug auf die physikalischen Tatsachen statuiert. Die Frage, ob die Lorentz-Verkürzung wirklich besteht oder nicht, ist irreführend. Sie besteht nämlich nicht „wirklich", insofern sie für einen mitbewegten Beobachter nicht existiert; sie besteht aber „wirklich", d. h. in solcher Weise, daß sie prinzipiell durch physikalische Mittel nachgewiesen werden könnte, für einen nicht mitbewegten Beobachter. Dies ist es ja, was Ehrenfest in sehr hübscher Weise deutlich gemacht hat." Lp.

P. EHRENFEST. Zu Herrn von Ignatowskys Behandlung der Bornschen Starrheitsdefinition II. Physik. Zs. 12, 412-413.

Der Verf. konstatiert, daß mehrere Resultate, zu denen W. von Ignatowsky gelangt war, von diesem Autor als unrichtig anerkannt sind, und daß derselbe die Behandlung des allzu präzis definierten „relativ starren" Körpers aufgegeben und sich nun dem anregend-dehnbaren Fragegebiet des „relativ-elastischen" Körpers zugewandt habe. Lp.

W. v. IGNATOWSKY. Zur Behandlung der Bornschen Starrheitsdefinition. Erwiderung an Herrn P. Ehrenfest. Physik. Zs. 12, 606-607.

Entgegnung auf die vorstehend angezeigte Note von P. Ehrenfest. „Ich halte infolge des Gesagten alle Fragen für erledigt." Lp.

W v. IGNATOWSKY. Bemerkung zu der Arbeit: „Der starre Körper und das Relativitätsprinzip". Ann. der Phys. (4) 34, 373-375.

Auf S. 620 u. 621 der angeführten Arbeit (F. d. M. **41**, 764, 1910) ist gesagt: „Es folgt, daß der ganze Körper nur dann auf Ruhe transformiert werden kann, wenn er sich translatorisch und geradlinig bewegt.“ In dieser Aussage sind die Wörter „und geradlinig“ zu streichen, weil, wie von G. Herglotz und F. Noether bewiesen ist, auch bei einer krummlinigen Translation der ganze Körper auf Ruhe transformiert werden kann. Ferner wird die Bemerkung derselben Arbeit, daß die einzige Bedingung der Starrheit die Gleichung (20) § 2 ist, insofern berichtigt, als (20) nur bei der Voraussetzung gilt, daß das Volumenelement, auf Ruhe transformiert, seine Gestalt nicht ändert.

Lp.

W. v. Ignatowsky. Das Relativitätsprinzip. Fortsetzung und Schluß. Arch. der Math. u. Phys. (3) **18**, 17-40.

Vgl. das Referat über den ersten Teil dieser Arbeit F. d. M. **41**, 766, 1910, sowie das Referat über die Abhandlung „Der starre Körper und das Relativitätsprinzip“ ebenda S. 764. In den ersten Paragraphen wird zur Vorbereitung für die von dem Relativitätsprinzipe zu machenden Anwendungen auf einige Gebiete der Physik die Vektoranalysis diesem Prinzipe angepaßt und gezeigt, wie sich hierbei Linien-, Flächen- und Volumenelemente transformieren lassen. Dann wird untersucht, welche Beziehungen zwischen den vektoranalytischen Transformationen in dem einen System K und denjenigen des anderen Systems K' bestehen. Nunmehr werden bei der Bewegung eines Mediums die Dichte, die Massenänderung und die Kontinuitätsgleichung erörtert. Als Anwendungen folgen die Lorentzschen elektrodynamischen Gleichungen, die Minkowskischen Grundgleichungen für bewegte Körper, die Bewegungsgleichungen eines Massenteilchens, die ponderomotorische Kraft im elektromotorischen Feld, die Energiegleichung und die Impulsgleichung. Wegen der Fülle des behandelten Stoffes müssen wir uns mit dieser Aufzählung begnügen. Lp.

W. v. Ignatowsky. Eine Bemerkung zu meiner Arbeit: „Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip“. Physik. Zs. **12**, 779.

Von Ph. Frank darauf hingewiesen, daß ein Schluß in der erwähnten Arbeit angezweifelt werden kann, sucht der Verf. diesem Mangel abzuhlefen und kommt zu dem Ergebnis, „daß wir unendlich viele gleichwertige Systeme haben“, oder nach Laue: „Es gibt eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit gleichberechtigter Systeme, welche sich gegeneinander mit gleichförmigen Geschwindigkeiten bewegen“. Dies sei als Definition des Relativitätsprinzips zu betrachten.

Lp.

W. v. Ignatowsky. Über Überlichtgeschwindigkeiten in der Relativtheorie. Physik. Zs. **12**, 776-778.

Schon in früheren Arbeiten hat der Verf. darauf hingewiesen, daß die Lichtgeschwindigkeit c nur für substantielle Punkte als Grenzgeschwindigkeit zu betrachten ist. Denn in der Wurzel $\sqrt{1-q^2/c^2}$ der Einsteinschen Trans-

formationsgleichungen bedeutet q die Geschwindigkeit des Koordinatensystems. Nun ist ein solches System kein mathematisches Gebilde, sondern eine substantielle Welt mit ihren Beobachtern und Instrumentarium. Deshalb darf angenommen werden, daß ein beliebig bewegter substantieller Punkt auf Ruhe transformiert werden kann. Die Bewegung irgendeiner Erscheinung, z. B. Fortpflanzung einer Phase, Dilatation usw., kann dagegen im allgemeinen nicht auf Ruhe transformiert werden, und deshalb kann diese Fortpflanzung beliebig sein. Diese Gedanken werden mathematisch erläutert und auf einzelne Beispiele (Sommerfeld, Diskussion in Königsberg) angewandt; insbesondere wird gezeigt, daß ein Signal sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit fortbewegen kann. Lp.

G. Nordström. Zur Relativitätsmechanik deformierbarer Körper. Physik. Zs. **12**, 854-857.

Zu einer befriedigenden Fassung der Relativitätsmechanik kann man nur gelangen, wenn man die Deformierbarkeit der Körper berücksichtigt. Die Betrachtungen des Verf. gründen sich auf die von Abraham (F. d. M. **40**, 927, 1909) modifizierte Mechanik; im Anschluß hieran wird angenommen, daß die auftretenden Kräfte sich aus vierdimensionalen Vektoren ableiten. Den Kraftbegriff, den der Verf. früher in Abweichung von Abraham vertreten hat (Phys. Zs. **11**, 440, 1910), gibt er jetzt auf, weil derselbe mit der Planckschen Relativitätstheorie nicht vereinbar ist, wie Abraham gezeigt hat (Phys. Zs. **11**, 527, 1910). Durch Benutzung des Abrahamschen Kraftbegriffs soll aber keine bestimmte Ansicht über die Richtigkeit des einen oder des anderen der beiden Begriffe ausgesagt werden. Während Planck (F. d. M. 38, 718, 1907) die Mechanik für Körper, die unter einem allseitigen Normaldruck stehen, in thermodynamischer Hinsicht behandelt, zeigt der Verf., daß sich durch rein mechanische Betrachtungen Schlüsse über das Verhalten solcher Körper ziehen lassen. Setzt man $u = ict$ und führt neben den Gleichungen in der üblichen Bezeichnung $X_y = Y_x$, $X_z = Z_x$ ebenso ein $X_u = U_x$ usw., so ist die einfachste Annahme, bei der durch eine Lorentz transformation der Normaldruck p sich nicht ändert, $U_u = -p$. Diese Annahme, auf der die Betrachtungen beruhen, bedeutet „keine Spezialisierung der Theorie, sondern nur eine Spezialisierung der Begriffe“. Lp.

Lémeray. Le principe de relativité et les forces qui s'exercent entre corps en mouvement. C. R. **152**, 1465-1468, 1720.

„Die Transformation, zu der Lorentz geführt ist, um den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes dieselbe Form zu geben, wenn das betrachtete Feld in Ruhe oder in Bewegung ist, kann unter Absehung von jeder Annahme über den Mechanismus der Phänomene und von jeder elektrischen Theorie als notwendige Forderung aufgestellt werden, wenn man das Relativitätsprinzip zugibt und die Unveränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume; da diese Ausdrücke den Begriff der absoluten Bewegung in sich schließen, lassen wir auch die Existenz des Äthers einzig als Marke zu.“

„Die auseinandergesetzte Methode (und es kann keine andere von denselben Postulaten ausgehende geben) ermöglicht die Herleitung der Grundgesetze mit Ausnahme der von der beschleunigten Bewegung herrührenden Induktion (variabler Strom in einem festen Stromkreise), die ein Zurückgreifen auf den Versuch verlangt. Sie zeigt, daß keine anderen Kräfte zwischen Körpern in gleichmäßiger Bewegung bestehen können. Ihre Schlüsse finden auf die neutralen Körper Anwendung, wenn sie überdies durch eine unveränderliche skalare Größe charakterisiert werden können. Sie sind unabhängig von der Rolle des Äthers als eines vermittelnden Agens.“ Lp.

H. Donaldson and G. Stead. The problem of uniform rotation treated on the principle of relativity. Phil. Mag. (6) **21**, 319-324.

Im Anschluß an die vorjährige Veröffentlichung (F. d. M. **41**, 802, 1910) unternehmen die Verff. den Nachweis, „daß die becherförmige Gestalt der rotierenden Scheibe eine sehr nützliche Methode zur Veranschaulichung der Prozesse gibt, die während der Rotation zufolge der Relativitätshypothesen eintreten.“ Sie kommen zu dem Schlusse, ihre Untersuchung zeige, „daß die Relativitätstheorie keine Widersprüche enthält, wenn sie auf den Fall gleichmäßiger Rotation angewandt wird, und daß der Fall gleichmäßiger Rotation eine ganz gründliche und direkte Methode liefert, um von Längeneinheiten zu Zeiteinheiten überzugehen, indem sie nur auf der Tatsache beruht, daß eine Zahl keine Dimensionen in Masse, Länge oder Zeit besitzt. Andererseits zeigt die für die Scheibe mögliche maximale kinetische Energie die Notwendigkeit für irgendwelche Änderung an Masse, obwohl sie doch nicht irgendein Resultat gibt, das einzig durch den Relativitätswechsel der Masseneinheit befriedigt wird.“ Lp.

W. F. G. Swann. The problem of the uniform rotation of a circular cylinder in its connexion with the principle of relativity. Phil. Mag. (6) **21**, 342-348.

Mit den Ansichten von Ehrenfest (F. d. M. **10**, 931, 1909) sowie von Stead und Donaldson ist der Verf. nicht ganz einverstanden. Doch versucht er in dem vorliegenden Aufsatze zu zeigen, daß keine prinzipielle Schwierigkeit bei der Frage vorhanden sei, insofern ihre Anwendung auf gewöhnliche Materie in Betracht kommt, und daß tatsächlich die anscheinenden Unstimmigkeiten aus der Vernachlässigung der Betrachtung sämtlicher beteiligten Erscheinungen entstehen. „Wenn wir zur Betrachtung von Bewegungsaufgaben von anderer Art kommen als bei der geradlinigen Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit, kann und wird es sicherlich in Wirklichkeit geschehen, daß die endgültige Sachlage nicht bloß von der dem System erteilten Bewegung abhängt, sondern auch von den Bewegungen, welche die Elektronen in dem ruhenden System hatten.“ Der letzte Teil des Artikels beschäftigt sich mit der Art, wie Sir Joseph Larmor die gleichförmige translatorische Bewegung behandelt, in ihrer Anwendung auf das Problem gleichförmiger Rotation.

Lp.

Anton Wassmuth. Über die Invarianz eines das kinetische Potential enthaltenden Ausdruckes gegen eine H. A. Lorentztransformation. Wien. Ber. **120**, 543-550.

Es sei $q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, H das kinetische Potential, V das Volumen, T die Temperatur, p der Druck, S die Entropie, $G = \partial H/\partial q$ die Bewegungsgröße (Komponenten G_x, G_y, G_z), $u = \sqrt{c^2 - q^2}$, so ist für eine Lorentz-Transformation:

$$udt = u'dt',\quad Hdt = H'dt',\quad Vdt = V'dt',$$
$$Tdt = T'dt',\quad Edt - G_x dx = E'dt' - G'_x dx',$$
$$p = p',\quad S = S',\quad G_y = G'_{y'},\quad G_z = G'_{z'},$$
$$H/u = H'/u',\quad Gu/q = G'u'/q' \text{ usw.}$$

Unter diesen Invarianzen ist die Plancksche $H/\sqrt{c^2 - q^2} = H'/\sqrt{c^2 - q'^2}$ wohl die wichtigste; sie gestattet, das kinetische Potential (und somit alle Zustandsgrößen) als Funktion von q, V und T anzugeben, sobald es für die Geschwindigkeit 0 als Funktion von Temperatur und Volumen bekannt ist.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß man zu neuen Invarianzen gelangt, wenn man die angeführten in bestimmter Weise variiert. Diese Bedingungen sind:

I. Es muß auch die Zeit variiert werden:

$$\delta \frac{d\psi}{dt} = \delta\dot{\psi} = \frac{d\delta\psi}{dt} - \dot{\psi}\frac{d\delta t}{dt};$$

außerdem muß

II. falls nach Helmholtz die Temperatur $T = \varepsilon$, d. i. gleich einer zyklischen Geschwindigkeit genommen wird, die Variation so stattfinden, daß $d\delta\varepsilon = d\delta\varepsilon'$ bleibt. Werden diese Bedingungen erfüllt, so findet man:

$$\delta[u.dt] = \delta[u'.dt'],\quad \delta[T.dt] = \delta[F'.dt'],\quad \delta[V.dt] = \delta[V'.dt'],$$
$$\delta[H.dt] = \delta[H'.dt'],\quad \delta[H/\sqrt{c^2 - q^2}] = \delta[H'/\sqrt{c^2 - q'^2}].$$

Die gewonnene Erkenntnis steht in engstem Zusammenhange mit der Form des Prinzips der kleinsten Aktion aus der auf S. 751 besprochenen Arbeit des Verf.:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(H.dt) + E.d\delta t + \delta U.dt] = 0,$$

so daß also zu dem invarianten Teile $\delta(H.dt)$ noch die Summe $E.d\delta t + \delta U.dt = \delta(E.dt)$, die nicht invairant ist, hinzutritt. Für die rein mechanischen Probleme wird $H = 2L + E$ und das invariante $Hdt = G_x dx + G_y dy + G_z dz + Edt$, dessen Variation ebenfalls invariant ist. Lp.

R. C. Tolman. Note on the derivation from the principle of relativity of the fifth fundamental equation of the Maxwell-Lorentz-theory. Phil. Mag. (6) **21**, 296-301.

Es wird gezeigt, daß die fünfte Fundamentalgleichung ohne weitere Hypothesen aus den Feldgleichungen und den Gleichungen der Relativitätstheorie ableitbar ist. Br.

R. C. Tolman. Non-Newtonian mechanics. The direction of force and acceleration. Phil. Mag. (6) **22**, 458-463.

„Für die nicht-Newtonsche Mechanik wird nachgewiesen, daß eine Kraft und die von ihr erzeugte Beschleunigung im allgemeinen nicht in derselben Richtung liegen. Eine entscheidende Beziehung wird abgeleitet, welche die Kraftkomponenten parallel und senkrecht zur Beschleunigung verbindet. Für ein spezielles Problem hat die Anwendung dieser Beziehung einen scheinbaren Widerspruch beseitigt zwischen den Voraussagungen, die sich auf die elektromagnetische Theorie stützten, und solchen, die auf das Relativitätsprinzip zurückgingen." Lp.

P. S. Epstein. Über relativistische Statik. Ann. der Phys. (4) **36**, 739-795.

„Erst ganz neuerdings ist die relativistische Statik von Laue erörtert worden (Ann. der Phys. (3) **35**, 524; Referat S. 725); die in der vorliegenden Mitteilung entwickelte Auffassung ist von der Laueschen wesentlich verschieden und kann als Ergänzung derselben betrachtet werden. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen für einen relativ zum betrachteten System beliebig bewegten Beobachter sind in den §§ 2 und 3 formal abgeleitet, während § 1 eine physikalische Erklärung dieser Verhältnisse gibt."

§ 1. Der gebrochene Hebel von Lewis und Tolman. § 2. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung in der Relativitätstheorie. „Es besteht Gleichgewicht um eine von einem beliebigen Bezugssysteme festgelegte Achse, wenn in der Welt die Summe der Drehmomente aller Kräfte in der zu dieser Achse und zur Weltlinienrichtung ihrer Angriffspunkte senkrecht gelegten Ebene verschwindet." § 3. Der Sechservektor des Drehmomentes. § 4. Anhang: Impulssatz und Massentransformation. Der Verf. geht auf das Gedankenexperiment von Lewis und Tolman ein, das dazu dienen soll, die Transformationsformel der Masse aus dem Impulssatze herzuleiten. Das dabei gefundene Resultat wird gegen die Anzweifelung von N. Campbell in Schutz genommen. Lp.

F. Jüttner. Die Gesetze des Stoßes in der Lorentz-Einsteinschen Relativtheorie. S. A. Jahresber. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1911, 6 S.

Es seien: m die Ruhemasse eines Punktes, u seine Geschwindigkeit, $m\mathfrak{x}$ sein Impuls, $\mathbf{L}$ seine lebendige Kraft, so ist

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{L} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Für die beiden einander stoßenden Punkte seien die bezüglichen Größen durch die Zeiger 1 und 2 unterschieden, für den Zustand nach dem Stoße durch zuge-

fügte Akzente. Die Bewegung erfolge in der x-Achse eines ruhenden Koordinatensystems. Durch Anwendung der Prinzipien von der Erhaltung der Bewegungsgröße und der lebendigen Kraft folgen die Gleichungen

$$(2) \qquad m_1 \mathfrak{x}_1 + m_2 \mathfrak{x}_2 = m_1 \mathfrak{x}_1' + m_2 \mathfrak{x}_2', \quad \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1' + \mathbf{L}_2'.$$

Setzt man $u/c = \mathfrak{Tg}\,\eta$, so wird aus (1) $\mathfrak{x} = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta$, $\mathbf{L} = mc^2\,\mathfrak{Cof}\,\eta$, und die Gleichungen (2) gehen über in

$$(4) \qquad \begin{cases} m_1 \mathfrak{Sin}\,\eta_1 + m_2 \mathfrak{Sin}\,\eta_2 = m_1 \mathfrak{Sin}\,\eta_1' + m_2 \mathfrak{Sin}\,\eta_2', \\ m_1 \mathfrak{Cof}\,\eta_1 + m_2 \mathfrak{Cof}\,\eta_2 = m_1 \mathfrak{Cof}\,\eta_1' + m_2 \mathfrak{Cof}\,\eta_2'. \end{cases}$$

Durch Auflösung von (4) folgt

$$(5) \qquad \begin{cases} \eta_1' = 2\zeta - \eta_1, \quad \eta_2' = 2\zeta - \eta_2, \\ \mathfrak{Tg}\,\zeta = \dfrac{m_1 \mathfrak{Sin}\,\eta_1 + m_2 \mathfrak{Sin}\,\eta_2}{m_1 \mathfrak{Cof}\,\eta_1 + m_2 \mathfrak{Cof}\,\eta_2}. \end{cases}$$

Aus (5) lassen sich nun u_1' und u_2' leicht explizit finden. Sind u_1 und u_2 klein gegen c, so erhält man hieraus die bekannten Formeln des Stoßes. Außer diesem Wege zur Aufstellung der Formeln zeigt der Verf. einen anderen, der auf der Benutzung der von H. Poincaré entdeckten Analogie zwischen der relativ theoretischen Physik und der Invariantentheorie des hyperbolischen vierdimensionalen Raumes mit den reellen Koordinaten x, y, z und $l = ct$ beruht.

Lp.

E. Wiechert. Relativitätstheorie und Äther. Physik. Zs. 12, 689-707, 737-758.

„Auch mir scheint es sehr wohl möglich, daß die schönen Relativitätsgesetze in einem gewissen Umfang der Wirklichkeit entsprechen könnten; ja, ich glaube, daß nach den Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit dafür sehr groß ist. Ich bin aber der Meinung, daß diese Gesetze nicht nur nicht gegen die Ätherhypothese sprechen, sondern gerade umgekehrt sehr wichtige neue Anzeichen für das Bestehen des Äthers bringen. Das zu zeigen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Im folgenden werde ich demgemäß die Gültigkeit der Relativitätsgesetze, wenigstens bei Ausschluß der Gravitation, annehmen. In den Gesetzen wird jedoch nicht ein grundlegendes Prinzip für das Weltgeschehen gesehen werden, sondern nur eine innerhalb gewisser Grenzen gültige Folge der Verkettung von Äther und sinnlich wahrnehmbarer Materie."

Inhaltsübersicht. § 1. Vorwort. I. Mathematische Vorbereitungen. § 2. Bezeichnungen. § 3. Lorentz-Transformation. § 4. Eigenzeit und Punktmechanik. § 5. Kontinuum. § 6. Ausbreitung von Erregungen. § 7. Elektrodynamische Probleme. II. Relativitätsprinzip, Äther, Raum-Zeit-Anschauung. § 8. Relativitätsprinzip gegen Äther. § 9. Relativitätsgesetze. § 10. Vorbemerkungen über die Begriffe von Raum und Zeit. § 11. Raum-Zeit-Systeme. § 12. Scheinbare Längenänderungen bei Änderungen der Schreitung. § 13. Symmetrische Raum-Zeit-Systeme. § 14. Gruppe der symmetrischen Raum-Zeit-Systeme. § 15. Grenzschreitungen, Äther. § 16. Schreitung und Geschwindigkeit des Geschehens. § 17. Elektrodynamische

Erscheinungen. § 18. Grenzen der Relativitätsgesetze. § 19. Äther und Materie. § 20. Relativitätsgesetze und Raum-Zeit-Systeme. § 21. Physikalische Gleichzeitigkeit. § 22. Raum-Zeit-Vorstellung.

„Schreitung: Bewegungszustand, der durch einen sich völlig selbst überlassenen materiellen Punkt angezeigt wird, der also frei von Beschleunigungen ist. Schreitungen an verschiedenen Orten sind ‚gleich', wenn bei gleichförmiger Andauer keine relativen Verschiebungen eintreten."

Ergebnis. Die Fortpflanzung des Lichtes (d. h. der elektrodynamischen Erregungen) im Raume frei von sinnlich wahrnehmbarer Materie erfolgt in einem System von Schreitungen, welches unseres Wissens unabhängig ist von der Materie und ihren Bewegungen.

Wird die Gültigkeit der Relativitätsgesetze angenommen, so müssen in den elektrodynamischen Schreitungen zugleich Grenzschreitungen für das Verhalten der Materie gesehen werden. Bei allen uns bekannten Naturerscheinungen scheint die Materie gebunden an den Verbleib innerhalb des Gebietes, welches durch die elektrodynamischen Schreitungen abgegrenzt wird. Es muß angenommen werden, daß beim Herangehen der Schreitung eines Körpers an die Grenzen dieses Gebietes die Teile des Körpers immer mehr flächenhaft zusammenrücken und alle physikalischen Vorgänge in ihm ohne Grenzen verzögert werden. Für die Beurteilung dessen, was mit der Materie geschieht, wenn die Grenzen des Gebiets überschritten werden, fehlt heute noch jeder Anhalt. —

Das System der genannten Schreitungen erscheint in Raum und Zeit absolut gegeben. Zur Erklärung dafür muß etwas Gegenständliches angenommen werden, was von der sinnlich wahrnehmbaren Materie unterschieden werden kann: der „Äther". Gelten die Relativitätsgesetze, so folgt, daß die sinnlich wahrnehmbare Materie mit diesem Äther noch inniger verkettet ist, als dieses schon aus den elektrodynamischen Wechselbeziehungen gefolgert werden kann.

Lp.

J. Kroó. Über den Fundamentalsatz der statistischen Mechanik. Ann. der Phys. (4) **34**, 907-935.

Im XII. Kapitel der statistischen Mechanik stellt Gibbs das Theorem auf: „Eine statistische Gesamtheit von mechanischen Systemen konvergiert mit der Zeit im allgemeinen gegen statistisches Gleichgewicht, sofern sie sich nicht im statistischen Gleichgewicht befindet." Gibbs hat diesen Fundamentalsatz der statistischen Mechanik weder präzisiert, noch allgemein oder nur für spezielle Fälle bewiesen. Dennoch macht er von ihm ausgiebigen Gebrauch, namentlich in seiner mechanischen Theorie der irreversiblen dynamischen Prozesse, in welcher der Satz eine fundamentale Rolle spielt. L. Silberstein hat die Gültigkeit dieses Satzes angefochten (F. d. M. **37**, 724, 1906), wie auch Zermelo in der Anzeige seiner Übersetzung des Gibbsschen Werkes (Jahresber. d. D. Math.-Ver. **15**, 239) Einwände gegen ihn erhebt. Silberstein behauptet, daß der anfängliche Charakter der Verteilung erhalten bleibt und somit eine statistische Gesamtheit keine Tendenz zur Annäherung an einen Zustand des statistischen Gleichgewichts aufweist. Diesen Resultaten pflichtet der Verf. des vorliegenden Aufsatzes nicht bei. Er zeigt nämlich, daß einer statistischen Gesamtheit von mechanischen Systemen,

welche sich gewissen Forderungen fügen, die von Gibbs behauptete Tendenz doch zukommt.

§ 1. Grundbegriffe und Grundgleichungen der statistischen Mechanik. § 2. Eindeutigkeitssatz und Stabilitätssatz. § 3. Der Fundamentalsatz für mechanische Systeme von einem Freiheitsgrade. § 4. Das reduzierte Problem. § 5. Die Entropie. § 6. Beispiele. § 7. Der Fundamentalsatz für mechanische Systeme von n Freiheitsgraden. § 8. Weitere Beispiele. Lp.

F. Hasenöhrl. Über ein Theorem der statistischen Mechanik. Wien. Ber. **120**, 923-936.

„Nach J. W. Gibbs besitzt eine beliebige Gesamtheit mechanischer Systeme die Tendenz, in den Zustand des statistischen Gleichgewichts überzugehen. Dieser Satz wurde von Gibbs durch Heranziehung der Analogie mit der Mischung zweier Flüssigkeiten sehr plausibel gemacht. Einen einwandfreien Beweis für das Theorem hat Gibbs nicht gegeben. — Einen allgemein gültigen Beweis des Satzes zu erbringen, dürfte auf große Schwierigkeiten stoßen. Doch ist das Theorem so wichtig und interessant, daß es sich wohl lohnt, dasselbe wenigstens für eine, wenn auch sehr beschränkte Klasse mechanischer Systeme zu studieren. Für eine Gesamtheit von Systemen, welche eine periodische Bewegung ausführen, läßt sich nämlich das erwähnte Theorem leicht nachweisen. Allerdings werden gerade mechanische Systeme, die mit einem warmen Körper Ähnlichkeit haben können, kaum eine periodische Bewegung vollführen. Im Gegenteil wird man meist annehmen, daß die Bahnkurve (im $2n$-dimensionalen Raume) nicht geschlossen ist, daß sie mehrfache Mannigfaltigkeiten des polydimensionalen Raumes bedeckt. Andererseits erscheint mir auch die Zulässigkeit der extrem entgegengesetzten Annahme, daß die Bahnkurve die ganze Energiefläche bedeckt, wodurch die mikrokanonische Gesamtheit zu einer Zeitgesamtheit wird, einer eingehenden Prüfung zu bedürfen."

Die dasselbe Thema behandelnde Arbeit von Kroò (Referat vorstehend) konnte vom Verf. nicht mehr berücksichtigt werden. Lp.

H. Lorenz. Die Theorie in der Technik mit besonderer Berücksichtigung der Entwicklung der Kreiselräder. Festrede gehalten zum Geburtstage des Kaisers am 27. Januar 1911 in der Techn. Hochschule zu Danzig. Physik. Zs. **12**, 185-191.

Dem Zwecke entsprechend entwickelt die Rede in leicht verständlicher Sprache an historischen Beispielen die wechselseitige Einwirkung zwischen Theorie und Technik; zuletzt wird besonders auf die Entwicklung der Theorie der Kreiselräder eingegangen. „Es lohnt sich schon, mit allen Mitteln volle Klarheit zu gewinnen nicht nur über die Arbeitsweise der ganzen Maschine und der in ihr wirksamen Körper, sondern auch über das Verhalten der Einzelteile unter allen möglichen Betriebsbedingungen. Das leistet aber nur eine auf breiter empirischer Grundlage ruhende exakte Theorie". Lp.

Weitere Literatur.

P. Appell. Traité de mécanique rationnelle. 3e édition entièrement refondue. Tome 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars. 566 S. 8°.

P. Blancarnoux. Toute la mécanique rationnelle et appliquée à la portée de tous. Deux tomes. Paris: Geisler. 120, 172 S. 8°.

P. Blancarnoux. Toute la mécanique rationnelle et appliquée à la portée de tous. Panorama méthodique et complet en 12 volumes. Tome 3: Cinétique. Paris: Geisler. 156 S. 8°.

P. Blancarnoux. Toute la mécanique rationnelle et appliquée à la portée de tous. Panorama méthodique et complet en 12 volumes. Tome 4: Résistance des matériaux. Tome 5: Générateurs de vapeur. Paris: Geisler. 174, 156 S. 8°.

F. Castellano. Lezioni di meccanica razionale. 2a edizione. Torino: Cassone. VII u. 462 S. 8°.

A. Flamant. Mécanique générale. 2me édition, revue et augmentée. Paris: Béranger. 620 S. 8°. (Collection Lechalas.)

E. Gabriel. Mécanique théorique et pratique. Tome premier: Cinématique théorique et pratique, statique théorique. Tome 2: Statique pratique, dynamique théorique et pratique. Paris: Poussielgue. XXXII u. 334, XV u. 393 S. 8°.

A. Gray and J. Gordon. A treatise on dynamics. New York: Macmillan. XVI u. 626 S. 12mo.

L. Guillot. Cours de mécanique, rédigé conformément aux programmes des Écoles nationales d'arts et métiers. Tome I: Principes et théorèmes généraux de la mécanique. Statique graphique. Résistance des matériaux. Tome II: Mécanique spéciale des fluides. Hydraulique. Thermodynamique. Air comprimé. Paris: Béranger. 432, 353 S. 8°.

S. C. Haret. Mécanique sociale. Paris: Gauthier-Villars. 256 S. 8°.

H. v. Helmholtz. Vorlesungen über theoretische Physik. Hrsg. v. Arth. König, O. Krigar-Menzel, Frz. Richarz, C. Runge. I. Bd. II. Abt. Vorlesungen üb. d. Dynamik diskreter Massenpunkte. Hrsg. v. O. Krigar-Menzel. 2. Aufl. Leipzig: J. A. Barth. XI, 380 S. 21 Fig. Lex. 8°.

W. M. Hooton and A. Mathias. A preliminary course of mechanics and physics. London: Clive. 156 S. 8°.

L. M. Hoskins. Theoretical mechanics, an elementary text-book. 4th edition. Stanford University Cal.: Hoskins. XI u. 456 S. 8°.

J. M. Jameson. Elementary practical mechanics. 2nd edition. New York: Longmans. XII u. 321 S. 12mo.

A. Jamieson. A textbook of applied mechanics and mechanical engineering. Volume I: Applied mechanics. Volume II. Strength of materials. Volume III. 8th edition, revised. London: Griffin. 418, 322, 278 S. 8°.

C. E. Inglis. Examples in applied mechanics and elementary theory of structures. London: Cambridge University Press. 82 S. 8⁰.

C. Levi. Trattato teorico-pratico di costruzioni civili, rurali, stradali ed idrauliche. Vol. I. 2ª edizione. Milano: Hoepli. XV u. 707 S. 8⁰. (Biblioteca tecnica.)

G. Maggi. Dinamica fisica. Lezioni sulle leggi generali del movimento dei corpi naturali. Pisa. 230 S. 8⁰.

L. Martin. Text-book of mechanics. Volume 3. Mechanics of materials. New York: Wiley. 229 S. 12mo.

A. Morley. Mechanics for engineers. Third edition. New York: Longmans. XI u. 290 S. 12mo.

A. Morley and W. Inchley. Elementary applied mechanics. With 285 diagrams, numerous examples and answers. London: Longmans, Green and Co. VIII u. 382 S. 8⁰. [Nature **88**, 75; Math. Gaz. **6**, 230, 1912.]

C. N. Offley. Engineering mechanics. Annapolis: United States Naval Institute.

G. Papelier. Précis de mécanique. Paris: Vuibert. VII u. 248 S. 8⁰.

G. W. Parker. Elements of mechanics, with numerous examples for the use of schools and colleges. London: Longmans, Green and Co. XII u. 246 S. [Nature **88**, 207-209, 1911.]

A. Poussart. Traité élémentaire de mécanique. Mécanique théorique et mécanismes. Paris: Garnier. III u. 504 S. 18mo.

J. Roumajou. Mécanique. Paris: Delagrave. VII u. 396 S. 18mo. (Bibliothèque des écoles pratiques de commerce et d'industrie.)

J. Roumajou et E. Silvestre. Mécanique, d'après les programmes officiels du 27 juillet 1909. Paris: Delagrave. VII u. 411 S. 18mo.

G. Rousier et E. Guerby. Cours de mécanique. Paris: Hatier. 260 S. 12mo.

G. K. Suslov. Elemente der analytischen Mechanik. Bd. 1, Teil 2: Dynamik des Massenpunktes. Kiew. 155 S. 8⁰. (Russisch.)

Vasnier. Cours de mécanique. 1re partie: Statique. 6e édition. Paris: 240 S. 8⁰.

Ferd. Wittenbauer. Aufgaben aus der technischen Mechanik. 1. Band. Allgemeiner Teil. 773 Aufg. nebst Lösungen. 2. verb. Auflage. Berlin: Springer. XI u. 301 S. 8⁰.

A. Ziwet and P. Field. Introduction to analytical mechanics. New York: Macmillan. 376 S. 12mo.

A. Dittrich. Einfluß des Relativitätsprinzipes auf die Form von Gleichungen des Vektorfeldes. Časopis **40**, 574-585. (Böhmisch.)

O. Dziobek. Das Relativitätsprinzip in der reinen Phoronomie. Prometheus **22**, 417-422.

Ph. Frank. Das Relativitätsprinzip und die Darstellung der physikalischen Erscheinungen im vierdimensionalen Raum. Ann. der Naturphilos. **10**, 129-162.

H. Poincaré. Die neue Mechanik (Sonderabdruck aus „Himmel und Erde“ **23**). Leipzig: B. G. Teubner. 22 S. 8°.

A. A. Robb. Optical geometry of motion. A new view of the theory of relativity. London: Heffer. 36 S. 8°.

V. Volterra. Espacio, tiempo i massa según las ideas modernas. Anales Soc. cient. Argentina **70**, 223-283. Übersetzt aus dem Italienischen.

Kapitel 2.

Kinematik.

R. Mehmke. Beiträge zur Kinematik starrer und affin veränderlicher Systeme, insonderheit über die Windung der Bahnen der Systempunkte. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 204-220, 440-442.

Über den Anfang dieser Abhandlung ist in F. d. M. **41**, 774, 1910, referiert. Das Hauptergebnis, das damals schon in Nr. 1 mitgeteilt war, wird jetzt neben den anderen im ersten Teile ausgesprochenen Resultaten bewiesen. Zu jeder Lage des bewegten Systems gehört bekanntlich eine Raumkurve dritter Ordnung, die „Wendekurve“, deren Punkte augenblicklich Wendepunkte in ihren Bahnen durchlaufen. Durch einen beliebigen Systempunkt x läßt sich eine einzige Gerade ziehen, welche die Wendekurve in zwei Punkten a, b trifft, der durch x gehende „Wendestrahl“. Es gibt bekanntlich auch eine gewisse, durch die Wendekurve gehende Fläche dritter Ordnung, deren Punkte augenblicklich Bahnstellen mit stationärer Schmiegungsebene durchlaufen. Der Wendestrahl durch x schneide sie außer in a und b noch in c. Für die „Windung“ w der Bahnstelle, die der Systempunkt x augenblicklich beschreibt, hat der Verf. 1890 den Ausdruck gefunden $w = \gamma \frac{cx}{ax.\,bx}$, wo γ nur von der Richtung des Wendestrahls abhängt. Jetzt wird die Größe $\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ betrachtet (dt = Zeitelement, ds = Bahnelement, $d\tau$ Kontingenzwinkel zweier Tangenten, $d\vartheta$ zweier Schmiegungsebenen). Diese Größe ist gleich der Binormal-Komponente der Überbeschleunigung (Geschwindigkeit dritter Ordnung) und diese „Binormal-Überbeschleunigung“ wird durch $\beta.\,cx$ ausgedrückt, wo der Zahlfaktor β wieder nur von der Richtung des Wendestrahls abhängt. Als entsprechende Größe kann in der Ebene die Normalbeschleunigung $v^2/\varrho = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt}$ angesehen werden ($= \alpha.\,cx$). Sonderfälle und Ausdehnung auf Räume von beliebig vielen Dimensionen bilden den weiteren Inhalt der Mitteilung. In dem vorliegenden zweiten Teile werden mit Hülfe der Vektorenrechnung die Beweise gegeben zuerst für die Bewegung in der Ebene, dann für die im Raume nebst der zugehörigen Konstruktion des Wendestrahls und der ausgezeichneten Punkte in ihm. Dann folgt die Betrachtung der Binormal-Überbeschleunigung, der Wendepotenz und Windung, gewisser Hülfsflächen, besonderer Lagen des Wendestrahls und des Falles eines starren Punktsystems. Lp.

M. KRAUSE. Zur Theorie der affin veränderlichen ebenen Systeme. Leipz. Ber. **63**, 271-288.

Die Arbeit knüpft an die Untersuchungen von Burmester über die affin veränderlichen Systeme an. Sie benutzt durchweg analytische Methoden. In der Tat liegt es nahe, von den einfachen Gleichungen für die Bewegung eines affin veränderlichen Systems

$$x = a_0 + a_1\xi + a_2\eta,\ \ y = b_0 + b_1\xi + b_2\eta,$$

in denen die Koeffizienten Funktionen der Zeit sind, auszugehen. Nachdem der momentane Pol der Bewegung und die durch den Pol hindurchgehenden selbstentsprechenden Geraden gefunden sind, werden die Bewegungsgleichungen normiert unter der Voraussetzung, daß die Richtungen der selbstentsprechenden Geraden gegeben sind, und dann werden insbesondere die einförmigen Systeme behandelt, bei denen die selbstentsprechenden Geraden und damit auch der Pol fest sind. Darauf werden insbesondere solche Punkte betrachtet, die ähnliche Bewegungen ausführen, und die bereits von Burmester gefundenen Sätze durch mehrere analytische Theoreme ergänzt. Zum Schluß werden noch einige Sätze über die Einhüllenden gerader Linien abgeleitet. Tdg.

M. KRAUSE. Über räumliche Bewegungen mit ebenen Bahnkurven. Leipz. Ber. **63**, 515-533.

Der Verf. betrachtet zunächst affin veränderliche räumliche Systeme, indem er von den Gleichungen ausgeht:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \\ y &= b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z &= c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta. \end{aligned}$$

Er findet, daß alle Punkte ξ, η, ζ im allgemeinen dann und nur dann ebene Bahnkurven beschreiben, wenn die Koeffizienten a, b, c der Bewegungsgleichungen sich als lineare Funktionen zweier willkürlichen Funktionen von t mit konstanten Koeffizienten darstellen lassen. Indem er dann nach Erledigung einiger speziellen Fälle zu starren räumlichen Bewegungen übergeht, erhält er das Resultat, daß, wenn alle Punkte ebene Bahnkurven beschreiben, die Koeffizienten $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon$ $(\varepsilon = 1, 2, 3)$ im allgemeinen von der Form sein müssen:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon &= (\varkappa_\varepsilon\alpha_1 + \lambda_\varepsilon\alpha_2)\cos t + (\varkappa_\varepsilon\alpha_2 - \lambda_\varepsilon\alpha_1)\sin t + \mu_\varepsilon\alpha_3, \\ b_\varepsilon &= (\varkappa_\varepsilon\beta_1 + \lambda_\varepsilon\beta_2)\cos t + (\varkappa_\varepsilon\beta_2 - \lambda_\varepsilon\beta_1)\sin t + \mu_\varepsilon\beta_3, \\ c_\varepsilon &= (\varkappa_\varepsilon\gamma_1 + \lambda_\varepsilon\gamma_2)\cos t + (\varkappa_\varepsilon\gamma_2 - \lambda_\varepsilon\gamma_1)\sin t + \mu_\varepsilon\gamma_3, \end{aligned}$$

wobei die von t unabhängigen Größen $\varkappa, \lambda, \mu$ und α, β, γ selbst die Koeffizienten zweier orthogonalen Substitutionen sind. Tdg.

C. SPELTA. Su una figura rigida piana soggetta a due movimenti. Rivista fis., mat. e sc. nat. **23**, 142-148.

Anwendung goniometrischer Formeln auf die Untersuchung der Bewegung einer in einem beweglichen Systeme befindlichen starren Figur. Vgl. die früheren Schriften des Verfassers: Batt. G. **48**, 37-45; Periodico di Mat. (3) 8, 30-34; F. d. M. **41**, 772 u. 1049, 1910. Vi.

A. Carl. Über höhere Rückkehr- und Wendepole. Diss. Jena 144 S. 8°.

Die Arbeit schließt sich an die Untersuchung von M. Krause (Archiv der Math. u. Phys. (3) **16**; F. d. M. **41**, 774, 1910,) an, der die von Reinh. Müller (Zs. f. Math. u. Phys. **42**, 247-271; F. d. M. **28**, 627, 1897) begründete Theorie der höheren Pole auf eine analytische Basis stellte, wodurch er zu der expliziten Darstellung ihrer Koordinaten gelangte. Zuerst wird die allgemeine Theorie in Punkt-, Linien- und Weinmeisterschen polaren Linienkoordinaten bis zur expliziten Schlußformel ausführlich entwickelt. Sodann werden die Bahnen der höheren Pole bei speziellen Bewegungen, die durch die beiden Polkurven gegeben sind, untersucht (1. Die Polkurven sind zwei Kreise. 2. Polbahn Gerade, Polkurve Kreisevolvente. 3. Beide Polkurven Kreisevolventen). Hierbei gelingt es wieder, die explizite Darstellung an die Stelle der von Müller gegebenen Rekursionsformeln zu setzen. Im umfangreichsten dritten Kapitel werden Bewegungen für spezielle Lagen der höheren Pole untersucht: 1. Sämtliche Wende- und Rückkehrpole liegen auf einer Geraden durch den Pol. 2. Sämtliche Wende- und Rückkehrpole vom n-ten ab liegen auf einer Geraden (speziell $n = 1$). 3. Sämtliche geraden und sämtliche ungeraden Pole vom n-ten ab liegen auf je einer Geraden. 4. Sämtliche Pole vom n-ten ab liegen nach dem Modul k auf k Geraden verteilt. Sk.

L. Burmester. Konstruktionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen. Münch. Ber. **41**, 463-488.

Da bei komplizierten Mechanismen (Steuerungen von Lokomotiven und Dampfmaschinen) in einzelnen Gliedern sehr große Beschleunigungen auftreten können und damit störende und den Mechanismus gefährdende Kräfte, ist es zweckmäßig, vor der praktischen Ausführung die Beschleunigung der einzelnen Glieder bei verschiedenen Lagen am Entwurf zu konstruieren. Eine zweckmäßige Methode dafür anzugeben, ist das Ziel der Arbeit. Zuerst werden die bekannten einfachen konstruktiven Bestimmungen der Beschleunigungen eines ebenen Systems, dann die zweier drehpaarig oder richtpaarig verbundenen ebenen Systeme gegeben. Auf dieser Grundlage werden die Beschleunigungen eines dreifach geführten ebenen Systems konstruiert, und zwar zuerst, wenn es mit den drei führenden Systemen, deren Beschleunigungszustand bekannt ist, drehpaarig, sodann, wenn es mit zwei führenden Systemen drehpaarig, mit dem dritten richtpaarig verbunden ist. Endlich wird ein System betrachtet, das mit zwei Führungen drehpaarig verbunden ist, und von dem ein Punkt auf einer Geraden eines führenden Systems sich bewegt. Die Untersuchungsmethode ist rein synthetisch, und die Konstruktionen kommen im wesentlichen auf die Bestimmung des Doppelpunktes zweier konjektiven ähnlichen Punkt-

reihen hinaus oder auf einen geradlinigen geometrischen Ort. Die Ergebnisse werden auf Beispiele aus der Praxis angewandt. Sk.

G. Usai. Sul movimento di una particella piana soggetto a variazioni di curvatura. Periodico di Mat. (3), 8, 161-166.

„In der Abhandlung „Sui moti vorticosi nei fluidi perfetti" (Pisa Ann. 7; F. d. M. **26**, 876, 1895) hat Cornelia Fabri die Deformationen eines stetigen dreidimensionalen Mediums untersucht, wenn seinen Punkten Verrückungen beigelegt werden, die durch homogene Funktionen eines beliebigen Grades n der Koordinaten gegeben werden, und hat so die Untersuchungen von Helmholtz, Rowland und Boggio-Lera erweitert. In jener Abhandlung schreitet die Verfasserin nach zwei verschiedenen Zerlegungen der Formeln fort, welche die Verrückungen geben, je nachdem n ungerade oder gerade ist, und findet, daß die gesamte Verrückung aus drei Teilen besteht, deren erster ein Potential besitzt; der zweite kann im Falle eines ungeraden n als eine Rotation betrachtet werden und für ein gerades n als eine Biegung. Diese Verrückungen geschehen in senkrechten Ebenen, die durch eine sogenannte Achse der Rotation oder der Biegung gehen, je nachdem es sich um die erste oder die übrige Bewegung handelt. Was den dritten Teil betrifft, so wird dadurch eine ziemlich verwickelte, durch Vektoren nicht darstellbare Bewegung bestimmt. Eine analoge Untersuchung wird in der vorliegenden Note für ein ebenes Teilchen durchgeführt, das Verrückungen unterliegt, die es nicht krümmen. Hier zeigt sich der bemerkenswerte Umstand, daß man durch eine einzige Zerlegung zur Analyse der Bewegungen gelangt, sowohl für den Fall eines ungeraden n, als für den eines geraden, und außerdem sind die Verrückungen, auf die man stößt, sämtlich durch Vektoren darstellbar." Lp.

N. Joukowsky. Zurückführung des dynamischen Problems über eine kinematische Kette auf die Probleme über den Hebel. Moskau. Math. Samml. 28, 71-119. (Russisch.)

Der Verf. beginnt mit der Darlegung der Konstruktionsmethoden von Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplänen von Punkten einer kinematischen Kette, wobei für die Konstruktion der Beschleunigungspläne eine neue Methode vorgeschlagen wird. Er nennt Hülfshebel der gegebenen kinematischen Kette das statisch bestimmte Gebilde von der Gestalt eines Geschwindigkeitsdiagramms dieser Kette bei der Winkelgeschwindigkeit 1 eines gewissen Gliedes, welches als Hauptglied dieser Kette bezeichnet wird; hierbei erscheint als Stützpunkt der Pol dieses Diagramms.

Bezüglich des Hülfshebels erweist sich die Richtigkeit des folgenden Grundtheorems: Die Gleichgewichtsbedingung einer kinematischen Kette kann unter der Wirkung von Kräften, die sie angreifen, durch die Bedingung des Gleichgewichts eines Hülfshebels ersetzt werden, welcher Hebel sich unter der Beanspruchung gleicher und paralleler, an entsprechenden Punkten angreifender Kräfte befindet. Dabei sind die elastischen Kräfte in den Gliedern der Kette

gleich den elastischen Kräften in der Stange des Hülfshebels. Bei der weiteren Darlegung werden in Betracht gezogen die Kräfte der Trägheit der sich rasch bewegenden Kettenglieder und die in der Kette entstehenden Reibungskräfte. Die Aufgabe führt immer wieder auf die entsprechende Aufgabe über den Hülfshebel. Ebenso wird die Frage über die Stabilität des Gleichgewichts der kinematischen Kette gelöst. Jk.

G. Koenigs. Sur les mouvements de Ribaucour décomposables. Journ. de Math. (6) **7**, 349-352.

Die relative Lage zweier festen Körper S und S' hängt von 6 Parametern ab. Wenn zwischen den 6 Parametern eine gewisse Anzahl von Relationen besteht, so bilden die Körper ein „binäres System". Sind jene Relationen sämtlich endliche Gleichungen (keine Differentialgleichungen), und lassen sie l Parameter ($l < 6$) beliebig, so sagt man, das System habe die Freiheit l. Man stelle sich vor, es sei zwischen S und S' ein solcher Körper Σ einschaltbar, daß S und Σ ein binäres System von der Freiheit $\lambda < l$ bilden. Ebenso sei $S'\Sigma$ ein binäres System von der Freiheit $l - \lambda = \lambda'$. Dann sagt man, das binäre System SS' sei zerlegbar in die binären Systeme $S\Sigma$ und $S'\Sigma$. Der Verf. behandelt die Frage: In welchem Falle ist ein binäres System mit zwei Parametern (ein Ribaucour sches System) zerlegbar? Lp.

T. Quevedo. Construction mécanique de la liaison exprimée par la formule $d\beta/d\alpha = \text{tang}\,\omega$. C. R. **152**, 249-250.

Der vom Verf. erdachte Mechanismus kann bei den Planimetern, den Integratoren und allgemein bei der mechanischen Konstruktion der Integrale von Differentialgleichungen Anwendung finden. Als Vorzüge gibt der Verf. an: 1. Der Wert von $d\beta/d\alpha$ kann durch 0 und ∞ gehen. 2. Die Weite der Schwankung der Variabeln α und β ist unbegrenzt. — Seiner Anfertigung steht keine Schwierigkeit entgegen. Lp.

É. Delassus. Sur la distribution des vitesses dans un solide en mouvement. S. M. F. Bull. **39**, 159-162.

Es sei S ein System von Vektoren; jedem Punkte M des Raumes lasse man das Moment μ des Systems S in diesem Punkte entsprechen; das so entstandene Feld von Vektoren heiße „Feld der Momente des Systems S". Die Vektoren, welche zwei beliebigen Punkten entsprechen, haben eine nämliche Projektion auf der Geraden, welche die beiden Punkte verbindet (Bedingung der Momente). Umgekehrt gilt aber auch der Satz: Jedes Vektorfeld, das der Bedingung der Momente genügt, ist ein Feld der Momente. Hieraus werden mehrere Folgerungen gezogen. Lp.

L. Creux. Transformation du mouvement d'expansion en mouvement de rotation par la développante de cercle. C. R. **152**, 1372-1375.

Man denke sich eine Kreisevolvente; durch den Mittelpunkt O des zugehörigen Kreises und den Anfangspunkt A der Evolvente lege man eine Achse, die „Ursprungsachse". Wenn man in derselben Ebene eine ebensolche Evolvente O' konstruiert, deren Ursprungsachse zu der ersteren parallel, aber entgegengesetzt gerichtet ist, so kann man sie so führen, daß jede ihrer Spiralwindungen in zwei Punkten jede entsprechende Windung der anderen berührt. Indem nun über jeder der Evolventen durch Normalen zu ihrer Ebene Zylinder von derselben Höhe h errichtet werden, erhält man zwei Gefäße, mit deren Hülfe die „direkte Transformation der Expansionsbewegung in eine Rotationsbewegung unter Vermeidung der gewöhnlich unerläßlichen Zwischentransformationen" bewirkt wird. Die ideale Anwendung auf die Temperaturabnahme eines Gases durch Expansion wird zum Schlusse angedeutet. Lp.

M. Disteli. Über die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff. Zs. f. Math. u. Phys. 59, 244-298.

Die Bestimmung der Form von Zahnrädern reduziert sich bekanntlich bei zylindrischen Rädern auf ein ebenes und bei konischen Rädern auf ein sphärisches Problem. Man findet ebene und sphärische Epizykloiden, welche die Form der Zähne bestimmen; das ganze Problem wird so auf Aufgaben der theoretischen Kinematik, der allgemeinen Untersuchung der Bewegung eines ebenen Systems und der Drehung eines räumlichen Systems um einen festen Punkt, zurückgeführt. Wenn aber die Achsen der beiden Räder zueinander windschief sind, müssen sie aus Hyperboloidflächen ausgeschnitten werden; für die Kanten der Zähne (die Eingriffslinien) werden am einfachsten gerade Linien (Regelstrahlen der Hyperboloide) genommen, und es ist nun die Aufgabe, die fehlenden Begrenzungsflächen der Zähne (die Profilflächen) so zu bestimmen, daß, indem diese Flächen aufeinander schroten, die beiden Räder sich gleichmäßig weiterdrehen können. Als solche Profilflächen treten Regelflächen auf, die sich beständig längs eines Regelstrahles berühren (der Ort dieses Regelstrahles im ruhenden Raum ist jedesmal eine Schraubenfläche S, die Eingriffsfläche). Die Aufgabe der näheren Bestimmung aller auftretenden Flächen wird im ersten Teil der vorliegenden, sehr gründlichen Arbeit mit Hülfe der primären Axoide (der Grundhyperboloide und der Schraubenflächen S) erledigt, und hierbei wird von der allgemeinen Betrachtung der momentanen Bewegung eines starren räumlichen Systems ausgegangen. Die Gesamtheit aller momentanen Drehungen um die Achsen der beiden Räder bildet ein System von momentanen Schraubungen, deren Achsen ein Zylindroid (das Grundzylindroid) erfüllen. Im zweiten Teil, der die Darstellung der Verzahnung durch sekundäre Axoide bringt, wird von den Eulerschen Rotationsformeln ausgegangen. Als Probe des Inhaltes der Arbeit kann der Satz auf S. 286 dienen: „Unter allen geradlinigen Eingriffsflächen, welche die Grundhyperboloide längs ihrer Berührungskante X berühren, gibt es eine einzige, nämlich die gerade offene Schraubenfläche E, welche zu der auf X senkrecht stehenden Schraube des Grundzylinders gehört, welche zusammen mit dem Grundhyperboloid gleichzeitig sowohl das Paar primärer, als auch das Paar sekundärer Axoide darstellt. Dieses sekundäre Axoid E ist das einzige, welches außerdem exakte Eingriffsfläche usw. ist, und

das einzige, dessen sämtliche Erzeugende Profilflächen beschreiben, welche das Grundhyperboloid zum gemeinsamen sekundären Axoid haben."

Der exakten Verzahnung steht eine angenäherte zur Seite. Die Arbeit schließt mit der Entwicklung eines räumlichen Analogons zu der Savaryschen Formel und der daraus folgenden Konstruktion. Tdg.

J. Delemer. Expériences sur l'inertie de la matière dans le mouvement relatif. Brux. S. sc. (A) **34**, 241-246 (1910).

Relativbahnen einer reibungslos rollenden Kugel auf einer um eine vertikale Achse rotierenden schiefen Ebene oder auf einer Zylinderschale mit horizontaler Achse, aufgezeichnet auf berußtem Papier. Lp.

Weitere Literatur.

J. H. Barr and E. H. Wood. Kinematics of machinery. A brief treatise on constrained motion of machine elements. 2nd edition. New York: Wiley. VII u. 264 S. 8°.

K. Bleicher. Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenksysteme. Diss. Rostock. 75 S. 8° (1910).

L. Crelier. Systèmes cinématiques. Paris: Gauthier-Villars. 100 S. 8°. (Collection Scientia).

R. J. Durley. Kinematics of machines. An elementary textbook. London: Chapman & Hall; New York: Wiley. VIII u. 397 S. 8°.

R. Edelmann. Kinematik. Strelitz: Hittenkofer. 61 S. Lex. 8°.

C. Herbst. Ableitung der Zentripetalbeschleunigung für die gleichförmige Kreisbewegung. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 86.

Fr. C. G. Müller. Zur Ableitung der Zentrifugalformel. Poske Zs. **24**, 209-211.

D. A. Molitor. Kinetic theory of engineering structures. New York: Mc Graw: 366 S. 8°.

Kapitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

L. Henneberg. Die graphische Statik der starren Systeme. Leipzig: B. G. Teubner. XV u. 732 S. gr. 8°. (Teubners Sammlung Bd. **31**.)

Das Werk bezweckt, eine weitere Ausführung derjenigen Theorien zu bieten, über die der Enzyklopädieartikel des Verf. nur kurze Referate geben konnte; es schließt sich daher diesem Berichte in seinem Inhalt und in seiner Anordnung ziemlich eng an. (Vgl. F. d. M. **34**, 748, 1903). Verf. beabsichtigte nicht, in

Wettbewerb zu treten mit den Lehrbüchern der Baukonstruktionslehre, die nach kurzer theoretischer Begründung das Hauptgewicht auf die Durchführung praktisch wichtiger Beispiele legen. Statt dessen tritt hier die theoretische Entwicklung in den Vordergrund: es werden überall die verschiedenen Wege aufgezeigt, auf denen die zeichnerische Lösung grundsätzlich wichtiger Aufgaben gelungen ist, ohne daß sich daran die Detailbehandlung der Aufgaben der Praxis knüpft. Dadurch gewinnt das Buch an Reiz besonders für den Mathematiker, der sich mit den Anwendungen seiner Wissenschaft in der Technik beschäftigen will und dabei darauf Wert legt, den Gedankeninhalt der einzelnen Methoden klar zu erfassen. Auch der Ingenieur wird auf seine Rechnung kommen, der sich nicht auf das gerade zurzeit in der Praxis Übliche beschränkt, sondern Interesse und Verständnis für den theoretischen Aufbau seiner Wissenschaft besitzt. Die Darstellung ist ausführlich und damit vorzüglich geeignet, in den Gegenstand einzuführen; die Methode aus gutem Grunde nicht rein synthetisch, vielmehr wird gerade die Verknüpfung geometrischer und analytischer Vorstellungen dazu benutzt, um möglichst schnell zum Ziel zu gelangen. In der Tat ist ja auch dieser Wechsel zwischen verschiedenen Methoden eine überaus nützliche Geistesgymnastik; die Notwendigkeit, einen Gedankeninhalt in mannigfachster Weise umzusetzen, führt wohl eher zum eingehenden Verständnis als das starre Festhalten an der Reinheit der Methode. Sk.

O. Mohr. Graphische Zusammensetzung von räumlichen Kräftegruppen. Zs. f. Math. und Phys. **59**, 431-440.

Eine Kräftegruppe im Raume wird auf die drei Grundebenen eines Koordinatensystems projiziert, und die Projektionen werden zu Mittelkräften zusammengesetzt. Die Darstellung durch diese Projektionen — die natürlich nicht von einander unabhängig sind — bildete in einer früheren Arbeit des Verf. die Grundlage für die Konstruktion eines möglichst einfachen, dem gegebenen gleichwertigen Kräftesystems. (Zivilingenieur 1899; Abhandl. z. techn. Mechanik I, 67, 1906). Hier wird die angegebene Darstellung dazu benutzt, um die Kräftegruppe durch zwei Kräfte zu ersetzen, von denen die eine in, die andere senkrecht zu der xy-Ebene liegt. Diese Darstellung, die den bedeutsamen Vorteil bietet, daß sich die Konstruktionen fast vollständig in einer Ebene, in der xy-Ebene, durchführen lassen, bildet die Grundlage für die weiteren Konstruktionen, durch die die Kräftegruppe auf verschiedene Weise durch gleichwertige Gruppen ersetzt wird. Bemerkenswert ist die überaus einfache Konstruktion der Zentralachse. Sk.

L. Zoretti. Sur la poulie fixe. Nouv. Ann. (4) **11**, 213-221.

„Man pflegt in den Lehrstunden der Statik mit großer Schnelligkeit über die Gleichgewichtsbedingungen der festen Rolle hinwegzugehen. Gerade wegen ihrer Einfachheit liefert jedoch diese einfache Maschine ein ausgezeichnetes Beispiel, bei dessen Vorführung man leicht eine gewisse Anzahl von Erscheinungen erklären kann: Steifheit, Reibung, Adhäsion, welche für die Schüler, und zwar für alle Schüler, zu den am schwierigsten begreifbaren gehören. Sie eignet sich außerdem zu Versuchen von großer Einfachheit.“ Dies wird näher erläutert. Lp.

A. G. Greenhill. The attraction of a homogeneous spherical segment. Amer. Journ. **33**, 373-412.

„G. W. Hill ist zu dem unerwarteten Ergebnis gekommen, daß die Anziehung des homogenen Kugelsegments abhängig gemacht werden kann von dem vollständigen elliptischen Integral erster, zweiter und dritter Gattung und daher durch die Funktionen $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ der Legendreschen Tafel IX ausdrückbar ist (F. d. M. **38**, 775, 1907). Das Ergebnis ist unerwartet, weil die gewöhnliche Zerschneidungsart zu einem Integral von nicht zu behandelnder Art führt, bei dem die Elemente symmetrisch zur Achse des Segmentes sind. Schneidet man aber das Segment durch Ebenen senkrecht zur Verbindungsgeraden des Zentrums C der Kugel und des angezogenen Punktes P, so ist jeder Schnitt das Segment eines Kreises, von welchem CP die Achse ist, und die Komponenten der Anziehung senkrecht und parallel zu CP sowie das Potential des Segmentes in P werden durch einfache Funktionen gegeben. Das ist die von G. W. Hill benutzte Zerschneidung und eine schließliche partielle Integration setzt ihn in den Stand, die Komponenten der Anziehung des Kugelsegments auf eine algebraische Quadratur zu bringen, die sich als eine vom elliptischen Charakter erweist. Der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist die Wiederaufnahme der Betrachtung dieses elliptischen Integrals und der Nachweis, daß das Resultat abhängig gemacht werden kann von dem vollständigen elliptischen Integral erster und zweiter Gattung und von zwei vollständigen Integralen dritter Gattung, die durch unvollständige Integrale erster und zweiter Gattung ausdrückbar sind. Geometrisch gedeutet, können diese beiden elliptischen Integrale so genommen werden, daß sie den scheinbaren Inhalt ausdrücken oder das magnetische Potential der Basis des Segments, von P aus gesehen und von einem anderen Punkte P' auf dem Radius CP, der zu P invers ist in bezug auf die Kugeloberfläche. Die analytische Reduktion ist somit ähnlich der vom Verf. gebrauchten in der Abhandlung „The elliptic integral in electromagnetic theory" (Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 447-534; F. d. M. **38**, 477, 1907).

Lp.

Leinekugel Le Cocq. Sur la théorie générale de deux solides indéformables suspendus d'où dérivent les formules applicables à tous les systèmes de ponts suspendus rigides. C. R. **152**, 43-45.

Die Note soll zeigen, wie man aus den Gleichgewichtsbedingungen eines allgemeinsten Systems zweier starren Körper S und S' mit einem gemeinsamen Gelenke O und je einem bzw. in A und C, wenn ein Gewicht P allein auf das System einwirkt, Formeln ableiten kann, aus denen die Gesetze aller möglichen Hängebrücken sich ableiten lassen. Lp.

E. Terradas. Sobre la figura geométrica realizada por un hilo en movimiento estacionario plano. Rev. Soc. Mat. Esp. **1**, 3-9.

Verf. bestimmt die Gestalt, welcher ein biegsamer, gewichtsloser, geschlossener Faden annimmt, wenn er um eine mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegende Achse geschlungen wird. Op.

E. Terradas. Sobre la figura geométrica realizada por un hilo en movimiento estacionario plano. (Conclusión.) Rev. Soc. Mat. Esp. **1**, 53-57.

Der Schluß zu der obigen Arbeit mit gleichem Titel. Op.

E. Humbert. Note sur le moment d'un couple. Revue de Math. spéc. **21**, 132-133.

Beweis, daß das Moment eines Kräftepaares für jeden Punkt des Raumes denselben Wert hat. Sk.

L. Zoretti. Sur les moments d'une aire plane. Nouv. Ann. (4) **11**, 547-551.

Eine homogene ebene Fläche sei begrenzt durch ein Stück der x-Achse und einen Kurvenbogen, der von jedem Lote zur x-Achse nur einmal geschnitten wird. Dann ist sein Trägheitsmoment in bezug auf die x-Achse:

$$I = \iint dx\,dy\,y^2 = \int dx \cdot \frac{y^3}{3} = \frac{dx}{3}\,\Sigma y^3,$$

wenn dx hinreichend klein und konstant genommen wird. Der Verf. konstruiert y^2 als eine Länge, y^3 als ein doppelt zu rechnendes Dreieck und gewinnt das zu findende Trägheitsmoment als Summe dieser Dreiecke, multipliziert mit $\frac{2}{3}dx$. — Der Fall eines Flächenstückes allgemeinerer Form ist auf den zuerst behandelten zurückführbar. Lp.

U. Cisotti. Una osservazione sopra gli ellissoidi di inerzia. Palermo Rend. Suppl. **6**, 30-31.

Ist $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ die Gleichung eines Ellipsoides, so sind die Ungleichungen $B + C > A$, $C + A > B$, $A + B > C$ nicht nur die notwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen dafür, daß es ein Trägheitsellipsoid sein kann. Lp.

W. G. Robson. Laboratory note: a simple method of finding the radius of gyration of a body. Edinb. Roy. Soc. Proc. **31**, 517-518.

Beschreibung einer Bestimmung des Trägheitsradius der Rolle einer Atwoodschen Maschine. J.

Weitere Literatur.

W. J. Crawford. Elementary graphic statics. London: Charles Griffin and Co., Ltd. VIII u. 131 S. [Nature **89**, 657, 1912.]

L. Freytag. Gesetzmäßigkeiten in der Statik des Vierendeelträgers. München: R. Oldenbourg.

J. Geissler. Die Gleichgewichtsbedingungen der Raummechanik mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen, magnetischen und Gravitationserscheinungen. Diss. Rostock. 86 S. 8°.

W. A. Howe. Retaining walls for earth; including the theory of earth-pressure as developed from the ellipse of stress; with a short treatise on foundations. 5th edition, revised and enlarged. New York: Wiley. XII u. 181 S. 12mo.

J. B. Johnson, C. W. Bryan and F. E. Turneaux. Theory and practice of modern framed structures. 9th edition, rewritten. Part 2: Statically indeterminate structures and secondary stresses. New York: Wiley. XVI u. 538 S. 8°.

A. F. Jorini. Teoria e pratica della costruzione dei ponti. Milano: Hoepli. XV u. 624 S. 8°. (Biblioteca tecnica.)

R. Kirchhoff. Der Zweigelenkbogen als statisch unbestimmtes Hauptsystem. Berlin: Ernst u. Sohn. III u. 65 S. Lex. 8°.

C. Kriemler. Einführung in die energetische Baustatik. Berlin: Springer.

H. Mettler. Graphische Berechnungsmethoden im Dienste der Naturwissenschaft und Technik. Zürich-Selnau: Leemann. 71 S. 16mo.

E. Reich. Vierendeelträger mit parallelen Gurtungen. Graphische Ermittlung der Einflußlinien mit Hülfe eines einzigen Seilpolygones. Wien: v. Waldheim.

A. Schau. Statik. Leitfaden für den Unterricht an Baugewerbeschulen. I. Teil. Leipzig: B. G. Teubner.

K. Scheel. Präzisionswage für 10 kg Belastung nach Thiesen. Zs. f. Instrumentenk. **31**, 237-245.

R. Schönhöfer. Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken. 2. neubearb. Aufl. Berlin: Ernst u. Sohn. V u. 59 S. Lex. 8°.

B. Hydrostatik.

U. Crudeli. Su la teoria dei fluidi rotanti. Nuovo Cimento (6) **1**, 437-442.

Einige Zusätze zu den Betrachtungen des Verf. im Vorjahre (F. d. M. **41**, 785, 1910). 1. Ist $U = V + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, wo $V = k\varrho \int\limits_S dS/r$, so muß für die Oberfläche $dU/dn > 0$ sein. Für die Rotationsgeschwindigkeit ω ist (vgl. das angezogene Referat) $\sqrt{\pi k \varrho}$ eine obere Schranke; es fragt sich, ob dies auch eine Grenze ist, bis zu der hin Gleichgewichtsfiguren möglich sind. Hierauf vermag der Verf. nicht zu antworten; doch weist er auf Tisserand, Mécanique céleste, S. 108 hin, wonach das Gleichgewicht bei einem gewissen unendlichen elliptischen Zylinder bis an diese Grenze hin möglich ist. 2. Eine letzte Bemerkung bringt eine Beziehung zwischen der mittleren Dichte der Erde und ihrer Umlaufszeit. Lp.

Ph. Weinmeister. Lösung zu 334 (Ph. Weinmeister). Arch. d. Math. u. Phys. (3) 18, 200-201.

Wie groß muß das spezifische Gewicht s eines homogenen Oktaeders sein, wenn der Körper a) mit einer senkrechten Achse, b) mit zwei horizontalen Seitenflächen stabil auf dem Wasser schwimmen soll? Ba.

Weitere Literatur.

W. H. Besant and A. S. Ramsey. A treatise on hydromechanics. Part I. Hydrostatics. Seventh edition. London: G. Bell and Sons, Ltd. VI u. 275 S. [Nature 89, 657, 1912.]

G. W. Parker. The elements of hydrostatics. With numerous examples for use of schools and colleges. London: Longmans, Green & Co. VIII u. 150 S. 8°.

J. H. Biles. The design and construction of ships. Vol. II. Stability, resistance, propulsion, and oscillations of ships. London: C. Griffin and Co., Ltd. X u. 428 S. [Nature 87, 240-241.]

E. Frigeri. Corso di costruzione navale, ad uso degli studenti d'ingegneria navale, dei costruttori e dei naviganti. Milano: Hoepli. XVIII u. 669 S. 8°. (Biblioteca tecnica.)

Rondeleaux. Stabilité du navire en eau calme et par mer agitée. Théorie élémentaire et application pratique. Paris: Challamel. VI u. 189 S. 8°.

Kapitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

L. Koenigsberger. Die Prinzipien der Mechanik für eine oder mehrere von den räumlichen Koordinaten und der Zeit abhängige Variablen. II. Heidelb. Ber. 1911, Nr. 17, 24 S.

Für mehrere abhängige Variablen gestalten sich die in dem ersten Teile dieser Arbeit (F. d. M. 41, 752, 1910) für eine solche Variable gemachten Auseinandersetzungen wesentlich anders; aber es genügt, nur zwei abhängige Variablen in Betracht zu ziehen, da für mehr als zwei alle weiteren Entwicklungen und Sätze dieselbe Form behalten. Bezeichnet man die vier unabhängigen Variablen mit x_α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, die zwei abhängigen mit p und q, so erhalten die erweiterten Laplaceschen partiellen Differentialgleichungen für ein kinetisches Potential H erster Ordnung die Form:

$$(1)\qquad \frac{\partial H}{\partial p} - \sum_\alpha \frac{d}{dx_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q} - \sum_\alpha \frac{d}{dx_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0,$$

wo $\partial p/\partial x_a = p_a$, $\partial q/\partial x_a = q_a$ gesetzt ist. Die Resultate der Betrachtungen werden S. 16 so zusammengefaßt: Wenn H keinen anderen Bedingungen unterworfen ist, als daß es die unabhängigen Variabeln nicht explizit enthält, so genügen sämtliche Integrale der Gleichungen (1), welche sich in der Form darstellen lassen:

$$p = f_1(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + x_4 + c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, a_3),$$
$$q = f_2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + x_4 + c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, a_3),$$

dem Energieprinzip H, ausgedrückt durch die Gleichung:

$$E = H - \sum_a p_a \frac{\partial H}{\partial p_a} - \sum_a q_a \frac{\partial H}{\partial q_a} = h,$$

wo h eine Konstante ist, und wenn H von der Form ist:

$$H = F(p^2 + q^2, p_a^2 + q_a^2, pp_\beta + qq_\beta, p_a p_\beta + q_a q_\beta),$$

so wird für eben diese Integrale die als Flächenprinzip definierte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt:

$$\sum_a \frac{d}{dx_a}\left(p \frac{\partial H}{\partial q_a} - q \frac{\partial H}{\partial p_a}\right) = 0.$$

Hat aber das kinetische Potential die Form:

$$H = F\left[p^2 + q^2, \left(\sum_a p_a\right)^2 + \left(\sum_a q_a\right)^2, p\sum_a p_a + q\sum q_a\right],$$

so genügen sämtliche Integrale der Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dem durch die Gleichung

$$E = H - \sum_a p_a \frac{\partial H}{\partial p_a} - \sum_a q_a \frac{\partial H}{\partial q_a} = \omega(x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3 - x_4)$$

dargestellten Energieprinzip und dem durch die partielle Differentialgleichung erster Ordnung dargestellten Flächenprinzip:

$$L = \frac{\partial F}{\partial\left(\sum_a p_a^2 + \sum_a q_a^2\right)} \sum (pq_a - qp_a) = \omega_1(x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3 - x_4),$$

und umgekehrt befriedigen, wenn ω und ω_1 willkürliche Funktionen der Differenzen der unabhängigen Variabeln sind, sämtliche simultanen Integrale des Energie- und des Flächenprinzips die Lagrangeschen Gleichungen.

Es wird dann noch mit Hülfe der Energie E das Lagrangesche partielle Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in das erweiterte Hamiltonsche partielle Differentialgleichungssystem erster Ordnung transformiert, und zwar unter der Annahme, daß das kinetische Potential die unabhängigen Variabeln nicht explizit enthält. Lp.

L. Koenigsberger. Zur Integration der erweiterten L a g r a n g e schen Differentialgleichungen für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung von mehreren abhängigen und unabhängigen Variabeln und Erweiterung des Schwerpunktprinzips. Heidelb. Akad. Sitzber. 1911, Nr. 33, 17 S.

Die Betrachtungen schließen sich an die an, über welche im vorstehenden Referate berichtet ist. Zunächst wird der Fall einer einzigen unabhängigen Variable behandelt, indem gezeigt wird, wie ein Zwischenintegral unter den erweiterten Annahmen gefunden werden kann. Nach dem entsprechenden Verfahren läßt sich dann auch für den Fall beliebig vieler abhängigen Variabeln ein System von Zwischenintegralen finden. „Solcher dem Flächenintegrale analoger partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche Zwischenintegrale des L a g r a n g e schen Differentialgleichungssystems bilden, erhalten wir noch andere bei analoger Zusammensetzung des kinetischen Potentials aus den anderen p und P (vgl. das vorstehende Referat) oder durch Summierung von Ausdrücken, welche der linken Seite von (32) analog sind.“

„Endlich kann man analog dem von mir in der Mechanik e i n e r unabhängigen Variable für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung erweiterten Schwerpunktprinzip ein entsprechendes Theorem für partielle Differentialgleichungen aufstellen, das hier für den vorher betrachteten Fall eines kinetischen Potentials erster Ordnung von zwei abhängigen Variabeln p und q und n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entwickelt werden soll.“ Lp.

A. Wassmuth. Über den Zusammenhang des Prinzips der kleinsten Aktion mit der H a m i l t o n - J a c o b i schen partiellen Differentialgleichung und dem S t ä c k e l schen Theorem. Wien. Ber. **120**, 3-24.

Unter Hinweis auf die grundlegenden Untersuchungen von H ö l d e r und V o ß (Gött. Nachr. 1896 u. 1900; F. d. M. 27, 574 u. **31**, 695) wird hier der ursprüngliche Fall behandelt, daß ein Potential Φ existiere, welches ebenso wie die Bedingungsgleichungen von der Zeit unabhängig sei. Neben den generellen Koordinaten $p_1, \ldots, p_n$, welche die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen, werden die Momente $q_1, \ldots, q_n$ eingeführt, und das Prinzip der kleinsten Aktion wird in der Form geschrieben:

$$\delta\int 2L_p dt = \delta\int [q_1 dp_1 + \cdots + q_n dp_n] = 0.$$

Die Ausführung der Variation liefert, indem man q als unabhängige Veränderliche betrachtet, $\partial q_2/\partial p_1 = \partial q_1/\partial p_2, \ldots$, d. h. es muß eine Funktion w von $p_1, \ldots, p_n$ geben, für welche

$$q_1 = \frac{\partial W}{\partial p_1}, \ldots, q_n = \frac{\partial W}{\partial p_n}$$

ist; diese Werte liefern nach Einsetzung in die Gleichung:

$$2L_q = A_{11}q_1^2 - 2A_{12}q_1q_2 + \cdots = 2(E - \Phi),$$

Hamiltons partielle Differentialgleichung.

Die Differentiation dieser Beziehung nach den unabhängigen Konstanten liefert die Jacobischen Gleichungen und einen leichten Übergang zum Stäckelschen Theorem, das sich in Determinantenform schreiben läßt.

Als eine Anwendung wird die Ableitung der Gleichungen für die unendlich kleinen Bewegungen vollkommen elastischer Körper gegeben und zum Schluß mit Rücksicht auf das Prinzip der Relativität an der Hand einer Planckschen Bemerkung hervorgehoben, daß für eine Lorentz-Transformation nicht $dW = q_x dx + q_y dy + q_z dz$ invariant bleibt, sondern $(dW - Edt)$.

Lp.

P. Burgatti. Determinazione dell' equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 108-111.

Nach Erwähnung der bezüglichen Arbeiten von Liouville (1846), Stäckel (1891), Levi-Civita (1904), Dall'Acqua (1906) gibt der Verf. zur Lösung der Frage eine Methode, „die mehr von der Anschauung als von einer strengen Logik eingegeben ist“. Es sei

$$(1) \qquad \sum_{r,s=1}^{n} A_{rs} \frac{\partial V}{\partial q_r}\frac{\partial V}{\partial q_s} = 2\{V(q_1, q_2, \ldots, q_n) + h\}$$

eine Hamilton-Jacobische Gleichung, in der die linke Seite eine homogene quadratische Form in den $\partial V/\partial q_i$ ist. Sie habe ein vollständiges Integral von der Form

$$(2) \qquad V = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, h).$$

Dann muß (1) das Resultat der Elimination der α_k zwischen den Gleichungen

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = \varphi_i'(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sein. Als erste Annahme werde genommen

$$(3^*) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 = 2\psi_i(q_i) + \varphi_{i1}(q_i)\alpha_1 + \varphi_{i2}(q_i)\alpha_2 + \cdots + \varphi_{in-1}(q_i)\alpha_{n-1} + \varphi_{in}(q_i)\cdot 2h.$$

Die Elimination der α_k aus dem System (3*) liefert die Stäckelschen Gleichungen, im Falle $n = 2$ die Liouvilleschen. Nimmt man ferner

$$(3^{**}) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = \varphi_{i1}(q_i)\alpha_1 + \varphi_{i2}(q_i)\alpha_2 + \cdots + \varphi_{in-1}(q_i)\alpha_{n-1} + \varphi_{in} q_i \sqrt{2h - \mathfrak{T}},$$

wo $\mathfrak{T}$ eine in den α_i quadratische Form mit konstanten Koeffizienten ist, so erhält man durch Elimination der α_k aus dem Gleichungssystem (3**) ein Resultat, das dem von Levi-Civita gefundenen entspricht. End-

lich wird auch der Fall erörtert, bei welchem r Gleichungen vom Typus (3*) und $n+r$ vom Typus (3**) sind. Ob damit alle Möglichkeiten erschöpft sind, soll noch erst untersucht werden. Lp.

W. Ebert. Eine allgemeine Eigenschaft der Bewegungsgleichungen der Dynamik. Wien. Ber. **120**, 1089-1109.

Bei allgemeinen Untersuchungen über dynamische Probleme hat man meist die kanonische Gleichungsform zugrunde gelegt. Der Verf. meint aber, es sei an der Zeit, sich nach anderen Gesichtspunkten in der Behandlung derartiger Probleme umzusehen. Während man sich bisher im wesentlichen auf Koordinatentransformationen beschränkt habe, könne man durch Transformationen, die sich über beide Arten von Variabeln erstrecken, unter Umständen erreichen, daß das Integral der lebendigen Kraft sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig die Jacobischen p mit den entsprechenden q vertauscht.

Besitzt F, das nach den Gleichungen $dq_i/dt = +\partial F/\partial p_i$, $dp_i/dt = -\partial F/\partial q_i$ die ganze Bewegung definiert, diese Eigenschaft, so heiße das kanonische Gleichungssystem „symmetrisch". Hat ein Problem symmetrische Form, so bleibt jedes Integral desselben ein Integral, wenn man sämtliche p mit den entsprechenden q vertauscht. Hieraus ergeben sich zwei verschiedene Arten von Integralen: solche, die bei dieser Vertauschung das Vorzeichen wechseln (ungerade), und solche, die das Vorzeichen beibehalten (gerade).

Sind in einem (symmetrischen) System sämtliche von der Zeit unabhängigen Integrale gerade, so genügen die q unter sich denselben Gleichungen wie die p unter sich. Bezeichnet man diese ersteren als Bahnkurvengleichungen im übertragenen Sinne des Wortes, die letzteren als Hodographengleichungen im übertragenen Sinne des Wortes, so sind diese Gleichungen identisch, wenn sämtliche von der Zeit unabhängigen Integrale gerade sind. Hieraus folgt noch nicht die Identität der entsprechenden Kurven. Es können nämlich zwei solcher Gleichungen, z. B. $f(q_1, q_2) = 0$, $f(p_1, p_2) = 0$, an sich identisch sein, aber aus zwei oder mehr Faktoren bestehen. Es sei z. B. $f = g \cdot h = 0$. Dann ist es möglich, daß $g(q_1, q_2) = 0$ und $h(p_1, p_2) = 0$ den obigen Gleichungen genügen.

In der Arbeit wird zunächst dieser Satz abgeleitet, dann auf die Keplersche Bewegung angewandt. Schließlich wird für die hauptsächlichsten Fälle des Dreikörperproblems die symmetrische Gleichungsform hergestellt.

Lp.

S. Tschapligin. Zur Theorie der Bewegung von Systemen mit nicht integrierbaren Beziehungen. — Das Theorem über den herleitenden Multiplikator. Moskau. Math. Samml. **28**, 303-314. (Russisch).

Der Verf. geht von den Lagrangeschen Gleichungen eines Systems aus, welches durch die Parameter q, q_1, ξ, η bestimmt ist; hierbei sind die Parameter ξ, η mit den willkürlichen Parametern q und q_1 durch die nicht integrierbaren Differentialgleichungen verknüpft:

$$\xi' = aq' + a_1 q_1', \quad \eta' = bq' + b_1 q_1',$$

in welchen a, a_1, b, b_1 Funktionen von q und q_1 sind. Es wird angenommen, daß die lebendige Kraft T als Funktion zweiten Grades der Geschwindigkeiten q', q_1', ξ', η' erscheint mit von q und q_1 abhängigen Koeffizienten. Diese lebendige Kraft wird bei Einsetzung der Werte $\xi', \eta', \ldots$ in dieselbe durch T bezeichnet. Dann werden die Bewegungsgleichungen nach Lagrange bekanntlich in dieser Form geschrieben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} = q_1' S,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} = -q' S,$$

$$S = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \xi'}\left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q}\right) + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \eta'}\left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q}\right),$$

wo U die Kräftefunktion ist. Der Verf. führt statt der Zeit t ein veränderliches τ ein unter der Bedingung, daß $N dt = d\tau$, wobei N eine Funktion von q und q_1 ist, und bezeichnet den abgeleiteten Parameter nach diesem neuen veränderlichen durch $\dot{q}, \dot{q}_1$. Er zeigt, daß, wenn wir die Funktion N bestimmen, welche er den herleitenden Multiplikator nennt, unter der Bedingung

$$NS - p_1 \frac{\partial N}{N \partial q} + p \frac{\partial N}{N \partial q_1} = 0, \text{ wobei } p = \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}}, \; p_1 = \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_1},$$

wir die Gleichung in die kanonische Form überführen:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \; \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \; \frac{dp_1}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \; \frac{dq_1}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \; H = T - U.$$

Das Theorem Hamiltons für die betrachteten Systeme stellt sich in folgender Form dar:

$$\delta \int_0^t (T + U) N dt = 0, \text{ wobei } \int_0^t N dt = \text{const.}$$

Wenn die Verbindungsgleichungen integrierbar sind, so wird $N = 1$, und wir erhalten die gewöhnliche Form des Theorems.

Am Ende der Arbeit führt der Verf. zwei Beispiele nicht integrierbarer Verbindungsgleichungen an: die Bewegung des dreiachsigen Ellipsoids auf einer Ebene und die Bewegung einer materiellen Scheibe auf einer Tischfläche bei einem Rollen, welches die progressive Bewegung senkrecht zu ihrer Ebene ausschließt.

Die Bewegungsgleichungen für diese Aufgabe werden nach der Jacobischen Methode integriert. Jk.

R. Hargreaves. Points in the theory of ignoration. Messenger (2) **40**, 170-176.

Unter den behandelten „Punkten" wird in § 1 die folgende Frage erörtert. „Unter welchen Umständen sind die Energie und das kinetische Potential vollständig durch die Summe und die Differenz zweier Größen gegeben, welche als die kinetische und die potentielle Energie in dem reduzierten System angesehen werden können? Dies ist der Fall, wenn die ursprüngliche kinetische Energie die Summe einzelner quadratischer Formen ist, in denen die den ignorierbaren und den nicht ignorierbaren Koordinaten entsprechenden Geschwindigkeiten getrennt vorkommen. Dies ist auch der Fall, wenn das System in eine solche Form durch eine Transformation der ignorierbaren Koordinaten umgewandelt werden kann, und diese Umwandlung ist unter völlig definierten Bedingungen möglich. Die erste Aussage wird als selbstverständlich angenommen werden; die zweite bedarf der Erläuterung."

Die in §§ 2 und 3 behandelten „Punkte" betreffen ähnliche spezielle Fragen, auf die wir der Kürze wegen hier nicht näher eingehen können. Lp.

G. A. Maggi. Sulle relazioni fondamentali del movimento relativo. Batt. G. **49** [(3) **2**], 105-108.

Der gelieferte Beweis des Coriolisschen Theorems, der auch den des sogenannten Theorems des Parallelogramms der Geschwindigkeiten einschließt, empfiehlt sich durch die Einfachheit der analytischen Herleitung; außerdem besitzt er den Vorzug geometrischer Überlegungen, die in die Umstände des Falles klarere Einsicht gewähren. Lp.

P. Appell. Sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses. C. R. **152**, 1197-1199.

Man denke sich ein holonomes oder nicht holonomes System mit reibungslosen Verbindungen, dessen allgemeinste, mit den Verbindungen verträgliche Verrückung linear von den willkürlichen Variationen δq_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ von k Parametern q_ν abhängt. Es seien dq_ν die reellen Änderungen dieser Parameter während der Zeit dt, und man setze $q'_\nu = dq_\nu/dt$, $q''_\nu = dq'_\nu/dt$. Für eine mit den Verbindungen verträgliche Verrückung ist die Summe der Arbeiten der gegebenen Kräfte von der Form $\Sigma Q_\nu \delta q_\nu$. Die Bewegungsgleichungen werden dann nach der folgenden Methode gewonnen (vgl. F. d. M. **30**, 641, 1899). Es sei $S = \frac{1}{2}\Sigma m(x''^2 + y''^2 + z''^2)$ die Beschleunigungsenergie des Systems, ausgedrückt als Funktion der q''_ν. Die Bewegungsgleichungen erhält man durch Aufsuchung der Werte, welche die Funktion $R = S - \Sigma Q_\nu q''_\nu$ zum Minimum machen. Nun nehme man an, daß zu den vorigen Verbindungen eine neue reibungslose Verbindung von solcher Art hinzutrete, daß die mit dieser Verbindung verträglichen Verrückungen durch eine Relation $f(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k) = 0$ verbunden sind, wo f eine homogene Funktion n-ten Grades der δq_ν ist. Man nehme ferner an, daß die wirkliche Verrückung dieselbe Relation befriedige: $f(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) = 0$. Indem man diese Gleichung nach der Zeit differenziert, erhält man:

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial q_1'} q_1'' + \frac{\partial f}{\partial q_2'} q_2'' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_k'} q_k'' + \frac{\partial f}{\partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Die neue Bewegung geschieht so, daß die Funktion R der q_ν'' ein Minimum wird, indem zugleich die Bedingung (3) zwischen den q_ν'' erfüllt ist. Ist λ ein Hülfsfaktor, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$(4) \qquad \frac{\partial S}{\partial q_\nu'} - Q_\nu - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_\nu'} = 0,$$

und die Glieder $\lambda \frac{\partial f}{\partial q_\nu'}$ stellen die Wirkung der von der neuen Verbindung herrührenden Kraft dar. Lp.

P. Appell. Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse. Palermo Rend. **32**, 48-50.

Als Beispiel für die im vorstehenden Referate beschriebenen Bewegungen wird der Fall behandelt, bei dem die allgemeinste mit der Verbindung verträgliche virtuelle Verrückung die Relation $\delta x^2 + \delta y^2 - \delta z^2 = 0$ befriedigt und die reelle Verrückung dx, dy, dz die nämliche: $dx^2 + dy^2 - dz^2 = 0$. Lp.

E. Delassus. Sur la réalisation matérielle des liaisons. C. R. **152**, 1739-1743.

Der Verf. untersucht genauer die von Appell betrachteten Verbindungen und teilt sie unter Hinzunahme eines Hülfssystems je nach der Natur der in sie eingehenden Derivierten der Koordinaten in zwei Ordnungen. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten vermöge des Postulats über die Arbeit der Verbindungskräfte und das Appellsche Prinzip liefern die Bewegungsgleichungen durch die alleinige Betrachtung der Verbindungsgleichungen; das nennt der Verf. die abstrakte Bewegung des Systems, welche Bewegung durch ihre Anfangsbedingungen völlig bestimmt ist. Er gelangt dann zu den Sätzen: Für jede Realisation zweiter Ordnung der Verbindungen eines Massensystems ist die konkrete Bewegung unabhängig von der materiellen Konstitution des Hülfssystems; sie ist vollständig bestimmt durch ihre eigenen Anfangsbedingungen und fällt immer mit der abstrakten Bewegung zusammen. Wenn die Realisation nur bis zur ersten Ordnung geht, so hängt die konkrete Bewegung von der materiellen Konstitution des Hülfssystems ab, fällt nicht mit der abstrakten Bewegung zusammen und ist nicht durch ihre eigenen Anfangsbedingungen völlig bestimmt. Lp.

E. Delassus. Sur les intégrales linéaires des équations de Lagrange. C. R. **153**, 40-43.

Die Lagrangeschen Gleichungen eines holonomen Systems, das einer Funktion von Kräften gehorcht, welche, wie auch die Verbindungen, von der Zeit abhängen können, lassen sich in der Gestalt schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0,$$

wo T eine im allgemeinen nicht homogene quadratische Funktion der q_i' ist, und jedes lineare Integral kann in der Form $\Sigma \lambda_i \partial T/\partial q_i' - \Omega =$ const. geschrieben werden, wo die λ_i und Ω Funktionen von $q_1, \ldots, q_n, t$ sind. Diesem Integrale lasse man die lineare Gleichung $X(f) = \Sigma \lambda_i \partial f/\partial q_i = 0$ entsprechen sowie die virtuelle Verrückung, welche durch $\delta q_1 = \lambda_1 \varepsilon, \ldots, \delta q_n = \lambda_n \varepsilon$ definiert ist, wo ε eine unendlich kleine unabhängige Variable ist. Jeder Parameter q, der nicht selbst in T vorkommt, gibt ein unmittelbares lineares Integral $\partial T/\partial q_1' =$ const., von dem man sagt, es sei in „normaler Form", und das es ermöglicht, das Lagrangesche System S_n auf ein analoges System S_{n-1} zu bringen, welches nur die Unbekannten $q_2, \ldots, q_n$ enthält. Hierüber spricht der Verf. eine Reihe von Sätzen aus nebst Andeutungen über ihre Verwendbarkeit.

Lp.

É. Delassus. Sur les liaisons linéaires. C. R. **153**, 626-628.

Wirklich nicht lineare Verbindungen eines Systems können nie in zweiter Ordnung durch Systeme mit linearen Verbindungen realisiert werden, mögen letztere auch noch so verwickelt sein.

Wenn man für ein System S, das gegebenen Verbindungen und Kräften unterworfen ist, alle konkreten Bewegungen betrachtet, die durch alle denkbaren linearen Realisationen seiner Verbindungen geliefert werden, so erhält man alle kinematisch mit seinen Verbindungen verträglichen Bewegungen von S.

Jedem Kräftesystem F, das auf S einwirkt, kann man eine solche lineare Realisation der Verbindungen entsprechen lassen, daß die abstrakten Bewegungen von S wie besondere konkrete Bewegungen realisiert werden.

Wenn ein System S gegeben ist, das nicht linearen Verbindungen unterworfen ist, so kann eine lineare Realisation dieser Verbindungen nicht existieren, die es ermöglicht, bei beliebig auf S einwirkenden Kräften alle abstrakten Bewegungen von S als besondere konkrete Bewegungen zu realisieren.

Lp.

E. Delassus. Sur les liaisons non linéaires et les mouvements étudiées par M. P. Appell. C. R. **153**, 707-710.

Eine lineare Realisation, die gegen keine Grenzrealisation hinstrebt, aber deren Eigenschaften gegen Grenzeigenschaften hinstreben, welche die einer vollkommenen Realisation sind, wird eine Realisation mit vollkommenem Streben genannt. Alle konkreten Bewegungen, die einem nämlichen Kräftesystem und einem nämlichen Anfangssystem für die q und q' entsprechen, und die durch alle möglichen Realisationen mit vollkommenem Streben geliefert werden, streben einer einzigen Bewegung zu, der vollkommenen Bewegung. Die vollkommenen Bewegungen eines Systems sind die Appellschen Bewegungen und genügen dem Prinzip des Minimums der Funktion R.

Lp.

É. Cotton. Sur l'instabilité de l'équilibre. C. R. **153**, 1059-1062.

„Liapunov, Kneser, Hadamard und Painlevé haben in sehr ausgedehnten Fällen die Umkehrung des Theorems von Lagrange und Lejeune Dirichlet über die Stabilität des Gleichgewichts bewiesen. Painlevé hat jedoch gezeigt, daß, wenn man der Natur der Kräftefunktion keine Beschränkung auferlegt, jene Umkehrung versagen kann. Deshalb entsteht nun die Frage, ob sie gilt, wenn die Kräftefunktion in der Umgebung der Gleichgewichtslage holomorph ist. Der Beweis hierfür ist mir unter der Voraussetzung einer isolierten Gleichgewichtslage und einer ebenen Bewegung gelungen; ich werde in Kürze den befolgten Gang hier andeuten.“ Am Schluß der Note wird folgender Satz von Caillet mitgeteilt: „Wenn die auf einen beweglichen Körper einwirkende Kraft innerhalb eines ganz in endlichem Abstande gelegenen Bereiches auf einer festen Geraden Δ eine Projektion von unveränderlicher Richtung hat, tritt der Körper, der so geschleudert ist, daß seine Anfangsgeschwindigkeit sich auf Δ nach derselben Richtung projiziert wie die Kraft, nach Verlauf einer endlichen Zeit aus dem Bereiche heraus, indem seine Projektion auf Δ sich immer nach derselben Richtung bewegt.“

Lp.

C. Popovici. Sur les mouvements permanents stables. C. R. **152**, 40-42.

Bei Untersuchungen über die Gleichgewichtsgestalten rotierender Flüssigkeiten haben Poincaré und Liapunov gezeigt, unter welchen Umständen das System

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \Sigma a_k^i x_k + \varphi_2^i(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \varphi_p^i(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$

stabile Bewegungen in dem Sinne darstellt, daß der zu $t = \infty$ gehörige Bahnast in der Umgebung des Nullpunktes bleibt, wenn zufolge der Anfangsbedingungen der Massenpunkt ihm hinreichend nahe ist. In der gegenwärtigen Note werden einige Bemerkungen in bezug auf den Charakter der Stabilität dieser permanenten Bewegungen hinzugefügt. Die Umgebung des Nullpunktes kann zwar eine Lage des geometrischen Gleichgewichtes vorstellen, braucht aber darum noch nicht eine Lage des kinematischen Gleichgewichtes zu sein; denn der Massenpunkt könnte sich dem Nullpunkt nähern, indem er einen unendlich langen Bogen durchläuft. Bei der analytischen Untersuchung der Frage unterscheidet der Verf. zwei Fälle. 1. Die Bahnlinien sind nach Potenzreihen in $\alpha_i e^{\lambda_i t}$ entwickelbar. 2. Die Bewegung ist nicht auf diese Art entwickelbar. Hierdurch werden einige Kriterien gewonnen. Lp.

H. J. E. Beth. De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen (Derde gedeelte). Amst. Versl. **19**, 748-767.

In der Dissertation des Verf. (F. d. M. **41**, 796-799, 1910) wurden die Oszillationen um eine Gleichgewichtslage bei einem Mechanismus mit zwei Freiheits-

graden untersucht, wenn eine lineare Relation zwischen den Hauptfrequenzen der Vibration besteht, eine Relation für welche $S \leqq 4$ ist (vgl. die Bezeichnungen des angeführten Referates). In der gegenwärtigen Abhandlung wird diese Untersuchung auf einen Mechanismus mit einer beliebigen Anzahl von Freiheitsgraden ausgedehnt. Zuerst wird der Einfluß einer Relation zwischen zweien der Vibrationsfrequenzen erörtert. Dann werden die Relationen diskutiert, welche zwischen dreien oder vieren der Vibrationsfrequenzen möglich sind. Relationen von mehr als vier der Vibrationsfrequenzen liegen außerhalb der Betrachtung, da ja $S \leqq 4$ ist. Lp.

L. Bloch. Sur quelques théorèmes généraux de mécanique et de thermodynamique. C. R. **152**, 1843-1846.

Als Verallgemeinerung zweier Sätze von Lord Rayleigh (Theory of Sound, 2nd ed. **1**, 94) gibt der Verf. ein beide Sätze enthaltendes Theorem. Man stelle sich ein mechanisches System in der Nähe einer Lage stabilen Gleichgewichts vor; die potentielle Energie sei V, die (verallgemeinerten) Kräfte und die Verrückungen, von dieser Lage aus gerechnet, seien Ψ_i und ψ_i, so daß (1) $2V = \Psi_1 \psi_1 + \Psi_2 \psi_2 + \cdots + \Psi_n \psi_n$ ist. Wenn r Relationen ($r < n$) zwischen den Ψ_i und den ψ_i gegeben sind: (2) $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$, so gibt es eine privilegierte Deformation, die einem Minimum von potentieller Energie entspricht. Jede andere Deformation des Systems erfordert einen Energieaufwand, der den vorigen um einen Betrag übertrifft gleich der Energiedifferenz der beiden Deformationen. Es seien (3) $F_{r+1} = 0$, $F_{r+2} = 0, \ldots$, $F_n = 0$ die Gleichungen, welche in ihrer Verbindung mit (2) den privilegierten Zustand definieren. Wir wollen uns so ausdrücken: Wenn die Bedingungen (3) befriedigt werden, so werden die inneren Modifikationen, die den äußeren Modifikationen entsprechen, gehemmt. Das Theorem lautet nun: Wenn ein System äußeren Modifikationen unterworfen wird, so wird das stabilste Gleichgewicht durch eine Transformation erreicht, bei der man die entsprechenden inneren Modifikationen hemmt. Aus diesem Theorem folgert der Verf. eine Reihe interessanter Sätze. Lp.

L. Bloch. Sur quelques théorèmes généraux de mécanique et de thermodynamique. Journ. de Phys. (5) **1**, 820-830, 912-922.

In den Artikeln „Stabilité et déplacement de l'équilibre" (F. d. M. **40**, 974, 1909) hat Raveau auf den Zusammenhang vieler Sätze der Thermodynamik mit solchen aus der analytischen Mechanik hingewiesen. Die vorliegende Abhandlung, von der ein Teil in C. R. **152** veröffentlicht ist, soll diese Analogien eingehend darlegen. „Wegen der Einfachheit und der Symmetrie der Bezeichnungen kann das mechanische Gleichgewicht einer an sich sehr einfachen und sehr symmetrischen Analysis unterworfen werden. Eine Aufzählung der Fälle und Anordnung der Ergebnisse ist leicht. Das so erhaltene Schema muß sich in der Thermodynamik wieder vorfinden. Benutzen wir es als Führer, so vermeiden wir die Aufstellung überflüssiger Sätze unter doppelter Anwendung bei anderen Beziehungen und brauchen keine auf nützliche

Theoreme sich beziehenden Auslassungen zu befürchten. Bei diesen Fragen, wo die Dunkelheit besonders aus der Ordnungslosigkeit entsteht, hat der bezeichnete Vorteil seinen Wert."

In dem ersten Teile der Arbeit wird der Parallelismus der Bedingungen für Existenz und Stabilität des mechanischen und des thermodynamischen Gleichgewichts behandelt; der Inhalt des zweiten Teils deckt sich im allgemeinen mit dem der vorstehend besprochenen Note. Lp.

L. Bloch. Sur quelques théorèmes généraux de mécanique et de thermodynamique. Journ. de phys. (5) **1**, 988-996.

Fortsetzung der vorstehend angezeigten Arbeit S. 759. Durch Betrachtung der Rayleighschen Theoreme für den Fall der Elektrostatik entstehen die Sätze: I. Bei gegebenen Deviationen und Potentialen ($\psi, V_2, V_3, \ldots, V_n$ gegeben) ist die dem System zu liefernde Energie ein Minimum, wenn man bei konstanter Ladung Q_1 arbeitet. II. Bei gegebenem Paar und Ladung ($\Gamma_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ gegeben) ist die dem System zu liefernde Energie ein Minimum, wenn man bei festem Potential V_1 arbeitet. — In dem Falle der Thermodynamik erhält man unter anderem die Sätze: I. Die generalisierte Kompressibilität eines Systems ist ein Minimum bei gehemmten Modifikationen (erster Art), insbesondere bei adiabatischer Kompression. III. Die verallgemeinerte kalorische Kapazität ist ein Minimum bei gehemmten Modifikationen (erster Art). Für ein thermodynamisches System in stabilem Gleichgewicht werden zuletzt die beiden Sätze ausgesprochen: I. Wenn ein thermodynamisches System unter der Einwirkung gegebener generalisierter Kräfte im stabilen Gleichgewicht ist, so führt jede Änderung des Systems in der Richtung einer Verringerung freier Energie zu einem weniger stabilen Gleichgewicht. II. Wenn ein im Gleichgewicht befindliches thermodynamisches System gegebenen generalisierten Verrückungen unterzogen wird, führt jede Änderung des Systems in der Richtung einer Verminderung freier Energie zu einem neuen Zustande stabileren Gleichgewichtes. Lp.

A. Buhl. Sur les applications géométriques de la formule de Stokes. C. R. **152**, 431-433.

A. Buhl. Sur des volumes pris pour paramètres de points, de droites et de plans, d'après une méthode appuyée par M. Darboux sur la théorie des moments d'inertie. C. R. **152**, 997-999.

G. Darboux. Remarque sur la Note précédente. C. R. **152**, 999.

In den beiden Noten von Buhl handelt es sich um rein geometrische Betrachtungen, die aber in ihren Anwendungen für die mathematische Physik vielleicht Bedeutung gewinnen können. Darboux faßt den Gehalt in folgender Weise zusammen. Eine Ebene sei in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung $ux + vy + wz + p = 0$ gegeben; man verknüpfe mit ihr einen Parameter k durch die Gleichung (1) $k = \frac{\varphi(u, v, w, p)}{u^2 + v^2 + w^2}$, wo φ ein beliebiges homogenes Polynom zweiten Grades ist. Man sieht leicht ein, daß die

Summe der Parameter zweier rechtwinkligen Ebenen sich nicht ändert, wenn sich die Ebenen um ihre Schnittgerade drehen. Diese Summe bildet also einen mit der Geraden verknüpften Parameter und hängt nur von ihren Plückerschen Koordinaten ab. Ebenso ändert sich die Summe der Parameter dreier Ebenen nicht, wenn die drei Ebenen sich um ihren Schnittpunkt drehen, bildet also einen mit dem Punkte verknüpften Parameter und hängt nur von seinen Koordinaten ab. Den durch die Formel (1) definierten allgemeinem Ausdruck kann man auf unbegrenzt viele Weisen dadurch wiederfinden, daß man das Trägheitsmoment von vier Punkten, denen man passend gewählte Massen beilegt, in bezug auf eine Ebene nimmt; dies genügt, um die Analogie der von Buhl erhaltenen Resultate mit den von Darboux in Bd. II der Mécanique von Despeyrous gegebenen zu erklären. Lp.

E. Budde. Zur Theorie des Mitschwingens. Verh. Deutsche Phys. Ges. **13**, 121-137.

E. Budde. Bemerkungen zu meinem Aufsatz über die Theorie des Mitschwingens. Ebenda 224.

Der Verf. behandelt die Dämpfungsgleichung von der Form

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + n^2x = E \sin pt$$

unter Hinweis auf einige Bedenken, welche die übliche Art der Diskussion dieser Gleichung mit sich führt. Der Nachdruck der Untersuchung wird auf diejenigen Zeiten gelegt, in welchen die Schwingung sich ausbildet. Dabei zeigt sich, daß die allgemeine Behandlung von (1) ausreichen würde zur Diskussion aller interessanten Einzelfälle; die Ergebnisse werden indessen durchsichtiger, wenn man die einfachsten Fälle vorab behandelt. Das geschieht also. Die Aufgabe wird durch folgende Nebenannahmen begrenzt: 1. Die Elongationen sollen nicht über die Größe hinausgehen, wo die elastische Kraft noch proportional mit $-x$ ist. 2. Die Dämpfung sei klein oder mäßig; aperiodische Bewegungen bleiben ganz außer Betracht. 3. Es werden in erster Linie Schwingungen ins Auge gefaßt, deren Periode in den Bereich der Hörbarkeit fällt; n ist also groß gegen den reziproken Wert einer Sekunde.

Vor der allgemeinen Behandlung von (1) werden nach einer vorgängigen mathematischen Auseinandersetzung über die Behandlung von Differentialgleichungen der Form (1) die Fälle $b = 0$, $p = n$ und $b = 0$, p beliebig erledigt. Die Einzelergebnisse sind im Original nachzulesen. In den „Bemerkungen" wird die Priorität von M. Wien bezüglich der maximalen Amplitude erzwungener Schwingungen anerkannt (F. d. M. **27**, 699, 1896), ebenso die von Cl. Schaefer und Juretzka bezüglich des Anschwingens und der Erscheinung der Schwebungen (Phys. Zs. **10**, 630, 1909). Vielleicht ist auch noch auf einige neuere englische Arbeiten, besonders von Stephenson (1906 u. 1907) aufmerksam zu machen. Lp.

P. Schulze. Allgemeine Theorie unsymmetrischer Ablenkungen bei Systemen mit einem Freiheitsgrad und deren Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie unsymmetrischer Schwingungen gleicher Systeme, nebst Anwendungen auf besondere Fälle. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 298-311.

In seinen früheren Arbeiten über den Gegenstand (vgl. F. d. M. **32**, 728, 1901) ist der Verf. von der Differentialgleichung $K\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -c_1\alpha - c_2\alpha^2$ ausgegangen. Nachdem nun inzwischen J. Horn (F. d. M. **33**, 754, 1912; **34**, 765, 1903; **36**, 770, 1905) die mathematische Theorie endlich kleiner Schwingungen von dem exakten Standpunkte der Theorie der Differentialgleichungen aus behandelt und Formeln für die Ablenkungen entwickelt hat, kommt P. Schulze auf diese Frage zurück und leitet zunächst Formeln ab, die den Hornschen Entwicklungen für die Schwingungen entsprechen. Zu diesem Zwecke nimmt er die Differentialgleichung in der allgemeinen Form an:

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -c_1\alpha - c_2\alpha^2 - c_3\alpha^3 - c_4\alpha^4 - \cdots$$

und entwickelt nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten praktische Formeln in Gestalt von Potenzreihen, die er bis zu den vierten Potenzen der variablen Größen fortsetzt. Bei den Formeln für die einzelnen Anwendungen werden dann die Entwicklungen nur bis zum dritten Gliede berechnet. Wegen genauerer Durchführungen wird auf die nachstehend angezeigte Programmabhandlung des Verf. verwiesen. Folgende Fälle werden behandelt: 1. Ablenkungen an einem Horizontal-Intensitätsvariometer. Zu vergleichen: R. v. Foerster, „Über die Asymmetrie der Ablenkungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Schwingungen bei einem magnetischen Horizontal-Intensitätsvariometer. Diss. Marburg, 1905. 2. Ablenkungen bei der magnetischen Wage. 3. Ablenkungen bei einem durch Drillung gehobenen Pendel. Zu vergleichen: F. Eichhorn, „Über die Asymmetrie der Schwingungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Ablenkungen im Falle eines durch Drillung gehobenen Pendels und eines durch einen Strom abgelenkten astatischen Nadelpaares.“ Diss. Marburg, 1909, 52 S. 4. Ablenkungen durch einen Strom bei einer an einem gedrillten Faden hängenden Galvanometernadel.

Lp.

P. Schulze. Allgemeine Theorie unsymmetrischer Schwingungen und Ablenkungen bei Systemen mit einem Freiheitsgrad und Anwendung desselben auf das zu erdmagnetischen Messungen dienende Unifilar-Magnetometer. Progr. Gardelegen. 29 S. 8⁰.

I. Einleitung. II. Auflösung der Differentialgleichung für unsymmetrische Schwingungen. III. Unsymmetrische Ablenkungen und deren Zusammenhang mit unsymmetrischen Schwingungen. IV. Anwendung der Theorie asymmetrischer Schwingungen und Ablenkungen auf das zu erdmagnetischen Messungen dienende Unifilar-Magnetometer.

„Es ist ohne weiteres klar, daß die Lösung der Differentialgleichung von Horn (vgl. das vorstehende Referat) die allgemeinere ist, und daß sich aus ihr die in den früheren Arbeiten gefundene Lösung als ein spezieller Fall ergeben muß. Da Horn indessen die Differentialgleichung unter ganz allgemeinen Gesichtspunkten gelöst hat, so sollen unter Zugrundelegung seiner Lösung nur diejenigen Formeln abgeleitet werden, die für die experimentelle Untersuchung von Schwingungen nötig sind. Ferner sind auch die Hornschen Bezeichnungen nicht die allgemein üblichen. Letztere sollen daher ebenfalls eingeführt werden, so daß die nunmehr eingeführten Gleichungen direkt Anwendung finden können.

Im folgenden Abschnitte soll alsdann eine den Hornschen Entwicklungen für Schwingungen entsprechende Entwicklung für unsymmetrische Ablenkungen gegeben werden. Die Untersuchung der einzelnen Fälle unsymmetrischer Schwingungen, in Sonderheit die Untersuchung bei der magnetischen Wage, hatte nämlich zu der Tatsache geführt, daß die Ablenkungen aus der Ruhelage, die durch gleichmäßig zu beiden Seiten der Ruhelage wirkende Ursachen hervorgebracht sind, ebenfalls unsymmetrisch sind. Die für die einzelnen Fälle entwickelten Formeln lassen sich wie im dritten Teil gezeigt wird, in eine allgemein geltende Formel zusammenfassen.

Im letzten Kapitel sollen endlich die für die unsymmetrischen Ablenkungen entwickelten Formeln auf das zu erdmagnetischen Messungen dienende Unifilar-Magnetometer Anwendung finden.“ Lp.

J. Hadamard. Sur les trajectoires de Liouville. Darboux Bull. (2) **35**, 106-113.

Nach Liouville ist die Bewegung eines Systems mit n Parametern $q_1, \ldots, q_n$ durch Quadraturen bestimmbar, wenn die lebendige Kraft $2T$ die Form hat:

$$2T = (f_1 + \cdots + f_n)(\varphi_1^2 q_1'^2 + \cdots + \varphi_n^2 q_n'^2)$$

und die Kräftefunktion U die Form:

$$U = \frac{\psi_1 + \cdots + \psi_n}{f_1 + \cdots + f_n},$$

wo die f_i, φ_i, ψ_i für jeden Wert von 1 bis n Funktionen des einzigen Parameters q_i sind. Beispiele solcher Systeme sind von Staude und Stäckel näher behandelt worden. Man stößt dabei auf ein Umkehrungsproblem, das eigentümliche Schwierigkeiten darbietet. Hadamard zeigt, wie diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn man ein funktionentheoretisches Theorem benutzt, das er in S. M. F. Bull. **34**, 71-84 aufgestellt hat (F. d. M. **37**, 672, 1906). Lp.

E. Kasner. Natural systems of trajectories generating families of Lamé. Amer. Math. Soc. Trans. **12**, 70-74.

Fortsetzung zweier Abhandlungen in derselben Zeitschrift (F. d. M. **40**, 784, 1909 u. **41**, 792, 1910). Jetzt wird die Frage behandelt, ob Wellensysteme

Lamésche Familien sein können, d. h. einfach unendliche Flächenfamilien, die einen Teil eines dreifach orthogonalen Systems bilden. Folgende Sätze werden bewiesen: I. Die einzigen natürlichen Systeme, deren Wellensysteme vom Laméschen Typus sind, sind solche, die aus den ∞^4 zu einer festen Kugel orthogonalen Kreisen gebildet werden. II. Die einzigen isotropen Medien, für welche eine Störung sich nach einer Laméschen Flächenfamilie ausbreitet, sind solche, bei denen der Brechungsindex in irgendeinem Punkte umgekehrt proportional der Potenz jenes Punktes in bezug auf eine feste Kugel ist. III. Die einzigen konservativen Kraftfelder, für welche, wenn die Energiekonstante gleich Null genommen wird, jedes Flächensystem gleicher Aktion vom Laméschen Typus ist, sind solche, bei denen das Potential in irgendeinem Punkte umgekehrt proportional der Potenz des Punktes in bezug auf eine feste Kugel ist. IV. Die einzigen natürlichen Kreissysteme sind solche, die von den zu einer festen Kugel orthogonalen Kreisen gebildet werden. V. Wenn ein System von ∞^4 Kurven im Raume derartig sein soll, daß für eine beliebig gewählte Oberfläche Σ erstens ∞^2 Kurven des Systems zu Σ orthogonal sind und eine Normalenkongruenz bilden, zweitens die oskulierenden Kreise dieser ∞^2 Kurven für die Punkte von Σ auch eine Normalenkongruenz bilden, dann muß das System aus den ∞^4 zu einer Kugel orthogonalen Kreisen gebildet werden.
Lp.

Ch. Platrier. Application du théorème de M. Appell sur le moment de la quantité de mouvement par rapport à un complexe d'un mobile, soumis à une force appartenant à ce complexe. Généralisation de l'équation de Clairaut. Nouv. Ann. (4) **11**, 355-358.

Die Anwendung betrifft die Bewegung eines Massenpunktes, der sich auf einer Schraubenfläche bewegt und nur der normalen Reaktion der Oberfläche unterworfen ist.
Lp.

J. P. Dalton. On the accuracy attainable with a modified form of Atwood's machine. Edinb. Roy. Soc. Proc. **31**, 416.

Der gewöhnliche Typus der Atwoodschen Maschine kann leicht modifiziert werden, so daß sie sowohl synchrone Aufzeichnungen der Zeit, als auch der Entfernung an verschiedenen Punkten gibt.
J.

A. M. Hiltebeitel. On the problem of two fixed centres and certain of its generalizations. American J. **33**, 337-362.

Das klassische Zweizentrenproblem kann so gefaßt werden: Die Bewegung eines von zwei festen Zentren Newtonscher Kräfte angezogenen Körpers zu finden. Es wurde zuerst von Euler gelöst, und seit Euler sind Verallgemeinerungen des Problems behandelt worden. In der gegenwärtigen Schrift wird die Lösung der allgemeinsten Zweizentrenprobleme gegeben, deren Variabeln trennbar sind, sowie eine Erörterung der Bahnen einer weniger all-

gemeinen Form der Aufgabe. Aufgabe: Die Bewegung eines Massenkörpers M zu erforschen, auf den fünf Kraftzentren K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 einwirken, nämlich die reellen Brennpunkte, der Mittelpunkt und die imaginären Brennpunkte eines Systems konfokaler Kegelschnitte, bzw. nach den folgenden Kraftgesetzen:

$$R_1 = -mr_1 - \frac{m_1}{r_1^2}, \quad R_2 = -mr_2 - \frac{m_2}{r_2^2}, \quad R_3 = -m_3 r_3,$$
$$R_4 = -m' r_4 - \frac{m_4 + im_5}{r_4^2}, \quad R_5 = -m' r_5 - \frac{m_4 - im_5}{r_5^2};$$

endlich wirke noch eine zusätzliche Kraft, in Richtung stets zu $K_4 K_5$ parallel, die dem Kubus des Abstandes des beweglichen Körpers M von der in K_3 auf $K_4 K_5$ senkrechten Ebene proportional ist. Die Zentren K_3, K_4, K_5 liegen fest; die reellen Brennpunkte K_1, K_2 liegen stets in der Meridianebene $K_4 M K_5$. Die Brennpunkte K_1 und K_2 liegen also in einem Kreise mit dem Mittelpunkte K_3 in der Mittelsenkrechtebene zu K_4 und K_5. Diese Aufgabe umfaßt alle bisher behandelten Formen des Zweizentrenproblems, welche durch geeignete Bestimmungen der verschiedenen m aus ihr hervorgehen. Der Durchführung der Lösung dieser Aufgabe können wir hier nicht folgen. Lp.

G. Armellini. Il problema dei due corpi nell' ipotesi di masse variabili. Rom. Acc. L. Rend (5) **20**₂, 682-687.

Der Verf. sieht bei der Untersuchung des schon oft behandelten Problems von der astronomischen Bedeutung ab, beschränkt sich also auf die analytischen Gesichtspunkte. Er beschäftigt sich mit den allgemeinen Eigenschaften der Bewegung, verallgemeinert einen grundlegenden Satz von Gyldén, gibt eine Lösung mittels der Mittag-Lefflerschen Sternmethode, dann aber auch eine zweite, einfache und angenäherte Methode für die astronomischen Bedürfnisse. Lp.

E. O. Lovett. Generalizations of the problem of several bodies, its inversion, and of recent progress in its solution. Quart. J. **42**, 252-315.

„Die vollständige Geschichte des Vielkörperproblems ist noch zu schreiben. Gauthiers Essai erschien 1817. Grants Geschichte der physischen Astronomie verfolgte den Gegenstand bis zur Mitte des letzten Jahrhunderts, und die Fortschritte seit jener Epoche sind von Hill in seiner Rede als Vorsitzender der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft 1896 erörtert, von Backlund in seinem Vortrage auf dem Kongreß zu St. Louis von 1903, sowie von Schwarzschild in dem Vortrage desselben Jahres auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. Whittakers Bericht für die British Association schilderte 1899 die Entwicklung während der 30 Jahre von 1868 bis 1898, einer Periode, die mit dem letzten Bande von Delaunays Mondtheorie anhub und mit dem Schlußbande von Poincarés Neuen Methoden der Himmelsmechanik endigte.

Die gegenwärtige Abhandlung hat es mit der weiteren Entwicklung des Problems in den Jahren 1898 bis 1908 zu tun. Während dieser Periode erschienen Hills gesammelte mathematische Werke, Charliers Vorlesungen, Moultons Einführung, Whittakers analytische Dynamik; an ihrem Ende ging die Veröffentlichung der Leçons von Poincaré ihrem Abschlusse entgegen und die der gesammelten Werke von Darwin hatte begonnen. Es schien wünschenswert, die neueren Fortschritte in der Lösung des Problems unter den folgenden Überschriften durchzugehen: 1. Die Differentialgleichungen und ihre Transformationen. 2. Partikularlösungen und ihre Verallgemeinerungen. 3. Periodische Lösungen und ihre Anwendungen. 4. Formale und qualitative Lösung des Problems. 5. Verallgemeinerungen des Problems und seine Umkehrung.

Diese fünf Kapitel der Abhandlung liefern einen fortlaufenden Bericht der Leistungen des Jahrzehnts; das fünfte Kapitel umfaßt die bis in die Einzelheiten durchgeführte Bearbeitung einiger bis jetzt nicht veröffentlichten Bemerkungen. Die ersten vier Kapitel und die historischen Schilderungen des fünften Kapitels haben mir als stellvertretendem Vorsitzenden der American Association for the Advancement of Science den Inhalt meiner Begrüßungsrede geliefert."

Den größten Umfang hat der fünfte Abschnitt (S. 270-315). Nachdem zuerst in chronologischer Folge die verschiedenen Verallgemeinerungen des Problems durchgegangen sind (S. 270-275), geht der Verf. zu seinen eigenen, neuen Untersuchungen über. Er leitet diese Betrachtungen folgendermaßen ein: „Eine weitere Verallgemeinerung des Bertrandschen Problems eröffnet sich bei dem Problem, die Kräfte eines zentralen konservativen Systems zu finden, das imstande ist, ein System von m Partikeln auf ebenso vielen vorgeschriebenen, aber beliebigen Bahnen in einem Raume von n Dimensionen zu erhalten. Die Geschwindigkeitskomponenten sind allein durch die Bahngleichungen bestimmt, und der zentrale konservative Charakter der Kräfte nur in dem Problem von $\frac{1}{2}n\,(n+1)$ Körpern in einem Raume von n Dimensionen. Auf ähnliche Art sind die Kraftkomponenten allein bestimmt kraft dieser selben Daten in dem Problem von $2n-1$ Körpern in einem Raume von n Dimensionen. Geschwindigkeiten und Kräfte sind gleichzeitig völlig bestimmt nur in den Fällen eines Körpers auf einer Geraden und dreier Körper in einer Ebene. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, besitzt das ebene Dreikörperproblem eine einzigartige Allgemeinheit darin an sich, daß alle Elemente der Mechanik des Problems völlig bestimmte sind, wenn die beliebigen ebenen Kurven, die von dem Körper bei zentralen konservativen Kräften beschrieben werden, gegeben sind. Dieser Umstand ist in Rechnung gezogen bei der Konstruktion neuer integrierbarer Probleme von drei Körpern bei Kraftgesetzen, die nur die Massen und die gegenseitigen Abstände der Körper einschließen."

Auf die dann folgenden Rechnungen, bei denen 275 bezifferte Gleichungen auftreten, näher einzugehen, ist ganz unmöglich. Lp.

F. R. Moulton. The problem of the spherical pendulum from the standpoint of periodic solutions. Palermo Rend. 32, 338-364.

„Das Problem des sphärischen Pendels gehört zu der Klasse derjenigen, welche durch die neuerdings in der Himmelsmechanik besonders von Poincaré angewandten Methoden behandelt werden können. Seine Einfachheit macht es besonders geeignet zur Erläuterung jener Prozesse, und sein Wert als Einleitung in den Gegenstand wird durch die Tatsache erhöht, daß die experimentelle Bestätigung der Resultate leicht ist. Der Punkt von hauptsächlich praktischem Interesse in der vorliegenden Abhandlung ist eben der, daß eine strenge explizite Behandlung eines besonderen Problems der Bewegung eines der Schwere unterworfenen Massenpunktes auf einer glatten Oberfläche gegeben wird. Die Methoden sind sehr leicht von dem behandelten Falle auf andere übertragbar, bei denen die Oberflächen in der Umgebung ihrer tiefsten Punkte angenähert kugelförmig sind. Der einzige Grund für die Beschränkungen auf das Problem ist der, daß die Prozesse nicht durch die Verwickelungen in den Formeln, die zur Sicherung der Allgemeinheit nötig sein würden, in Dunkel gehüllt werden sollen. Die Punkte von mathematischem Interesse sind: 1. Die direkte Ableitung der elliptischen Funktionen als Potenzreihen des Modulus aus den definierenden Differentialgleichungen mit einer expliziten Darstellung der reellen Periode. Die Ausdehnung auf den entsprechenden Typus hyperelliptischer Funktionen, die aus allgemeineren Oberflächen entstehen würden, liegt auf der Hand. 2. Eine einfache, die praktische Konstruktion der Lösungen einschließende Behandlung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten. 3. Nachdem die Eigenschaften der Lösungen aus einem Studium der Differentialgleichungen bestimmt worden sind, ist gezeigt, wie sie tatsächlich aus den Integralbeziehungen allein durch einfache algebraische Prozesse gefunden werden können." Lp.

E. Study. Sur les équations du mouvement d'un corps solide. Journ. de Math. (6) **7**, 97-112.

Eine Redaktionssote an der Spitze der Abhandlung lautet: „Um die Lage eines Körpers zu definieren, hat Study ein System von acht homogenen Koordinaten eingeführt, die durch eine quadratische Relation verbunden sind, ein Analogon zu den sechs Plückerschen Linienkoordinaten. Appell, der bei Study angefragt hatte, ob er mit Rücksicht auf die möglichen Anwendungen auf die Dynamik in seinem System die kinetische Energie T der Körper berechnet hätte, hat als Antwort die folgende Darlegung erhalten, die wir hier wiederzugeben in der glücklichen Lage sind."

Sachlich ist der Gegenstand in der Abhandlung Studys „Von den Bewegungen und Umlegungen" (Math. Ann. **39**, 441-566; F. d. M. **23**, 527-529, 1891) und in seinem Buche „Geometrie der Dynamen" (F. d. M. **33**, 691-700) sowie in dem Aufsatze „Ein neuer Zweig der Geometrie" (Deutsche Math.-Ver. **11**, 97-123) erschöpfend behandelt. Für die gestellte Frage geben wir hier die am Schlusse des vorliegenden Artikels befindlichen charakteristischen Sätze wörtlich wieder: „Die Einführung der Parameter (α, β) in die Dynamik des festen Körpers soll nicht die Hoffnung auf eine Vervollkommnung in der Theorie der Integration der Bewegungsgleichungen erwecken: ein solcher Fortschritt ist unmöglich; dies zeigen die mit Hülfe der Eulerschen Parameter oder gewisser komplexen Kombinationen dieser Größen schon erhaltenen Resultate.

Aber der Gebrauch der Parameter ist der Anwendung der klassischen Formeln weit überlegen bei der Beleuchtung der Beziehungen der Mechanik des festen Körpers in dem euklidischen Raume zu den entsprechenden Sätzen der nichteuklidischen Mechanik. Die Wahl unserer Bezeichnungen ist gerade von diesem Gesichtspunkte aus getroffen worden. Ebenso ist es in dem Falle des nichteuklidischen Raumes oder bei den Rotationen um einen festen Punkt in dem vierdimensionalen Raum viel vorteilhafter, die den Parametern (α, β) analogen Parameter einzuführen; denn dann kann man nicht die Vereinfachungen benutzen, welche im euklidischen Raume aus den Eigenschaften des Schwerpunktes eines festen Körpers fließen. Endlich wird man in dem Falle des euklidischen Raumes unsere Parameter dann mit Vorteil verwenden, wenn es sich darum handelt, die Formeln geometrisch zu deuten. Dies geschieht beispielsweise immer, wenn man sich der Quaternionen und der Biquaternionen bedient, die wir hier nicht eingeführt haben, um unsere Darlegung möglichst elementar zu halten.“ Lp.

D. Gorjatschew. Einige allgemeine Integrale in der Aufgabe über die Bewegung eines festen Körpers. Warschau 1910, 1-22. (Russisch.)

Die Abhandlung enthält die Bestimmung der Kraftmomente, welche einen festen Körper um einen festen Punkt unter der Bedingung drehen, daß sich die Integrale der Bewegungsgleichungen, bezüglich der Projektionen p, q, r der Winkelgeschwindigkeit auf die beweglichen Trägheitsachsen als Polynome des ersten oder zweiten Grades darstellen.

Der Verf. findet, daß die Integrale ersten Grades in der Formel

$$a(Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'') - bCr = 0$$

unter der Bedingung enthalten sind, daß das Moment L_3' der drehenden Kräfte bezüglich der unbeweglichen Achse und das Moment L_3 der beweglichen Achse OZ durch die Beziehung $aL_3' - bL_3 = 0$ verbunden sind.

Für die Integrale zweiten Grades findet der Verf. außer dem Integral der lebendigen Kräfte, welches bei dem Vorhandensein jeder Kraftfunktion stattfindet, das Integral von de Brun:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2BCF(\alpha, \beta, \gamma) + 2ACF(\alpha', \beta', \gamma') + 2ABF(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \text{const.}$$

bei der Kräftefunktion

$$U = AF(\alpha, \beta, \gamma) + BF(\alpha', \beta', \gamma') + CF(\alpha'', \beta'', \gamma''),$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ die Kosinus der Winkel zwischen den beweglichen und den unbeweglichen Achsen sind; ferner noch ein neues Integral von der Form:

$$(Ap\beta + Bq\beta' + Cr\beta'') \cdot (Ap\gamma + Bg\gamma' + Cr\gamma'') + (BC\alpha'' + AC\alpha'' + AB\alpha'')^2 = \text{const.}$$

beim Bestehen der Kräftefunktion

$$U = 2E_0(A\beta\gamma + B\beta'\gamma' + C\beta''\gamma'').$$

Jk.

F. Schottky. Über das Eulersche Drehungsproblem. Berl. Ber. 1911, 878-896.

„Wenn wir das Ganze überblicken, so können wir von dem Problem, das ursprünglich von Euler gestellt war, und zu dessen Lösung Jacobi wesentlich Neues hinzufügte, folgendes sagen: Das Quadrat der Drehungsgeschwindigkeit ist eine periodische Funktion von t, und zwar ist sie der Wert einer doppelt periodischen Funktion $\Phi(v)$ für $v = t$. Die Zeiteinheit ist von uns so gewählt, daß die reelle Periode von $\Phi(v)$, die man bei dem Problem als Schwingungsdauer bezeichnen kann, gleich π ist, der Anfangsprunkt der Zeit so, daß für ihn die Drehungsgeschwindigkeit am kleinsten ist. Die Funktion $\Phi(v)$ wird weder für reelle, noch für rein imaginäre Werte, sondern nur für diejenige Gruppe halber Perioden unendlich, die bloß komplexe Werte enthält. Diese Gruppe hat eigentlich den Index 2; wir schreiben dafür $\varkappa$.

Um die Darstellung der Bewegung eines beliebigen Körperpunktes zu erhalten, ist es bequem, ihn als Endpunkt eines Vektors E anzusehen. Wir fassen die invariable als Horizontalebene, zugleich als xy-Ebene auf und nehmen an, daß die x-Achse für $t = 0$ unter dem Geschwindigkeitsvektor liegt oder wenigstens in derselben Vertikalebene. Bei der Darstellung tritt neben die reelle Variable t eine rein imaginäre Konstante u, und es werden die vier elliptischen Thetafunktionen zweiten Grades $\Theta_\alpha(v) = \vartheta_\alpha(v-t)\,\vartheta_\alpha(v-u)$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ verwendet, von denen die eine, Θ_0 oder Θ, für $v = t$ verschwindet. Aus diesen Θ werden die Linearformen gebildet:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} i^{\alpha-1}\xi_\alpha\,\Theta_\alpha(v) = L(v), \quad \sum_{\alpha=1}^{3} i^{\alpha-1}(\varkappa\,|\,\alpha)\,\xi_\alpha\,\Theta_{\alpha\varkappa}(v) = L_\varkappa(v),$$

von denen die zweite aus der ersten hervorgeht durch Vermehrung von v um $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\omega i$ und gleichzeitige Absonderung eines Exponentialfaktors. ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind die konstanten Abstände, in denen sich der Endpunkt des Vektors E von den Trägheitsebenen des Körpers befindet.

Nun läßt sich der Vektor E in einen vertikalen und einen horizontalen zerlegen. Der vertikale ist $-\frac{L_\varkappa(0)}{\Theta_\varkappa(0)}\,i$, der horizontale in komplexer Darstellung $\frac{L(t)}{\Theta_\varkappa(0)}e^{int}$, wobei n eine willkürliche reelle Konstante ist.

In entsprechender Weise läßt sich der Geschwindigkeitsvektor zerlegen. Seine konstante vertikale Komponente ist $n + i\frac{\partial}{\partial u}\log(\Theta_\varkappa(0))$, seine horizontale $\frac{1}{i}\frac{\Theta'(t)}{\Theta_\varkappa(0)}e^{int}$.

Durch ähnliche Gleichungen sind die drei Trägheitsmomente bestimmt. Es ist

$$\frac{D}{A_\alpha} = n + i\frac{\partial}{\partial u}\log(\Theta_{\alpha\varkappa}(0)) \qquad (\alpha = 1, 2, 3);$$

dabei ist D die Länge des invariabeln Vektors.“ Lp.

O. Lazzarino. Interpretazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di Sofia Kowalewski relativo al moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso. Napoli Rend. (3) **17**, 68-146.

In dem von Marcolongo für die Akademie erstatteten Bericht über diese große Arbeit heißt es: „Lazzarino hat alle über den Gegenstand angestellten Untersuchungen zusammenfassen wollen; von einer einfachen und direkten Deutung des Kowalewskischen Integrales ausgehend, ist er dazu gelangt, in klarer und origineller Art den Inhalt der erwähnten Untersuchungen darzulegen und in mehr als einem Punkte auch sie zu vervollständigen. Die überaus reiche Bibliographie, die systematische und ungemein vereinfachte Darstellung sehr zahlreicher, nicht gerade bekannter Arbeiten, die vollständige Diskussion der Ergebnisse machen die Arbeit Lazzarinos über alle Maßen interessant.“

Die Schrift ist in sieben Kapitel geteilt. In dem ersten Kapitel werden in absoluter Weise, d. h. unabhängig von jedwedem Koordinatensystem, die Gleichungen der Bewegung des starren Körpers um einen festen Punkt in zwei verschiedenen vektoriellen Formen gefunden. Aus ihnen werden dann die Bewegungsgleichungen in der klassischen Eulerschen Gestalt abgeleitet. Schließlich werden die bekannten Fälle von Euler und Lagrange behandelt. In den hierauf bezüglichen Noten ist die reiche Bibliographie des Problems enthalten nebst einem besonderen Hinweise auf die notwendigen, aber nicht hinreichenden, von R. Liouville gefundenen Bedingungen, sowie auf den jüngsten Beweis von E. Husson und P. Burgatti über die Fälle, für welche das vierte algebraische und von der Zeit unabhängige Integral existiert.

Das zweite Kapitel ist der Untersuchung des vierten Integrales in dem Falle der Frau v. Kowalewski gewidmet, zuerst auf dem bekannten analytischen Wege, sodann in neuer Art auf geometrischem Wege. Diese neue Untersuchung hat das Verdienst, daß das vierte Integral in einer einfachen und anregenden Form aufgefunden wird, die den Weg zur geometrischen Erforschung und zur kinematischen Deutung des Problems gebahnt hat.

In dem dritten Kapitel wird der von N. Delaunay betrachtete Sonderfall umständlich erörtert, bei dem solche Anfangsbedingungen vorausgesetzt werden, für welche die Konstante des vierten Integrales der Kowalewski Null wird, sowie der noch beschränktere Fall, bei dem überdies noch eine gewisse Relation zwischen der Konstante des Integrales der lebendigen Kräfte und derjenigen des Flächenintegrales angenommen wird.

Das vierte Kapitel behandelt den ganz besonderen, aber sehr interessanten, von Mlodziejewski betrachteten Fall, bei dem die Polhodie einen Rückkehrpunkt aufweist. Dieser Fall wird mittels rationaler Funktionen der Zeit gelöst, während die von S. v. Kowalewski und von Delaunay der hyperelliptischen und der elliptischen Funktionen bedürfen. Außerdem ist die Polhodie eine algebraische Kurve, und die Bewegung des Körpers kommt auf eine Pendelbewegung um eine horizontale Achse zurück.

Das fünfte Kapitel enthält die Forschung über ein besonderes System krummliniger Koordinaten, die in der Ebene der gleichen Achsen des zu dem festen Punkt gehörigen Trägheitsellipsoides liegen. Frau v. Kowalewski hatte alle Größen, welche die Lage des beweglichen Körpers definieren, mittels der beiden hyperelliptischen Funktionen s_1 und s_2 der Zeit ausgedrückt. N. E.

Joukowsky hat s_1 und s_2 als die Parameter der erwähnten Koordinaten betrachtet. Dieses Kapitel ist eine notwendige Vorbereitung für die geometrische Erforschung und für die geometrische Deutung des Kowalewskischen Falles. Diese bilden den Gegenstand des sechsten Kapitels.

In dem siebenten Kapitel befindet sich die Untersuchung der Bedingungen für mechanische Verwirklichung der Bewegung, die Erforschung dreier einfachen Gyroskoptypen, die sie befriedigen, die Berechnung und die Beschreibung des konstruierten Modelles, schließlich die Angabe der Methoden, um die drei verschiedenen Kurventypen zu erhalten, die der Apparat aufzeichnen kann.

Lp.

G. G. Appelroth. Über die besonders einfachen Fälle der Bewegung eines schweren asymmetrischen Kreisels der Frau v. Kowalewski. I. Mosk. Math. Samml. **27**, 292-335.

Die Gleichungen des Problems enthalten die Quadratwurzel aus dem Produkt zweier Polynome zweiten und vierten Grades. Die drei einfachen Fälle sind die, bei denen eines dieser Polynome zwei gleiche Wurzeln hat, und der, bei dem die beiden Polynome zwei gemeinschaftliche Wurzeln haben. Diese drei Fälle enthalten andere noch speziellere Fälle, die „besonders einfache Fälle" genannt sind. Es sind die, bei denen das eine der beiden Argumente, von denen im allgemeinen Falle die hyperelliptischen Funktionen des Problems abhängen, sich auf eine Konstante reduziert. Die Abhandlung enthält eine eingehende analytische und geometrische Untersuchung der Bewegung des Gyroskops in allen einfachen Fällen. (Rev. sem. $\mathbf{20}_2$, 106). Lp.

H. Janne. Quelques remarques sur le principe de la „tendance des rotations au parallélisme" énoncé en 1852 par Léon Foucault. Brux. S. sc. **35** B, 151-169.

Zuerst erinnert der Verf. kurz daran, auf welche Körper das Prinzip sich als anwendbar erweist, und in welchem Sinne es zu verstehen ist. Dann vergleicht er die Ergebnisse mit der Fassung, die Foucault selbst diesem Prinzipe gegeben hat, und übt an ihr sowie an der von Foucault gegebenen Begründung Kritik. Hierin begegnet er sich mit Klein-Sommerfeld, „Über die Theorie des Kreisels", aus welchem Werke am Schlusse einige Sätze wörtlich in den Text aufgenommen sind. Lp.

F. Pugehl. Über ein von F. Klein gestelltes Problem aus der Theorie der Bewegung eines starren Körpers. Diss. Königsberg i. Pr. 80 S. 8°.

Im Gegensatze zur Kreiseltheorie, bei welcher ein Punkt des starren Körpers festgehalten wird, erhält man eine neue, ebenfalls beschränkte Mechanik des starren Körpers, wenn man ihm die Bedingung auferlegt, daß eine Richtung, die mit ihm fest verbunden gedacht ist, stets erhalten bleibt und somit ein ebener, zu der Richtung senkrechter Querschnitt während der Dauer der Bewegung sich selbst parallel bleibt (der feste Punkt des Kreiselproblems liegt im

Unendlichen). Das Problem ist daher so formuliert: „Auf einen starren Körper wirkt anfänglich ein beliebiges Kraftsystem derart sein, daß sich ein ebener Schnitt stets parallel bleibt. Es soll dann die Bewegung im ersten Augenblick studiert werden. Sodann soll die endliche Bewegung, die durch das anfängliche Kräftesystem hervorgebracht ist und weiterhin nur durch die Schwerkraft beeinflußt werden möge, mit analytischen und geometrischen Hülfsmitteln für alle Punkte des Körpers verfolgt werden."

I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Mechanik eines starren Körpers für eine viergliedrige Gruppe und für drei Untergruppen von Bewegungen. II. Die Kinetik des Körpers unter Bezugnahme auf ein bewegliches Koordinatensystem. III. Durchführung der Integration für den schweren Körper.

Die Integration der Bewegungsgleichungen ist bei der allgemeinsten Lage des in Frage kommenden Impulses zum Erdmittelpunkt unter Berücksichtigung der Einwirkung der Schwerkraft gelungen. Lp.

P. Woronetz. Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt. Math. Ann. **70**, 410-453.

„Die wenigen partikularen Lösungen des Problems der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer gegebenen Fläche, die bis jetzt untersucht sind, beziehen sich hauptsächlich auf zwei spezielle Fälle. Es wird entweder die rollende Bewegung einer starren Kugel auf einer beliebigen Fläche, oder die rollende Bewegung eines beliebigen starren Körpers unter der Wirkung der Schwere auf einer Ebene behandelt. In der vorliegenden Arbeit soll nachgewiesen werden, daß die meisten Resultate, die bei der Behandlung des erwähnten zweiten Problems erreicht sind, sich leicht und fast ohne Einschränkung auf das allgemeinere Problem der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer Kugel erweitern lassen. Hierbei wird die Schwere durch eine Kraft ersetzt, die vom Schwerpunkte des Körpers zum Zentrum der Kugel gerichtet ist und nur von der Entfernung dieser beiden Punkte abhängt. Die Untersuchungen über dieses Problem bilden den Inhalt von Kapitel III. In Kapitel IV werden die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt, entwickelt und einige einfache partikulare Lösungen derselben angegeben. Die beiden ersten Kapitel können als Einleitung in die oben genannten angesehen werden. (Man vergl. hierzu die Abhandlung des Verf.: „Die Gleichungen der Bewegung eines starren Körpers, welcher ohne Gleitung auf einer unbeweglichen Fläche rollt." F. d. M. **34**, 782, 1903, nebst der vorangehenden F. d. M. **32**, 737, 1901.) Kapitel I enthält einige Sätze aus der Kinematik der rollenden Bewegung. Diese Sätze werden verwendet, um mittels der C. Neumannschen Koordinaten die Projektionen der momentanen Winkelgeschwindigkeit des rollenden Körpers auf die mit dem Körper fest verbundenen Achsen zu bestimmen. In Kapitel II wird eine Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nicht holonomer Systeme (ohne die Euler-Lagrangeschen Multiplikatoren) angegeben, die der Hamiltonschen Methode für holonome Systeme insofern analog ist, als man zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nur Differentialausdrücke erster Ordnung als Funktionen der unabhängigen Geschwindigkeiten zu berechnen hat. Nur ist bei nicht holonomen Systemen die Anzahl dieser Ausdrücke größer:

zu den Ausdrücken für die Kräftefunktion und für die lebendige Kraft treten noch solche für so viele Impulse hinzu, als nicht holonome Bedingungsgleichungen vorhanden sind."

I. Kinematische Untersuchungen über die rollende Bewegung eines starren Körpers auf einer gegebenen Fläche. § 1. Einleitende Bemerkungen. § 2. Volle Biegung, reine Biegung und Drillung. § 3. Das Kreiseln der Tangentenebene. § 4. Anwendung auf das Problem der rollenden Bewegung. II. Über die Bewegungsgleichungen nicht holonomer Systeme. § 5. Elimination der Lagrangeschen Multiplikatoren aus den Bewegungsgleichungen. § 6. Die Bewegungsgleichungen in speziellen Fällen. § 7. Eine Formel für nicht holonome Systeme, die dem Hamiltonschen Integrale analog ist. § 8. Einführung linearer Funktionen der Geschwindigkeiten in die Bewegungsgleichungen. § 9. Anwendung auf das Problem der rollenden Bewegung. III. Über die rollende Bewegung eines starren Körpers auf einer Kugel. § 10. Die Differentialgleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer Kugel. § 11. Entwicklung der Bewegungsgleichungen aus dem Satze von dem Momente der Bewegungsgröße. § 12. Prüfung der Bewegungsgleichungen durch die Poinsotsche Interpretation der Bewegung eines kräftefreien starren Körpers. § 13. Auflösung der Bewegungsgleichungen nach den Differentialquotienten der unbekannten Funktionen. Bewegungsintegrale. Bestimmung der zyklischen Koordinaten. § 14. Rollende Bewegung eines Rotationskörpers auf einer Kugel. Zurückführung des Problems auf die Integration zweier Riccatischen Gleichungen. Bewegung eines zylindrischen Stabes auf einer Kugel. § 15. Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, in dessen Innern sich ein Gyroskop befindet. Rollende Bewegung einer gyroskopischen Kugel auf einer Kugel. IV. § 16. Differentialgleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer beliebigen Fläche. § 16. Aufstellung der Bewegungsgleichungen. § 17. Die Bewegungsgleichungen in speziellen Fällen. Partikulare Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Lp.

P. Woronetz. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. Math. Ann. 71, 392-403.

Es gibt Probleme, bei denen die Anwendung eines Achsensystems $M\xi\eta\zeta$ mit beweglichem Pole M, der nicht mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt, bedeutende Vorteile bietet. In dem ersten Teile der gegenwärtigen Abhandlung werden die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers in bezug auf ein Achsensystem $M\xi\eta\zeta$, das eine beliebige gegebene Bewegung hat, aufgestellt. In dem zweiten Teile werden die erhaltenen Bewegungsgleichungen auf das Problem der rollenden Bewegung angewendet und an einem einfachen Beispiele erläutert. Die auf das Achsensystem $M\xi\eta\zeta$ bezogenen Bewegungsgleichungen werden aus dem Satze der Dynamik materieller Punktsysteme entwickelt: Die geometrische Derivierte $\dot{\boldsymbol{P}}$ des Vektorensystems $\boldsymbol{P}$, das aus den Bewegungsgrößen der materiellen Punkte besteht, ist dem Vektorensysteme Π der wirksamen Kräfte und Reaktionen äquivalent. Die hieraus für die rollende Bewegung abgeleiteten acht Differentialgleichungen erster Ordnung, aus denen die zu bestimmenden acht Größen als Funktionen der Zeit zu finden sind, sind nach Ansicht des Verf. ebenso allgemein wie die in der vorstehend angezeigten Arbeit enthaltenen, dürften aber für die Anwendungen bequemer sein.

Lp.

O. Nitsche. Die Behandlung von Aufgaben über rollende Körper. Unterrichtsbl. f. Math. 17, 65-70.

Der Verf. scheint die Literatur über den Gegenstand nicht zu kennen. Ein Blick in Ritters Lehrbuch der technischen Mechanik oder in Wernickes Lehrbuch der Mechanik würde ihm gezeigt haben, daß seine Rechnungen dort in derselben Weise lange vor ihm gedruckt stehen. Lp.

A. G. Rossi. Esperienze sul piano inclinato. Nuovo Cimento (6) 1, 335-347.

Wenn ein Rotationskörper auf einer schiefen Ebene hinabrollt, so verwandelt sich die potentielle Energie der Lage in die Summe aus der kinetischen Energie der Translation und die der Rotation. Sorgt man also dafür, daß die kinetische Energie der Rotation recht groß ist, so wird die der Translation klein, d. h. die Geschwindigkeit der Translation nimmt nur langsam zu. Der Verf. gibt eine Reihe von Versuchsanordnungen an, durch welche man jenen allgemeinen Satz einer Hörerschaft veranschaulichen kann. Die einzelnen von ihm erdachten Apparate können hier nicht beschrieben werden. Lp.

J. R. Airey. The oscillations of chains and their relation to Bessel and Neumann functions. Phil. Mag. (6) 21, 736-742.

Die Schwingungen von Ketten liefern interessante Beispiele praktischer Anwendungen der Besselschen Funktionen auf physikalische Probleme. Diese Funktionen treten tatsächlich zuerst in Verbindung mit dem Problem kleiner Schwingungen einer an dem einen Ende aufgehängten homogenen Kette auf (Bernoullis Problem). Die Schwingungszeiten hängen in diesem Falle von den Wurzeln der Gleichung $J_0(z) = 0$ ab. Die allgemeinere Funktion $J_n(z)$ derselben Art, aber höherer Ordnung, erscheint in dem Ausdruck für die Schwingungsdauer einer Kette, deren Dichte proportional der n-ten Potenz des Abstandes vom freien Ende ist. Wenn endlich eine homogene Kette am freien Ende belastet ist, so enthält die vollständige Lösung beide Arten der Besselschen Funktionen: $J_n(z)$ und $Y_n(z)$ nebst ihren Differentialquotienten, von denen die $Y_n(z)$ auch Neumannsche Funktionen heißen. Der Verf. hat Versuche ausgeführt, um die beobachteten Schwingungsperioden jener drei Arten von Ketten mit den in den Formeln für ideale Ketten berechneten Zeiten zu vergleichen, und hat damit eine hübsche experimentelle Bestätigung der mathematischen Theorie geliefert. Am Schlusse gibt er noch eine kleine Tafel für die benutzten Wurzeln der Gleichung

$$J_0(\lambda z)/Y_0(\lambda z) = J_2(z)/Y_2(z) \qquad (\lambda > 1).$$

Lp.

P. Appell. Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement. Journ. de Math. (6) 7, 85-96.

„Das Problem der Bewegung einer Billardkugel mit gleitender Reibung ist ein klassisches. Es scheint jedoch interessant, die Bewegung vollständiger

dadurch zu erforschen, daß man in gleicher Weise der rollenden Reibung Rechnung trägt, die man bei einer ersten Annäherung vernachlässigen kann."

Zuerst werden die Differentialgleichungen der Bewegung allgemein aufgestellt, indem auch noch die kreiselnde Reibung berücksichtigt wird; es ergibt sich aber, daß die Kreiselbewegung allmählich verschwindet und dann nicht wiederkehrt. Daher werden nur die vier Differentialgleichungen weiter behandelt, in denen die gleitende und die rollende Reibung als Kräfte auftreten. Die bezüglichen Gleichungen zeigen eine merkwürdige Symmetrie zwischen dem Gleiten und dem Rollen. Dann werden die Fälle besonders betrachtet, bei denen einmal die rollende Reibung, das andere Mal die gleitende Reibung Null ist, danach der Fall, bei dem die anfängliche Rotation Null, die anfängliche Translation nicht Null ist. Endlich wird der allgemeine Fall näher erörtert. Es kommt hierbei auf die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen an. Diese werden in einfacher Gestalt angesetzt; dann wird der bei der Integration einzuschlagende Weg angedeutet und für einen besonderen Fall durchgeführt. Zuletzt wird gezeigt, wie die Integration auf die einer Gleichung von bekanntem Typus zurückgeführt werden kann. Lp.

J. G. Hagen. La rotation de la Terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles. Rédigé en français par P. de Vregille. Roma: Tipografia poliglotta Vaticana. VIII u. 190 S. Folio u. 6 Taf. (Specola Astronomica Vaticana I.)

Diese reich ausgestattete Schrift des bekannten verdienten Direktors der Vatikanischen Sternwarte ist die erste aus einer geplanten neuen Reihe von Veröffentlichungen. Wir können im Jahrbuche über den reichen Inhalt nur summarisch berichten. Der Verf. beschreibt alle Versuche, die zum Nachweise der Drehbewegung der Erde angestellt sind, entwickelt ihre Theorie und teilt die Ergebnisse der Messungen mit. Endlich gibt er auch von neuen Instrumenten Kunde, die nach seinen Angaben konstruiert sind, und mit denen die in der Vatikanischen Sternwarte angestellten Versuche überraschend gute Ergebnisse geliefert haben.

Zur Übersicht diene das Inhaltsverzeichnis.

Einleitung: Grundlegende Gedanken. Historische Skizze der mechanischen Beweise für die Drehbewegung der Erde. Bibliographie.

I. Körper in freier Bewegung. Gleichungen der relativen Bewegung. Bewegung der Geschosse. Körper im freien Fall.

II. Das Pendel. Das einfache Foucaultsche Pendel. Das Kegelpendel von Bravais. Verschiedene Formen des zusammengesetzten Pendels. Das Henglersche Horizontalpendel.

III. Die verschiedenen Formen des Gyroskops. Das freie Foucaultsche Gyroskop. Die beschränkten Foucaultschen Gyroskope. Die vertikalen Gyroskope von Arnold und Gilbert. Das Föpplsche horizontale Gyroskop. Skizze der Theorie der Gyroskope.

IV. Das Prinzip der Flächenkonstanz. Die Poinsotsche Kniefeder. Die aufgehängten Kugeln von Baudrimont und Boillot. Die Flüssigkeitsströme von Perrot, Combes und Tumlirz.

V. Die neuen Apparate. Der Isotomeograph. Die aufgehängte Rolle.

VI. Theorie der neuen Versuche. Das Torsionspendel als Hülfsapparat. Der Isotomeograph. Die aufgehängte Rolle.

VII. Die Versuche. Der Isotomeograph. Die aufgehängteeRolle. Zwei mögliche Anwendungen der Atwoodschen Maschine auf den Fall der Körper. — Zusätze und Verbesserungen. Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

Der Isotomeograph oder das äquiareolarische Instrument beruht auf dem Satze von der Flächenkonstanz. Nachdem der Verf. seine Theorie ausgearbeitet hatte und die qualitativen Versuche mit ihm Erfolg versprachen, fand er, daß die Idee dieses mechanischen Beweises schon von Poinsot angegeben ist (C. R. **32**, 1852). Es ist nicht möglich, die Beschreibung des Apparates, seine Theorie und die Ergebnisse der mit ihm angestellten Versuche hier in Kürze wiederzugeben.

Als ein Hauptresultat dieser neuesten, mit größter Sorgfalt durchgeführten Arbeit wollen wir aber das Urteil des Verf. über die südliche Abweichung freifallender Körper hersetzen (S. 167): „Die mit der aufgehängten Rolle ausgeführten Versuche bestätigen voll das Nichtvorhandensein einer südlichen Abweichung der Körper beim freien Fall. Und dieser Schluß stimmt mit dem Ergebnis der Erörterung im Teile I.“ Diese Legende dürfte damit wohl endgültig beseitigt sein. Lp.

W. H. Roever. The southerly deviation of falling bodies. Amer. Math. Soc. Trans. **12**, 335-353.; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 227-229, 529-530.

Der Verf. zeigt, daß die südliche Abweichung dem Quadrate der Höhe h proportional ist, durch welche der Körper fällt (wenigstens für hinreichend kleine Werte von h), und daß der Proportionalitätsfaktor die erste und auch die zweite Ableitung der Potentialfunktion f_1 enthält. Daraus folgert er: I. Die für das Gravitationsfeld der Erde zu gebrauchende Potentialfunktion muß eine zweite Annäherung sein, d. i. eine Entwicklung in der Umgebung des Anfangspunktes des fallenden Körpers, die Glieder von mindestens der zweiten Ordnung der unabhängigen Variabeln einschließt. II. In einem Kraftfelde, wo die Kraftlinien nicht geradlinig sind, fallen die Bleilotlinien von verschiedener Länge, die in demselben Punkte unterstützt sind, nicht zusammen. Der Verf. vergleicht die Annahme und die Ergebnisse früherer Autoren, die entweder eine oder beide der in I und II erwähnten Tatsachen außer Acht gelassen haben, mit denen der vorliegenden Arbeit, in der diese Tatsachen nicht außer Acht gelassen sind. Für die südliche Abweichung D erhält er die Ausdrücke:

$$D = \left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\right) r_0 \omega^2 + r^2 \omega^4,$$

$$D = \frac{h^2}{6 g_0}\left\{4\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi + 5\left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)_0\right\}.$$

g_0 und φ sind Schwerebeschleunigung und astronomische Breite im Ausgangspunkte P_0, r Abstand des Punktes P_0 von der Rotationsachse der Erde, z von der Äquatorialebene, ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, η die in der Richtung nach dem Nordpole gemessene Koordinate des Endpunktes des Bleilotes für die Kurve, die dieser Endpunkt des Bleilotes bildet. Erörtert werden

dann der Reihe nach die Annahme von Gauß, nebst einer zweiten und dritten Annahme sowie die allgemeine Gaußsche Differentialgleichung, danach eine vierte Annahme, die Arbeit des Grafen de Sparre (1905) und die aus jenen Annahmen zu ziehenden Schlüsse. Zuletzt folgen die zur Aufstellung der allgemeinen Formeln dienenden Rechnungen. Lp.

R. v. Mises. IV 10. Dynamische Probleme der Maschinenlehre. Enzykl. der math. Wissensch. IV 1 II, 153-355.

Der vorliegende Artikel behandelt in erster Linie solche Fragen aus dem Bereiche der Maschinenlehre, die auf Probleme der Mechanik starrer Körper führen. Mitberücksichtigt wurden jedoch einzelne über die Stereomechanik hinausgreifende Fragen, wie die Lehre von den Riemen und Seilen, die hydrodynamische Theorie der Lagerreibung usf., sowie diejenigen Untersuchungen, die zur Feststellung der in den Maschinen wirksamen Kräfte erforderlich sind. Der Bericht geht aus von einer Darstellung der in den Maschinen wirkenden Kraftfelder und schließt hieran die Besprechung der einzelnen maschinentechnischen Fragen.

Inhaltsübersicht. Vorbemerkung. Historische Übersicht.

I. Übersicht über die Kraftfelder der Maschinen. 1. Einleitung. a) Abgrenzung des Problems vom Standpunkt der Stereokinetik. b) Die verschiedenen Arten auftretender Kräfte. c) Die Methoden der mathematischen Darstellung der Kraftfelder. 2. Kolbenmaschinen. a) Hydraulische Kolbenmotoren und -pumpen. b) Dampf-, Gas-, und Luftmaschinen. c) Veränderungen im Kraftfeld; mathematische Darstellung des Kraftverlaufes. 3. Kreiselräder. a) Allgemeine Gleichungen für das Moment des Raddruckes. b) Besondere Fälle. 4. Elektrische Maschinen. a) Gleichstrommaschinen. b) Wechselstrommaschinen. 5. Bearbeitungsmaschinen. 6. Theorie der Reibung fester Körper. a) Die Reibungsgesetze. b) Kritik der Reibungsgesetze. Reibungstheorie von P. Painlevé. 7. Experimentelle Untersuchung der Reibung. a) Versuche zur Erforschung der Reibungsgesetze. 1) Standpunkt von A. Morin. 2) Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit. Trockene und geschmierte Reibung. 3) Einfluß der Geschwindigkeit auf φ. Verhältnis zu φ_0. 4) Einfluß des Normaldruckes, der Oberflächengröße und der Berührungsdauer. 5) Roll- und Bohrreibung. b) Versuche an besonderen Reibungserscheinungen. 1) Zapfen- oder Lagerreibung. 2) Bremsen. 3) Riemen- und Seilreibung. 4) Haftreibung der Fahrzeugtriebräder. 5) Gleitwiderstand von Nietverbindungen. c) Generalisierende Widerstandsformeln. 1) Dampfmaschinen usw. 2) Widerstände der Eisenbahnen. 8. Widerstände im umgebenden Mittel.

II. Besondere dynamische Probleme. Vorbemerkung. A. Das einfache Maschinengetriebe. 9. Kinematik des Schubkurbelgetriebes. a) Geschwindigkeit und Beschleunigung. b) Massenkinematik. Ersatz der Schubstangenmasse. c) Reduzierte Masse des Getriebes. 10. Aufstellung und Diskussion der Bewegungsgleichung. a) die Kräfte am Schubkurbelgetriebe. b) Zur Integration der Bewegungsgleichung. 11. Die stationäre Bewegung (Schwungradberechnung). a) Schwungsradberechnung für ein nur von der Kurbelstellung abhängiges Kraftfeld. b) Besondere Fragen. c) Das Kraftfeld hängt auch von

der Geschwindigkeit ab. d) Das Kraftfeld ist auch explizit von der Zeit abhängig. e) Experimentelle Untersuchungen. 12. Der Massenausgleich bei mehrkurbeligen Maschinen. a) Formulierung des Problems. b) Die allgemeinen Bedingungen des Massenausgleiches. c) Spezielle Resultate. 13. Kinetostatik. Einfluß der Elastizität und der Ungenauigkeit der Gelenke. a) Ermittelung der Gelenkreaktionen. b) Schnittreaktionen der Schubstange. c) Torsionsschwingungen der Kurbelwelle. d) Stöße in den Gelenken des Kurbelgetriebes.

B. Regulierung des Maschinenganges. a) Der Regler. b) Die Arten der Regulierung mittels Fliehkraftregler und die Richtungen der theoretischen Untersuchungen. c) Die Reguliermechanismen. 15. Das statische Regulatorproblem. a) Der allgemeine Ansatz. b) Grundbegriffe der elementaren Regulatortheorie. c) Wirkung rotierender Federn. 16. Direkte, stetige und einfache Regulierung. a) Der vollständige kinetische Ansatz. b) Begriff des Beharrungsgesetzes. c) Ansatz für kleine Schwingungen unter Vernachlässigung der Reibung und Stellkraft. d) Stabilitätsbedingungen. e) Einfluß der Reibung (Stellkraft). 17. Direkt und intermittierend wirkende Regulierung. a) Allgemeine Problemstellung. b) Vereinfachter Ansatz. c) Weitere Fragen. 18. Indirekte Regulierung. a) Ansatz für indirekte einfache Regulierung. b) Stabilitätsbedingungen. c) Einfluß langer Rohrleitungen auf die Regulierung hydraulischer Motoren. d) Isodrom-Regulierung.

C. Maschinenelemente und Apparate. 19. Welle und Lager. a) Lagerreibung. b) Stabilität rotierender Wellen. 20. Riemen-, Seil- und Kettentrieb. a) Wechselwirkung zwischen Rolle und Band. b) Das Verhalten des freien Seiles. c) Seilsteifigkeit. 21. Verschiedene Getriebe. 22. Druckindikator.

D. Fahr- und Hebezeuge. 23. Schienenfahrzeuge. a) Rad und Schiene. (Stationäre Bewegung.) b) Allgemeine Bewegung des Fahrzeuges. Die kinetischen Reaktionen des Fahrzeuges. d) Bremsen. e) Die Schwingungen des Lokomotiv-Oberbaues. 24. Hebezeuge. 25. Schiffe. a) Die Schiffsschwingungen. b) Allgemeiner Ansatz für die Schwingungen des Kreiselschiffes. c) Rollen des Kreiselschiffes im Seegang. d) Dämpfung der freien Schiffsschwingungen durch den Kreisel. 26. Luftfahrzeuge. a) Allgemeiner Ansatz. b) Stationäre Bewegung. Kreiselwirkung. c) Kleine Schwingungen. d) Stabilität. Lp.

É. Cotton. Remarques sur l'application du principe des forces vives aux machines mobiles. S. M. F. Bull. **39**, 1-8.

In dem Artikel soll gezeigt werden, wie man streng und allgemein die Arbeit der inneren Kräfte des Motors bei der Anwendung des Prinzipes der lebendigen Kräfte auf die beweglichen Maschinen eliminieren kann; es verbleiben in der Endgleichung nur solche Kräfte, die dem Versuche zugänglich sind. Dadurch wird eine Abschätzung der Annäherungen möglich, die einer gewissen anschaulichen Methode anhaften. Außerdem wird dadurch ein neues Beispiel dafür geliefert, daß es bei den Anwendungen von Interesse ist, den Prinzipien der analytischen Mechanik eine geometrische Fassung zu geben. Lp.

L. Lecornu. Sur l'équilibrage des moteurs. C. R. **153**, 1108-1112.

Das Äquilibrieren der Motoren soll das von ihnen hervorgerufene lästige und auch gefährliche Vibrieren verhüten. Der Verf. zeigt, daß dieses Ziel theoretisch durch die Hinzufügung zweier oder dreier Hülfsmassen erreichbar ist. Lp.

F. Pfeiffer. Die Coulombschen Reibungsgesetze. Poske Zs. **24**, 101-109.

In derselben Zeitschrift **23**, 214-223, 1910, hatte der Verf. in einem Bericht über die Ferienkursvorträge von F. Klein die Coulombschen Gesetze erörtert. Auf die gegen diese Gesetze erhobenen Einwände wollte er in einem anderen Artikel eingehen. Diese Besprechung ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes, der im wesentlichen ein Auszug aus der im Vorjahre erschienenen Abhandlung des Verf. ist. „Zur Frage der sogenannten Coulombschen Reibungsgesetze." (F. d. M. **41**, 808, 1910). Lp.

J. Kozák. Einführung in die äußere Ballistik und deren Anwendung zur Berechnung der Schießtafeln. Wien und Leipzig: Carl Fromme. XVI u. 242 S. gr. 8°. Mit 49 Fig. im Texte, einer Tafel in Farbendruck und einem Sonderheft mit 21 Tabellen (56 S.).

Das dem Andenken von Nikolaus Freiherrn von Wuich gewidmete Werk umfaßt fünf Abschnitte: I. Der Luftwiderstand in seiner besonderen Beziehung zur äußeren Ballistik. II. Integration der Differentialgleichungen für die Bewegungselemente der Bahn des Geschoßschwerpunktes. III. Rechnungen mit dem quadratischen Luftwiderstandsgesetze. IV. Rechnungen mit dem biquadratischen Luftwiderstandsgesetze. V. Zusätze.

Nach dem Vorwort hat der Verf. den von Wuich in seiner Ballistik eingeschlagenen Gang im großen und ganzen beibehalten; mit Erlaubnis der Angehörigen durfte er die von der genannten berühmten Autorität auf dem Gebiete des Schießwesens gesammelten Vorarbeiten zu einem Lehrbuche der äußeren Ballistik verwerten. Das Buch soll dem Anfänger die Möglichkeit bieten, sich durch Selbststudium leicht in die Anfangsgründe der Ballistik einzuarbeiten. Deshalb ist die Darstellung breit, die Rechnungen sind ausführlich mitgeteilt. Betreffs der parabolischen Bewegung ist auf des Verf. „Geschoßbewegung im Vakuum" verwiesen (F. d. M. **41**, 811, 1910). Der Bearbeitung der in Österreich üblichen Berechnung der Schießtafeln ist eine besondere Aufmerksamkeit zugewendet. Das Sonderheft enthält 21 Tabellen, die für die Lösung von Zahlenbeispielen und für die Berechnung der Schießtafeln und sonstigen Schießbehelfe nützlich sind. Das sehr gut ausgestattete Buch wird besonders den Offizieren, die sich mit der Theorie des Schießwesens zu befassen haben, gute Dienste leisten. Lp.

P. Haupt. Erwiderung auf den Aufsatz von C. Cranz „Ballistische Bemerkungen" im Oktoberheft 1909 dieser Zeitschrift, mit Rückblicken auf Siacci und Euler-Otto. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 53 u. 54, 321-336, 401-427.

C. Cranz. Über die empirischen Luftwiderstandsgesetze und über den gegenwärtigen Stand der theoretischen äußeren Ballistik. Eine Antwort an Herrn Oberst a. D. P. Haupt auf dessen Bemerkungen in Nr. 46 (1910) und Nr. 53/54, 1911. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 56, 85-115.

Die sehr temperamentvollen Angriffe des ersten Verf. bekunden den Standpunkt des praktisch tätig gewesenen Offiziers, der sich in die streng wissenschaftliche Denkweise nicht hineinfinden kann. Der angegriffene Verf. des zweiten Aufsatzes widerlegt Punkt für Punkt in widerspruchsloser Beweisführung alle Argumente seines Gegners; trotz der Ausführlichkeit und der philosophischen Ruhe, die er dabei bewahrt, bedeutet seine Arbeit aber wohl in Hinsicht auf die Überzeugung des Widerparts verlorene Liebesmühe; wegen der Anhänger, die solche Angriffe leicht erwerben, ist eine scharfe Zurechtweisung aber doch nicht nutzlos. Lp.

Engelhardt. Beitrag zum „Luftwiderstand der Geschosse nach der kinetischen Theorie der Gase“. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 52, 245-266.

Bearbeitung der Frage von ähnlichen Grundlagen aus wie in der Arbeit von Haupt (F. d. M. **41**, 813, 1910) mit Ergebnissen, die in manchen Punkten von denen in jener Abhandlung abweichen. Es erscheinen hierbei Formeln, deren Mühseligkeit bei einem etwaigen Gebrauch der Verf. durchaus zugibt. Doch will er sich durch eine Änderung nicht dem Vorwurfe unmathematischer Willkür aussetzen. Lp.

Rothe. Graphische Bestimmung der Flugbahn eines Geschosses. Artill. Monatsh. 1910, Nr. 59, 371-383.

Es wird ein Verfahren erläutert, durch das die bei analytischer Behandlung entstehenden Übelstände beseitigt und die Flugbahn des Geschosses genau bestimmt werden kann, vorausgesetzt, daß einwandfreie Widerstandskurven des betreffenden Geschosses vorliegen. Das Verfahren beruht auf dem Zusammenhang zwischen Zeit-Weg-, Zeit-Geschwindigkeits-, Zeit-Beschleunigungskurve. Mit Hülfe der als bekannt vorausgesetzten Luftwiderstandskurven des Geschosses wird zunächst die Zeitbeschleunigungskurve und daraus durch Integration die Zeit-Geschwindigkeits- sowie die Zeit-Wegkurve gewonnen. Lp.

S. v. Kobbe. Zur Berechnung der Geschoßbahnelemente. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 55, 22-36.

In dem Aufsatze „Der Luftwiderstand der Geschosse nach der kinetischen Theorie der Gase“ (F. d. M. **41**, 813, 1910) hat Haupt für Geschwindigkeiten $v > 500\,m$ den Luftwiderstand proportional zu $v^2 + \frac{1}{3} \cdot 500^2$ gefunden, für $v < 500$ dagegen proportional zu v^3. Der Verf. des vorliegenden Artikels hat diese Theorie in eine einfache, einer leichten Berechnung der Geschoßbahn förderliche Form zu kleiden sich bemüht und dann Zahlenbeispiele für die

Krupp sche 28-cm Schiffskanone $L/50$ berechnet. Die Vergleichung mit der ihm zur Verfügung gestellten „Vorläufigen Schußtafel" für dieses Geschütz ergibt Abweichungen, die sich durch die von Haupt hierfür herbeigezogenen Schwankungen der Atomgeschwindigkeit allein kaum noch erklären lassen.
Lp.

S. v. KOBBE. Über die Form der Geschoßspitze. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 58, 283-291.

Der Verf. will eine Ergänzung der Stelle im Lehrbuch der Ballistik von Cranz geben, wo kurz die Resultate der theoretischen Untersuchungen nach der Newton schen Theorie entwickelt sind. Er hat aber dabei die vorhandene Literatur nicht beachtet (vgl. Kneser, F. d. M. **33**, 387, 1902). Die gegebenen Herleitungen genügen nicht den strengen Anforderungen der Variationsrechnung.

Am Schlusse des Artikels wird der Vorschlag gemacht, die Newton sche Kurve durch die kubische Parabel $y = r - r\,(1 - x/h)^3$ zu ersetzen. Lp.

Neue Formel zur Berechnung des Fallwinkels. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 57, 206-210.

Ist Y die Scheitelhöhe der Flugbahn, X die Schußweite, φ der Abgangswinkel, ω der Fallwinkel, T die Flugzeit, so hat Cranz nach Siacci die Formel gegeben $Y = \frac{1}{8}(\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\omega)$, während Haupt $Y = \frac{1}{8}gT^2$ setzt. Vereinigt man beide, so folgt

$$(4) \qquad \omega = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{gT^2}{X} - \operatorname{tang}\varphi\right).$$

Setzt man dagegen $Y = \frac{1}{4}X \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi + \omega)$, so erhält man

$$(6) \qquad \omega = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{gT^2}{2X}\right) - \varphi.$$

Der Aufsatz enthält einige Beispiele zur Berechnung von ω nach (4) oder (6). Von gewissen Ausnahmen abgesehen, liefern beide Formeln „bemerkenswerte Übereinstimmung mit den Schußtafeln." Lp.

T. HAYASHI. Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air. Batt. G. **49** [(3) **2**], 231-232.

Die von Appell gegebene Differentialgleichung dieser Bewegung (Arch. der Math. u. Phys. (3) **5**, 177-179; F. d. M. **34**, 786, 1903) wird in eine andere Gestalt transformiert und daraus ein integrierbarer Fall abgeleitet. Lp.

Wostrowsky. Bemerkung zu dem Aufsatze: Empirische Formeln zur Bestimmung der Bewegungsgröße des Geschosses in Luft". Artill. Monatsh. 1911, Nr. 49, 76-78.

Theoretische Ableitung der Formel $v = bx^n/(a + x^n)$. Vgl. F. d. M. **41**, 814, 1910. Lp.

Comte de Sparre. Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité. Brux. S. sc. **35** B, 79-150. Auch sep. Paris: Gauthier-Villars. 76 S. 8°.

Der Verf. hat ebenso wie seine Vorgänger in seinen früheren theoretischen Arbeiten über den Gegenstand (vgl. F. d. M. **35**, 743, 1904) angenommen, das Geschoß sei vollkommen, die Anfangsgeschwindigkeit falle in die Achse der Figur, die anfängliche Rotation geschehe um diese Achse. Nun sind aber die Anfangsbedingungen nie durchaus regelmäßig, und das Geschoß ist nie streng vollkommen. Daher war es von Interesse, dem Einflusse nachzuspüren, den auf die Bewegung kleine Unvollkommenheiten des Geschosses oder auch Anfangsbedingungen, die nicht völlig normal sind, haben können. Das geschieht in der vorliegenden Arbeit.

Es wird angenommen, die äußere Oberfläche des Geschosses sei in aller Genauigkeit eine Umdrehungsfläche, deren Achse die „Figurenachse" genannt wird; aber es wird vorausgesetzt, daß der Schwerpunkt nicht streng auf dieser Figurenachse liegt, daß das Trägheitsellipsoid nicht streng ein Drehellipsoid ist, und daß die Achse der anfänglichen Rotation und die anfängliche Geschwindigkeit einen kleinen Winkel mit der Figurenachse bilden. Darauf wird gezeigt, daß unter den Unregelmäßigkeiten, die das Geschoß beim Abgange aufweisen kann, die von dem Winkel der Figurenachse mit der anfänglichen Rotationsachse oder von dem Winkel der Figurenachse mit der benachbarten Hauptträgheitsachse herrührenden einen vorwiegenden Einfluß haben; dagegen haben die von einem Winkel der Anfangsgeschwindigkeit mit der Figurenachse oder von einer geringen Exzentrizität des Geschosses herrührenden Unregelmäßigkeiten einen viel kleineren Einfluß.

In bezug auf den Luftwiderstand hält der Verf. bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse es für das beste, den dynamischen Druck auf der Vorderseite nach den vom Obersten Vallier angedeuteten Überlegungen zu berechnen und die Annahme zu machen, der Überschuß des Widerstandes stamme von der partiellen Leere auf der Rückseite her. Übrigens ist die in der Abhandlung befolgte Methode völlig unabhängig von jeder Hypothese hierüber; es bleibt dem Versuche die Sorge überlassen, die in den Formeln auftretenden Koeffizienten zu bestimmen.

Die Gleichungen der Bewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt vereinfachen sich bedeutend, wenn man den Winkel der Figurenachse mit der des resultierenden Paares der Bewegungsgrößen vernachlässigt. Diese Vereinfachung ermöglicht aber weder die Veranschlagung der Stabilitätsbedingungen des Geschosses, noch die des Einflusses der Unregelmäßigkeiten des Geschosses oder der Anfangsbedingungen; dafür ermöglicht sie aber die Bestimmung der Bewegung selbst mit einer hinreichenden Genauigkeit. Eine Anwendung davon wird auf den Fall gemacht, bei welchem die Geschwindigkeit hinreichend ver-

ringert ist, sodaß der Winkel der Geschoßachse mit der Tangente einen beträchtlichen Wert erhält, und dann wird eines der Zahlenbeispiele des Generals Sabudski geprüft. Auf die Arbeiten dieses berühmten Ballistikers geht der Verf. überhaupt, besonders in der Einleitung, ein, um an ihnen Kritik zu üben. Ebenso gibt er am Schlusse eine längere kritische „Note“ (S. 142-150) zu der Theorie der Bewegung der Geschosse um ihren Schwerpunkt, wie sie von Cranz in der neuen Ausgabe seines Lehrbuchs der Ballistik gegeben wird (Leipzig, 1910, B. G. Teubner, S. 317 ff.). Lp.

SCHATTE. Über die Beziehungen zwischen Visierwinkel, Zielentfernung und Zielwinkel im leeren Raume. Kriegstechn. Zs. **14**, 450-460.

Soll ein erhöht liegender Punkt P von einem Punkte O aus getroffen werden, so muß die Visierlinie innerhalb der Vertikalebene durch OP einen Winkel φ gegen P nach oben bilden; dieses ist der „Visierwinkel“, während der „Zielwinkel“ α der Winkel von OP mit der Horizontalebene ist; es ist also der Abgangswinkel $\varepsilon = \alpha + \varphi$. Setzt man noch $OP = r$, so sind die Koordinaten von $P: x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$, und es lassen sich die bekannten Gleichungen der parabolischen Wurfbewegung zur Ableitung von Gleichungen zwischen φ, r, α benutzen. Durch Diskussion der erhaltenen Formeln gewinnt der Verf. einige einfache Beziehungen. Besonders werden die Maxima von φ genauer untersucht. „Der geometrische Ort derjenigen Punkte der Schußebene, von denen jeder unter den auf demselben Kreise um O liegenden Treffpunkten ein Maximum oder Minimum an Visierstellung erfordert, ist die Scheitelellipse“, d. h. der geometrische Ort der Scheitel aller Flugbahnen“. Lp.

A. NOWAKOWSKI. Aiziersches Einschießen gegen Luftfahrzeuge auf Grund perspektivischer Streuungen. Mitt. üb. Art. u. Gen. 1911, 485-514.

Im Novemberheft der Revue d'Artillerie von 1903 hat Aizier das Verfahren beschrieben, das in dem vorliegenden Aufsatze durch theoretische Betrachtungen für den angegebenen Zweck als sehr brauchbar erwiesen wird. Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: 1. Das Wesen des Aizierschen Einschießverfahrens. 2. Über perspektivische Streuungen. 3. Über den Fehler im Erfassen eines bewegten Zielpunktes. 5. Fehler bei der Beurteilung der Zielentfernung auf Grund gemessener Abstände des Sprengpunktes. 6. Vergleichsstreuungen. 7. Beurteilung des Aizierschen Einschießverfahrens. „Das Verfahren ist um so genauer, je größer der Abstand der die Schußpaare abgebenden Geschütze ist. Je größer dieser Abstand ist, um so geringer ist auch der Einfluß einer schnellen Seitwärtsbewegung auf die Genauigkeit des Verfahrens.“ 8. Beispiele. 9. Ergebnisse. „Ist man in der Lage, das Schießen gegen Luftfahrzeuge derart vorzubereiten, daß die Schußpaare von Geschützen abgegeben werden können, die etwa 1000 m von einander entfernt sind, dann ist das Aiziersche Einschießverfahren gegen ein beliebig manövrierendes Luftfahrzeug fast ebenso genau wie ein gewöhnliches auf Grund richtig

beobachteter kurzer und weiter Sprengpunkte". 10. Anhang. Verwertung der Messungen seitlicher Beobachter. Lp.

E. Lhoste. Réglage du tir par observation unilatérale au moyen d'une règle à calcul. Revue d'Artillerie **78**, 250-267.

Zum Einschießen auf ein Ziel hat der Verf. ein Verfahren erdacht, das er beschreibt, und dessen Berechnung er mittels eines Rechenlineals ausführt. Die Redaktion der Zeitschrift bemerkt dazu: „Das in dem Artikel beschriebene Verfahren ist sehr originell und gibt zu keinem theoretischen Einwande Anlaß. Unter dem praktischen Gesichtspunkte betrachtet, erhält es ein anderes Aussehen, da es im Gelände den Gebrauch eines wirklichen Rechenlineals erfordert. Die Erfahrung der letzten Jahre hat aber nach und nach dahin geführt, im Felde die Ausführung jeder Rechnung oder jeder Operation zu verwerfen, die nicht von der elementarsten Einfachheit ist". Lp.

Lamotte. Procédés graphiques de tir indirect. Revue d'Artillerie **78**, 289-334, 384-408.

Die vorliegende Studie zerfällt in zwei Teile: 1. Darlegung der graphischen Methoden für den indirekten Schuß a) ohne Karten, b) mit Karten. 2. Betrachtungen über das provisorische Reglement für das Manöver der Feldartillerie. Der erste Teil gibt zu einer Reihe geometrischer Betrachtungen Anlaß. Lp.

P. Charbonnier. Balistique d'aéroplane. Le problème de l'aéro-cible. Revue d'Artillerie **79**, 133-153.

„In der gegenwärtigen Note wollen wir die Bahn der Geschosse berechnen, die man aus einem Flugzeug fallen läßt, und Schußtafeln geben, welche eine vernünftige Einrichtung der Richtapparate ermöglichen. Wenn der Luftwiderstand nicht hineinspielte, so gehörte die Aufgabe zu den einfachsten, und das erste Kapitel gibt ihre allgemeine Lösung. In dem zweiten Kapitel berechnen wir die atmosphärische Bahn einer sphärischen Bombe von 15 cm im Gewichte von 7,5 kg und geben die Schußtafeln für dieses Geschoß".

Lp.

J. J. Thomson. The dynamics of a golfball. Nature **85**, 251-257.

C. G. Knott. The dynamics of a golfball. Nature **85**, 306.

Der erste Aufsatz gibt einen Vortrag wieder, der am 18. März 1910 in der Royal Institution gehalten wurde. Der zweite Artikel enthält einen Hinweis auf die überraschende Ähnlichkeit der Stromlinien elektrischer Partikelchen in einem Experiment von Sir J. J. Thomson und den von P. Tait berechneten Bahnen eines Golfballes (Scient. Papers **2**, 386). Lp.

J. Andrade. Sur un nouvel organe régulateur des chronomètres. C. R. **153**, 496-497.

Durch das Anbringen einer zweiten Spirale an die von den früheren Konstruktoren Le Roy und Arnold benutzte Spirale erreicht Andrade eine neue Anordnung, die ohne Anwendung der Terminalkurven sowohl den Isochronismus, als auch das Sinusgesetz der Schwingungen des Balanciers wahrt. Lp.

E. Esclangon. Sur un régulateur rotatif à vitesse fixe ou variable. C. R. **152**, 32-35.

Gibt eine Konstruktion und statische Berechnung eines Geschwindigkeitsregulators für Präzisionsinstrumente an, der mit Hülfe von Kniehebeln und Schwimmern eine linear mit der Muffenverschiebung wachsende Verstellungskraft hat. Rr.

Weitere Literatur.

Anschütz. The history, description, theory, and practice of the gyroscope compass. London: Rees. (Vgl. F. d. M. **41**, 805, 1910.)

J. Arnoult. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. (Thèse.) Paris: Gauthier-Villars. 153 S. 4°.
Vgl. F. d. M. **41**, 807, 1910.

K. Bohlin. Integralentwicklungen des Dreikörper-Problems II. Stockholm. Astronom. Jakttagelser. (Upsala 1911.) 47 S.
Vgl. F. d. M. **39**, 996, 1908.

K. Bohlin. Integralentwickelungen des v. Haerdtlschen Dreikörper-Problems. (Aus „Astronomiska iakttagelser och undersökningar å Stockholms observatorium".) Berlin: R. Friedländer u. Sohn, 36 S. 4 Fig., 1 Taf. Lex 8°.

E. Brenken. Die Horizontalkomponente des Foucaultschen Pendelversuches. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 112-113.

Buchanan. A class of periodic solutions of the problem of three bodies, two of equal mass, the third moving on a straight line. Diss. Chicago Univ. 1911; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 510-511.

E. Correale. Intorno alla discesa di un grave su particolari curve. Napoli Acc. 25 S. 8°.

Groos. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dem Gebiet der Schießlehre. Berlin.

Ch. Halphen. Sur les potentiels des accélérations de divers ordres. S. M. F. Bull. **39**, 169-175.
Referat in Kapitel X, 5.

C. Herbst. Über Schwingungsbewegungen. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 151-152.

F. Jüttner. Über die allgemeinen Integrale der gewöhnlichen chemischen Kinetik. Festschr. Univ. Breslau. 10 S. Breslau: Trewendt u. Granier. Lex. 8°.

V. E. Johnson. The gyroscope. An experimental study. From spinning-top to mono-rail. London: E. and F. N. Spon, Ltd., New York: Spon and Chamberlain. 52 S. [Nature **86**, 211.]

E. Kasner. A second converse of the theorem of Thomson and Tait. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 169.

Vgl. F. d. M. **41**, 79 ', 1910.

K. Laves. The curves of equal action for elliptical coordinates. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 301.

E. Müller. Über die Stabilität der Bewegung. Diss. Zürich. 35 S. 8° (1910).

R. Edler von Portenschlag Ledermayr. Über das Schießen der schweren Artillerie im Gebirge. Mitt. üb. Art. u. Gen. 1911, 616-638.

H. Rohne. Einige Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Schießlehre. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 57, 210-215.

R. Rosenbauer. Die oszillatorische Bewegung einer Kreisscheibe im Innern einer festen Zylinderfläche. Diss. Leipzig. 46 S. 8°.

J. Tomas. Über krummlinige Bewegung. Räumliche Tautochrone. Progr. des Priv.-Gymn. in Kremsier. 27 S. (Böhmisch.)

Em. Schulze. Die durch ein Gewicht hervorgerufene Zentralbewegung. Poske Zs. **24**, 151-154.

V. Zednik Edler v. Zeldegg. Beschießung lenkbarer Luftfahrzeuge. Mitt. üb. Art. u. Gen. 1911, 1-21.

B. Hydrodynamik.

W. v. Ignatowsky. Zur Hydrodynamik vom Standpunkte des Relativitätsprinzips. Physik. Zs. **12**, 441-442.

Die hydrodynamische Gleichung der gewöhnlichen Mechanik lautet

$$(1) \qquad \varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\nabla \pi,$$

wo ϱ die Dichte und π (statt des üblichen p) den Druck bedeutet. Mit Berücksichtigung des Relativitätsprinzips wird die allgemeine Gleichung der Hydrodynamik für reibungslose Flüssigkeiten und bei Abwesenheit der Wärmeleitung:

$$(2) \qquad \varrho \frac{d \dfrac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} + \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} D = -\nabla \pi,$$

wo

$$D = \frac{n}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \frac{d\pi}{dt} = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Bei Vernachlässigung des Relativitätsprinzips ist $n=0$, $c=\infty$, $D=0$, und die Gleichung (2) geht in (1) über. Lp.

Lord RAYLEIGH. Hydrodynamical notes. Phil. Mag. (6) **21**, 177-195.

1. Potentielle und kinetische Energie der Wellenbewegung. Wenn keine Zerstreuung stattfindet, so ist die kinetische Energie einer fortschreitenden Welle zur Hälfte potentiell, zur Hälfte kinetisch. Derselbe Satz bleibt bestehen, wenn das Medium dispersiv ist.

2. Wellen, die in seichteres Wasser übergehen, unter der Annahme, daß der Übergang so allmählich erfolgt, daß kein Verlust an Energie durch Reflexion oder auf andere Art eintritt. Es wird für die zweidimensionale Bewegung untersucht, welche Längen in der Fortpflanzungsrichtung als entsprechende anzusehen sind.

3. Konzentrierte anfängliche Störung unter Einbeziehung der Kapillarität. Die bezügliche Formel von W. Thomson (Lord Kelvin) wird durch eine andere ersetzt, die für ein großes t (Zeit) gilt. „Die Einführung der Kapillarität ändert sehr den Charakter der Lösung."

4. Periodische Wellen in tiefem Wasser, die ohne Änderung des Typus fortschreiten. Im Phil. Mag. (5) **1**, 257-279 (F. d. M. 8, 613, 1876) hat der Verf. gezeigt, daß manche Ergebnisse aus der Stokesschen Abhandlung vom Jahre 1847 sehr einfach aus dem Ausdrucke für die Stromfunktion in x und y abgeleitet werden können; jetzt hat er gefunden, daß auf alle Stokesschen Resultate aus dem Supplement seiner Abhandlung (1880) dieselbe Methode ebenso leicht Anwendung findet.

5. Flutläufe. „Es scheint möglich, daß Wellen, die der Flut entgegenlaufen, mehr oder weniger sich dem Gerstnerschen Typus nähern und so eine größere Höhe und einen schärferen Winkel zu erlangen vermögen, als sonst zu erwarten wäre."

6. Wirbelbewegung in einer Ecke. Die Bewegung einer unzusammendrückbaren, unzähen Flüssigkeit wird als zweidimensional betrachtet und als begrenzt durch zwei Ebenen, die unter einem Winkel α zusammenstoßen. Wenn keine Rotation vorhanden ist, so kann die Stromfunktion ψ, die $\nabla^2\psi = 0$ befriedigt, durch eine Reihe mit Gliedern $r^{\nu\pi/\alpha}\sin(\nu\pi\theta/\alpha)$ ausgedrückt werden ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Die Möglichkeit einer wirbellosen Bewegung ist dadurch bedingt, daß die Grenzen sich nicht schließen. In dem Falle, daß bei geschlossenen Grenzen die Rotation ω gleichförmig ist, genügt die Stromfunktion der allgemeinen Gleichung

$$\nabla^2\psi = \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 2\omega.$$

Hierfür wird in mehreren Fällen die Lösung entwickelt.

7. Stetige Bewegung in einer Ecke einer zähen Flüssigkeit. Hier handelt es sich um die Gleichung $\nabla^4\psi = 0$. „Das allgemeine so vorgelegte Problem ist von großer Schwierigkeit, und alles, was hier versucht wird, ist die Betrachtung eines oder zweier besonderen Fälle. Wir fragen, welche Lösungen möglich sind, so daß ψ als eine Funktion des Radiusvektors r proportional zu r^m ist." Lp.

M. SCATTAGLIA. Su alcune funzioni di punto che si presentano nel moto di un fluido. Batt. G. **49**, [(3) 2], 207-214.

„Die gegenwärtige Note handelt von einigen Punktfunktionen von invariantem Charakter, die bei der Bewegung einer Flüssigkeit vorkommen, und von ihren ersten nach der Zeit genommenen totalen Derivierten. Die Berechnung dieser Derivierten ist in zwei Abhandlungen Appells durchgeführt worden (F. d. M. **34**, 802, 1903); doch ist diese Rechnung recht lang, auch sind die Bedeutungen mancher invarianten Eigenschaften, die in die Rechnung eingehen, nicht ins rechte Licht gestellt. Durch die Benutzung der jungen Theorie der vektoriellen Homographien in bezug auf den Punkt, von dem sie Funktionen sind, schreitet aber die Rechnung viel einfacher und verhältnismäßig kurz fort und gelangt dabei zu Resultaten, die ich für interessant halte.‘ Lp.

K. Żorawski. Über stationäre Bewegungen kontinuierlicher Medien. Krak. Anz. (A) 1911, 1-17.

In einem n-fach ausgedehnten ebenen Raume sei ein rechtwinkliges System von Parallelkoordinaten x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ vorgelegt; die Zeit werde mit t bezeichnet. Die infinitesimale Transformation

$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \Sigma_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo u_i gegebene Funktionen von x_i und t sind, bestimmt eine Bewegung eines kontinuierlichen Mediums in n-dimensionalem Raum R_n, bei welcher die u_i die Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen des Mediums in bezug auf die Achsen der x_i sind. Es wird gefragt, unter welchen Bedingungen man im R_n solche, im allgemeinen mit der Zeit veränderlichen, rechtwinkligen Systeme von Parallelkoordinaten $\bar{x}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \dots, n)$ ausfindig machen kann, in bezug auf welche die vorgelegte Bewegung des Mediums stationär wäre. Die Bestimmung derartiger Systeme von Parallelkoordinaten in Fällen, wo sie möglich ist, wird durch Integration gewisser Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten. Die Aufstellung der genannten Bedingungen steht in naher Beziehung zu jenen Transformationseigenschaften der quadratischen Formen, welche diese Formen bei Ausführung orthogonaler Substitutionen aufweisen. Bei der Behandlung der Aufgabe werden die vorkommenden Formeln kinematisch gedeutet; die Betrachtung wird auf den allgemeinen Fall beschränkt, in welchem eine gewisse Funktionaldeterminante nicht identisch gleich Null ist. Lp.

K. Żorawski. Invariantentheoretische Untersuchung gewisser Eigenschaften der Bewegungen kontinuierlicher Medien. Krakauer Anz. 1911, 175-218.

Gewisse Fragen aus der Theorie der unendlich kleinen Deformationen der Kontinua sind mit Eigenschaften der Differentialformen zweiten Grades verbunden, vgl. die frühere Arbeit des Verf. F. d. M. **31**, 724, 1900. Mehrere hier vorkommende Größen und Operationen bleiben invariant, wenn man das ursprüngliche feste rechtwinklige Koordinatensystem ersetzt durch ein solches,

das seine Lage mit der Zeit beliebig ändert. Jene Größen und Operationen gehören daher zu den Differentialinvarianten D einer unendlichen Transformationsgruppe G. Es ist die Frage, welche Ausdrücke zu der — genauer zu untersuchenden — Gesamtheit der D hinzuzufügen sind, um für die betrachtete Bewegung die Gesamtheit der Differentialinvarianten der Gruppe der euklidischen Bewegungen zu erhalten.

Demgemäß werden zunächst für Bewegungen kontinuierlicher Medien die D von G aufgestellt. Unter den D befinden sich gewisse grundlegende, die in bezug auf die Ableitungen erster Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten nach den Koordinaten von der Auflösung einer algebraischen Gleichung, sowie von gewissen Quadratwurzeln abhängen. Die invarianten Operationen sind die totale Ableitung nach der Zeit t und die Ableitungen nach Bogenlängen gewisser Kurvenscharen.

Bei der Ausübung dieser Operationen auf Differentialinvarianten gelangt man zu solchen, die nicht mehr alle voneinander unabhängig sind; sie genügen vielmehr gewissen Differentialrelationen, die aufzustellen sind.

Das weitere hängt von der Differentialform ab, die im Zähler des Ausdrucks für die Dilatationen der Linienelemente steht. Die Differentialrelationen zwischen den D sind zum Teil von diesem speziellen Charakter unabhängig; dieser Teil wird von dem Reste geschieden. Das Hauptergebnis ist die Aufstellung aller D der Gruppe der euklidischen Bewegungen und der zugehörigen Differentialrelationen. Hat im R_n ein Punkt die Parallelkoordinaten x_i, so kann die Bewegung eines kontinuierlichen Mediums durch die infinitesimale Transformation

$$(1) \qquad Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i, t)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

festgelegt werden. Man führe neben den x_i noch andere Parallelkoordinaten $\bar{x}_\lambda$ ein, so daß

$$(2) \qquad x_i = A_i(t) + \sum_{\lambda=1}^{n} A_{i\lambda}(t)\bar{x}_\lambda,$$

wo die $A_{i\lambda}$ an die Relationen gebunden sind:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{i\lambda} A_{i\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu}, \quad |A_{i\lambda}| = 1,$$

wo $\varepsilon_{\lambda\mu} = 1$ oder 0, je nachdem $\lambda = \mu$ oder $\lambda \neq \mu$. Dadurch gehe f in $\bar{f}$ und Df in $\bar{D}\bar{f}$ über. Die u_i lassen sich dann linear in den $\bar{x}_\lambda$ und $\bar{u}_\lambda$ darstellen. Diese Beziehungen sind aber von der Art, wie in der Kinematik, nämlich solche zwischen den Geschwindigkeitskomponenten einer Bewegung in zwei Achsensystemen, deren gegenseitige Lage sich mit der Zeit ändert.

Man kann die Beziehungen zwischen den u_i und $\bar{x}_\lambda$, $\bar{u}_\lambda$ auch in eine einzige zusammenfassen und dadurch leichter interpretieren. Es bedeute L zur Zeit t ein Kurvenstück, ferner C die Zirkulation für L der Bewegung Df (1) in bezug auf die Achsen x_i, $\bar{C}$ das entsprechende in bezug auf die Achsen $\bar{x}_\lambda$, endlich C' die Zirkulation der Bewegung (2) in bezug auf die Achsen x_i. Dann lautet die gewünschte Zusammenfassung einfach (4) $C = C' + \bar{C}$, woraus rückwärts wegen der Willkür von L wieder die Beziehungen zwischen den u_i und den $\bar{x}_\lambda$, $\bar{u}_\lambda$ folgen.

Die Gleichungen (2) bilden unter den Bedingungen (3) eine Gruppe G, die in bezug auf die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung, sowie ihrer Differentialquotienten erweitert werden kann. Die dadurch entstehenden Differentialinvarianten der erweiterten Gruppe G sind zu bestimmen.

Dafür ist von Bedeutung, daß die dx_i mit den $d\bar{x}_\lambda$ durch eine orthogonale Substitution verbunden sind; die charakteristische Gleichung dieser Substitution hat die Eigenschaft, daß ihre Koeffizienten Differentialinvarianten von G sind. Überdies existiert eine quadratische Differentialform in den x_i, deren „Hauptrichtungen" vermöge (2) in die Hauptrichtungen der gleichen Differentialform in den $\bar{x}_\lambda$ übergeführt werden. Weitere Differentialinvarianten höherer Ordnung ergeben sich aus den bisher aufgestellten Gleichungen durch Differentiationen nach den Koordinaten und der Zeit; es empfiehlt sich, diese Differentiationen in Gestalt invarianter Differentialoperationen auszuführen, und deren Poissonsche Symbole zu berechnen.

Die so sich ergebenden Größen p_{rs} ($p_{rs} = - p_{sr}$, $p_{rr} = 0$; $r, s = 1, 2, \ldots, n$) lassen sich als Komponenten in bezug auf Hauptrichtungen gewisser Geschwindigkeiten deuten. Die Differentialinvarianten zweiter Ordnung werden, was für die Folge genügt, systematisch aufgestellt; die Anzahl der unabhängigen unter ihnen beträgt $\frac{n(n+1)^2}{2}$. Sodann werden die Relationen aufgestellt, denen die Differentialinvarianten genügen; es stellt sich hierbei ein enger Zusammenhang mit der Riccischen Theorie der Kurvenscharen heraus.

Behufs Anwendung auf die spezifische Differentialform, die im Zähler des Ausdrucks für die Dilatationen der Linienelemente bei einer Bewegung Df auftritt, ist diese Differentialform als solche zu charakterisieren; es zeigt sich, daß sie im ganzen $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ unabhängigen Bedingungen zu genügen hat. Entsprechend unterliegen die früher für den allgemeinen Fall aufgestellten Differentialinvarianten nunmehr noch einer Anzahl besonderer Beziehungen. Diese letzteren werden in drei verschiedene Kategorien eingeteilt; die bezüglichen Anzahlen sind

$$\frac{n(n-1)}{2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

Durch geeignete Erweiterung gelangt man zu der Gesamtheit der fraglichen Beziehungen. Damit ist dann der Gesamtkreis der differentialinvarianten Bildungen der Gruppe G erschöpft. Sind so die Differentialinvarianten der infinitesimalen Transformation (1) gegenüber der Gruppe (2) unter den Bedingungen (3) erledigt, so beachte man, daß diese Differentialinvarianten auch bei der Gruppe der euklidischen Bewegungen invariant bleiben, d. h. bei der Gruppe (2), falls die A_i und $A_{i\lambda}$ konstante Parameter sind, die nur den Relationen (3) genügen. Bei der letzteren Gruppe bleiben aber noch gewisse andere Größen invariant. Die Gesamtheit der Differentialinvarianten dieser letzteren Transformationsgruppe ist daher noch aufzustellen, was am Schlusse der Abhandlung ausgeführt wird. My.

E. Vessiot. Sur les transformations infinitésimales et la cinématique des milieux continus. Darb. Bull. (2) **35**, 233-244.

Jede Bewegung einer Flüssigkeit wird analytisch ausgedrückt durch die endlichen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe, die von einer infinitesimalen Transformation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$$

erzeugt wird, unter u, v, w Funktionen von x, y, z, t verstanden. Jedes bei dieser eingliedrigen Gruppe invariante Gebilde stellt dann eine Eigenschaft dar, die die Flüssigkeit während des ganzen Verlaufes der Bewegung bewahrt.

Diese Betrachtungen erläutern und vereinfachen die klassische Theorie der Kinematik kontinuierlicher Medien. Der Verf. zeigt das an der Umgestaltung, die die Linienelemente, die Raumelemente und die Flächenelemente der Flüssigkeit erleiden, an der Theorie der Wirbelfäden usw. Wie erwähnt, hat auch schon Żorawski in einigen in den Abhandlungen der Krakauer Akademie veröffentlichten Arbeiten ähnliches entwickelt (Referate vorstehend).

El.

E. Vessiot. Sur la cinématique des milieux continus à n dimensions. C. R. **152**, 1732-1735.

Der Verf. geht aus von Gleichungen, die eine einparametrige Bewegungsgruppe, das Bild der Bewegung der Flüssigkeit, definieren, und gewinnt aus ihnen Formeln für die infinitesimale Deformation des flüssigen Mediums. Es ergibt sich für $n > 3$ im allgemeinen kein Wirbelvektor, sondern ein Wirbelkomplex. Die bezüglichen Formeln geben die Änderung des Wirbelflusses, und man kann unter dem Namen „Wirbelmannigfaltigkeiten“ (multiplicités de tourbillon) solche betrachten, die einem Wirbelflusse entsprechen, der immer Null ist. Von den sich erhaltenden Wirbelmannigfaltigkeiten aus kommt der Verf. zur Verallgemeinerung der Helmholtzschen Gleichungen und zu den Gleichungen von Cauchy. Die Existenz eines Potentials der Beschleunigungen ist äquivalent mit der der Integralinvariante eines Systems von Differentialgleichungen usw.

Lp.

C. W. Oseen. Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications. Acta Math. **34**, 205-284; **35**, 97-192.

Die Greenschen Methoden, die sich in den verschiedenen Teilen der Physik als so fruchtbar erwiesen haben, sind schon längst in der Theorie der Bewegung einer idealen Flüssigkeit benutzt worden. Es war zu erwarten, daß sie nicht minder ergebnisreich in der Theorie einer zähen Flüssigkeit sein würden, und tatsächlich hat H. A. Lorentz in einer interessanten Abhandlung gezeigt, welchen Nutzen man aus ihnen bei der Erforschung der permanenten Bewegung einer zähen und nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit ziehen kann. Die vorliegende Abhandlung ist dem Studium der verall-

gemeinerten Greenschen Formeln gewidmet, die in der allgemeinen Theorie der Bewegung einer zähen Flüssigkeit vorkommen. Sie ist in zwei Teile geteilt. In dem ersten Teile werden die Greenschen Methoden auf das Problem der Bewegung einer zähen und nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit in drei oder zwei Dimensionen angewandt. In dem zweiten wird die Bewegung einer zähen und zusammendrückbaren Flüssigkeit untersucht. Einige der Resultate hat der Verf. seit 1906 im Arkiv för mat., astron. och fys. veröffentlicht.

Die Wiedergabe der Hauptergebnisse ist unmöglich; ein Lehrsatz, der (S. 222-223 des ersten Teils) das Resultat der vorangegangenen Betrachtungen zusammenfaßt, nimmt mit den zugehörigen Formeln mehr als eine Quartseite ein. Die Unterabteilungen des ersten Teils sind: I. Die verallgemeinerten Greenschen Formeln in dem allgemeinen dreidimensionalen Problem. II. Anwendungen der verallgemeinerten Greenschen Formeln auf das Problem der Bewegung einer unbegrenzten Flüssigkeit. III. Die verallgemeinerten Greenschen Formeln bei einigen besonderen Problemen. — Note: Die Greensche Formel in der Theorie einer idealen Flüssigkeit.

Das Ziel im zweiten Teil ist nicht so weit gesteckt wie im ersten. Der Verf. verzichtet im allgemeinen darauf, explizite Formeln für u, v, w zu geben, weil diese bei dem jetzigen Zustande unserer theoretischen und experimentellen Kenntnisse kein Interesse besitzen. Die Unterabteilungen sind: I. Über eine partielle Differentialgleichung in der mathematischen Physik und über die geradlinige Bewegung einer zähen und zusammendrückbaren Flüssigkeit. II. Über die drei- oder die zweidimensionalen Probleme. III. Über den Grenzfall $\lambda + 2\mu = 0$.

Lp.

G. Hamel. Zum Turbulenzproblem. Göttinger Nachr. 1911, 261-270.

Der Verf. hat prinzipielle Bedenken gegen die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung, wie Sommerfeld sie in seinem römischen Vortrag ausgeführt hat (F. d. M. **40**, 806, 1909). Er verfolgt den Weg weiter, den Reynolds und H. A. Lorentz eingeschlagen haben. Er nennt einen solchen Wert der mittleren Geschwindigkeit „kritisch", unterhalb dessen Stabilität herrscht, während es oberhalb desselben stets Störungen gibt, deren Energie anfangs zunimmt (womit noch keine Labilität gewährleistet ist). Er gelangt zu der bestimmten Formulierung: Die kritische Geschwindigkeit (im obigen Sinne) ist wesentlich der erste Eigenwert einer linearen Integralgleichung, deren Kern aus der Greenschen Funktion der Differentialgleichung $\Delta^2\varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \varphi = 0$ zu bilden ist, d. h. der Lösung dieser Differentialgleichung für den unendlich langen Parallelstreifen, welche sich an der Stelle ξ, η wie $r^2 \log r$ $[r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]$ verhält und am Rande nebst ihrer ersten Normalableitung verschwindet.

Lp.

Th. von Kármán. Über die Turbulenzreibung verschiedener Flüssigkeiten. Physik. Zs. 12, 283-284.

In einer Experimentaluntersuchung sind E. und M. Bose zu der Auffassung gelangt, daß die Flüssigkeiten in dem geordneten (Poiseuille-

schen) und in dem turbulenten (hydraulischen) Strömungszustande verschiedene Zähigkeitskoeffizienten haben. Dieses Verhalten der verschiedenen Flüssigkeiten ist jedoch eine natürliche Folge der Ähnlichkeitsgesetze, und die „spezifische Zähigkeit im turbulenten Zustande“ kann auf Grund einer einfachen Ähnlichkeitsberechnung aus der im Poiseuilleschen Zustande gemessenen Zähigkeitskonstante und aus der Dichte berechnet werden, sobald die Abhängigkeit der Ausflußzeit (oder Ausflußgeschwindigkeit) von dem Triebdruck experimentell festgelegt ist. Lp.

M. Brillouin. L'énergie cinétique dans les mouvements continus et dans les mouvements glissants des liquides. Ann. de Chim. et Phys. (8) **22**, 433-440.

Folgende Sätze werden abgeleitet: Bei der unstetigen Helmholtzschen Bewegung ist die kinetische Energie geringer als die des gleichförmigen Stromes, und zwar um so mehr, je weiter man eine stromabwärts gelegene Grenze betrachtet. Bei der Helmholtz schen unstetigen Bewegung ist die kinetische Energie geringer als bei der stetigen für dasselbe Hindernis. — Die Helmholtzschen Bedingungen machen den Überschuß der kinetischen Energie der in permanenter unstetiger Bewegung begriffenen Flüssigkeit über die kinetische Energie, die bei gleichförmiger widerstandsloser Bewegung das Volumen besaß, das die Flüssigkeit bei der Helmholtzschen Bewegung einnimmt, zu einem Minimum. Lp.

M. Brillouin. Les surfaces de glissement d' Helmholtz et la résistance des fluides. Ann. de Chim. et Phys. (8) **23**, 145-230.

Nach einer historischen Übersicht über die Frage fährt der Verf. so fort (S. 152): Selbst in dem Falle des permanenten Zustandes sind die behandelten Beispiele wenig zahlreich und lassen noch viele zu überwindende Schwierigkeiten bestehen. Bis in die letzten Jahre ermöglichten die Kirchhoffschen Methoden die Ermittlung der Lösung in dem Falle ebener, beliebige Winkel bildender Wände; für die krummen Wandungen fehlten die Angaben. Im Jahre 1907 begrenzte eine bedeutsame Abhandlung von Levi-Civita (Scie e leggi di resistenza. Palermo Rend. **23**, 1-37; F. d. M. **38**, 753, 1907) das Gebiet der analytischen Formen, die einem Hindernis mit krummen, stetigen Wänden, abgesehen von einem Winkel nach vorn, in einem gleichmäßigen Strome entsprechen können, und gab den von diesem Hindernis ausgeübten Widerstand in einer äußerst einfachen Form. Allein kein Beispiel wurde explizit behandelt; kein Mittel zur Bildung der Funktion wurde gegeben, wenn man die Gestalt der Wand kennt, und diese Frage scheint wirklich recht schwer zu sein.

Diese Abhandlung von Levi-Civita hat den Verf. zu dem Studium jener Fragen zurückgeführt und ihn bewogen, manche Bemerkungen zu veröffentlichen, die er seit dem Erscheinen seiner Arbeit: „Questions récentes d'hydrodynamique“ gemacht hat (Toulouse Ann. **1**, 1-72; F. d. M. **19**, 978, 1887). Hierüber sollen nunmehr zwei Abhandlungen erscheinen. In der vorliegenden, ersten Arbeit fügt er den Angaben von Levi-Civita eine wichtige Unterscheidung zwischen den „socs“ mit nach hinten schneidendem Rande

und den wirklichen „proues" mit stetig krummer Oberfläche hinzu. Zahlenmäßig wird das einfachste Beispiel behandelt, welches man für eine krumme, von einer einzigen willkürlichen Konstante abhängige Oberfläche wählen kann. Die so erhaltenen Oberflächen sind symmetrisch; je nach dem Werte der Konstante wandeln sie sich ab von einer konvexen Form mit der Öffnung eines Radians bis zu konkaven Oberflächen, deren Ränder sich schneckenartig zusammenrollen, indem sie durch die Normalebene zur Strömung gehen, und zu konkaven Formen ohne Schneckenwindungen. Die meisten von diesen Resultaten sind schon zwei Jahre früher in den Vorlesungen des Verf. am Collège de France (1909) bekannt gegeben worden. Übrigens unterscheidet sich die Art der Darlegung wesentlich von der bei Levi-Civita, besonders bei der Untersuchung des Ausdrucks für den Widerstand, der nicht mit den analytischen Eigenschaften der Lösung, sondern mit den physikalischen Eigenschaften der Strömung in Zusammenhang gesetzt wird. Die Einzelheiten der weit ausgesponnenen Rechnungen können auszugsweise nicht Gegenstand eines Referates sein.

Lp.

M. Brillouin. Surfaces de glissement. Généralisation de la théorie d'Helmholtz. C. R. **153**, 43-45.

„Man kann in vielen Fällen permanente Bewegungen mit überall positivem Drucke ohne Wirbel durch eine sehr einfache Verallgemeinerung der Helmholtzschen Bedingungen möglich machen. Wenn nämlich ein toter Raum sich nicht unbeschränkt stromabwärts erstreckt, kann der Druck darin einen beliebigen positiven Wert haben; die konstante Geschwindigkeit längs der Gleitfläche, welche die Grenze auf der einen Seite ist, kann einen beliebigen Wert unterhalb der allgemeinen Stromgeschwindigkeit haben. Ein solcher Raum entsteht, wenn die Wände übermäßige Höhlungen besitzen oder auch einfach ungenügende Erhabenheiten; die Gleitfläche muß sich an ihren beiden Enden der Wand anpassen, indem sie den vom Verf. in Ann. de Chim. et Phys. (8) **23**, 174 ff. (Bericht vorstehend) angegebenen Bedingungen genügt, wenn die Krümmung der Wand sich stetig ändert." In manchen Fällen genügt jedoch diese Verallgemeinerung nicht; hiervon wird ein Beispiel gegeben. Dann muß man die unendlich kleine Viskosität berücksichtigen, und der Verf. verweist hierzu auf seine Arbeit in Toulouse Ann. (F. d. M. **19**, 978, 1887).

Lp.

P. Duhem. Sur les petites oscillations d'un corps flottant. Journ. de Math. (6) **7**, 1-84.

Nachdem in der Einleitung auf die frühere Behandlung der Stabilitätsfragen schwimmender Körper hingewiesen ist (Poisson, Duhamel, Bravais, Guyou) fährt der Verf. fort:

„Clebsch hat (J. für Math. **57**, 149, 1860) die Theorie der kleinen Pendelschwingungen wieder aufgenommen, die ein schwerer Körper ausführen kann, wenn er an der Oberfläche einer unzusammendrückbaren und schweren Flüssigkeit schwimmt. Er hat den Fehler, den Poisson und Duhamel begangen hatten, sorgfältig bezeichnet und vermieden. Auf diese Weise hat

er richtige Gleichungen erhalten, die aber sehr viel verwickelter sind als die, deren seine Vorgänger sich bedient hatten. Indem er ausdrückte, daß die Perioden aller Pendelschwingungen reell sind, ist er zu einer Bedingung geführt worden, die in keiner Weise mit der im Einklange steht, die man aus der Methode von Lagrange und Lejeune Dirichlet herleitet. Diese kommt nämlich auf die algebraische Aufgabe hinaus, bei der man ausdrückt, daß eine gewisse quadratische Form positiv definit ist; jene verlangt die Lösung einer ganz anderen Frage: es handelt sich darum, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, daß eine gewisse transzendente Gleichung lauter reelle und positive Wurzeln hat.

Ohne das Wesen und die Ursachen dieser Unstimmigkeit tiefer zu ergründen, hatte Clebsch ohne Zögern daraus geschlossen, daß die klassische Regel des Metazentrums ungenau sei. Dieser Schluß, der annehmbar ist, wenn die Regel des Metazentrums keine andere Begründung hätte als die Theorie von Poisson und von Duhamel, könnte von dem Augenblick an nicht gebilligt werden, wo diese Regel durch einwandfreie Schlußfolgerungen aus dem von Lagrange ausgesprochenen und von Lejeune Dirichlet bewiesenen Satze abgezogen würde. Wir müssen also von diesem Zwiespalt zwischen den Ergebnissen der beiden Methoden, die zur Erforschung der Stabilität eines schwimmenden Körpers geführt haben, einen anderen Grund suchen, und zu diesem Zwecke müssen wir zunächst diesen Zwiespalt vollständiger prüfen, als Clebsch es tun zu müssen geglaubt hat. Dieser Mühe wollen wir uns hier unterziehen.

Andererseits wollen wir anfänglich die Frage viel allgemeiner fassen als Clebsch es getan hat. Statt die Flüssigkeit als nicht zusammendrückbar vorauszusetzen, wollen wir sie als nach einem beliebigen Gesetz zusammendrückbar betrachten, aber als von gleichförmiger und konstanter Temperatur. Statt anzunehmen, daß die Schwere die einzige einwirkende Kraft ist, wollen wir zulassen, daß die Flüssigkeit und der Schwimmer beide äußeren Newtonschen Kräften unterliegen, die ein Potential haben. Das System, dessen kleine Schwingungen wir untersuchen wollen, hat also dieselbe Allgemeinheit wie jenes, dessen Stabilitätsbedingungen wir nach der Methode von Lagrange und Lejeune Dirichlet zu bilden gelernt haben. Mithin werden wir die Resultate, zu denen uns diese beiden Methoden führen, vergleichen können. Von dieser allgemeinen Studie werden wir leicht zu der von Clebsch durchgeführten übergehen können."

I. Kinematische Untersuchung der kleinen Bewegungen eines auf einer Flüssigkeit schwimmenden Körpers. II. Dynamische Untersuchung der kleinen Bewegung des festen Körpers. III. Untersuchung der kleinen Bewegungen der Flüssigkeit. IV. Ansatz der Gleichungen für das Problem der kleinen Pendelschwingungen eines Schwimmers. V. Zurückführung der vorigen Aufgabe auf eine Aufgabe der Variationsrechnung. VI. Die durch die Theorie der kleinen Bewegungen gelieferte Bedingung, die zur Sicherung der Stabilität des Systems genügt. VII. Wie die Theorie der kleinen Bewegungen beweist, daß die vorangehende Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtes des Systems notwendig ist. VIII. Mit Fehlbetrag angenäherte Bestimmung der längsten Periode, die eine Pendelbewegung des Systems annehmen kann. IX. Sukzessive Bildung der verschiedenen Pendelbewegungen, deren der Schwimmer fähig ist. X. Körper, der auf einer unbegrenzten Flüssigkeit schwimmt. XI. Schwerer Körper, der auf einer schweren, nicht zusammendrückbaren

und homogenen Flüssigkeit schwimmt. XII. Fall, bei dem das untersuchte System zwei Symmetrieebenen besitzt.

Eine Wiedergabe des analytischen Ganges der Untersuchung, deren bezifferte Gleichungen auf 189 ansteigen, ist unmöglich. Aus der Fülle der interessanten Ergebnisse heben wir nur die in Kap. VI ausgesprochene Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichts heraus: „Damit ein System in stabilem Gleichgewicht sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen der kleinen Pendelbewegungen dieses Systems durch keinen imaginären Wert der Periode verifiziert werden können.“ Oder: „Für die Stabilität eines aus einer Flüssigkeit und einem Schwimmer gebildeten System ist es notwendig und hinreichend, daß die beiden gleichwertigen Aufgaben der Variationsrechnung, deren Fassungen wir gegeben haben, für die Konstante λ ausschließlich positive Werte geben.“

Endlich mögen die Schlußsätze der Arbeit hier Platz finden: „Um zusammenzufassen: Die prinzipiellen Einwände, welche Clebsch gegen die Theorie der Schwingungen schwimmender Körper erhoben hat, wie sie von Poisson und Duhamel entwickelt ist, sind vollauf gerechtfertigt; die von jener Theorie zugelassenen Annahmen sind mit schweren Irrtümern behaftet. Allein die Folgerungen, zu denen sie führt, sind nicht alle zu verwerfen. Die Stabilitätsbedingungen, die sie formuliert hat, sind zutreffend. Auf ein doppelt symmetrisches Schiff angewandt, das auf einem unbegrenzten Meere schwimmt, schreibt sie jeder der drei Arten einfacher Pendelschwingungen: der einfachen vertikalen Schwingung, dem reinen Rollen, dem reinen Schlenkern, bestimmte Perioden zu; diese Perioden sind nicht den längsten Perioden der wirklichen Schwingungen gleich; man kann jedoch immer versichern, daß diese höher sind als jene.“ Lp.

G. de Bothezat. Méthode pour l'étude expérimentale de l'amortissement des oscillations de certains systèmes en mouvement dans un fluide. C. R. **153**, 466-468.

Bei der Untersuchung der kleinen Schwingungen eines festen Körpers um eine Translationsbewegung in einer Flüssigkeit sind zwei Kategorien von Kräftepaaren zu unterscheiden: solche, die Funktionen der Parameter sind, welche die Winkelablenkung des Körpers von seiner mittleren Orientierung definieren, und solche, die Funktionen der Ableitungen dieser Parameter sind Diese letzteren werden allgemein als Dämpfungspaare bezeichent. Die vom Verf. ersonnene Methode ermöglicht eine vollständige experimentelle Erforschung des Dämpfungspaares für den besonderen Fall einer in geradliniger Translation innerhalb einer Flüssigkeit begriffenen dünnen ebenen Platte, die eine zur Geschwindigkeit parallele Symmetrieebene besitzt und leicht gegen sie geneigt ist. In erster Annäherung ist hier das Dämpfungspaar von der Form $aV\omega$ (V = Translationsgeschwindigkeit, ω = Winkelgeschwindigkeit, a = Dämpfungskonstante). Die Einzelheiten der Versuchsanordnung sind im Original nachzulesen. Der Verf. verspricht sich einen Nutzen dieser Betrachtung für die Aeroplane. Lp.

A. Stephenson. On water waves as asymmetric oscillations and on the stability of free wave-trains. Phil. Mag. (6) **21**, 773-777.

„Wasserwellen liefern ein verwickeltes Beispiel asymmetrischer Schwingungen, und es liegt die Frage nahe, ob sie die ausgesprochene Energieabsorption unter einer direkten Kraft von doppelter Frequenz aufweisen, welche für ein asymmetrisches System mit einem Freiheitsgrade charakteristisch ist. Das Problem wird ganz einfach als eines der stetigen Bewegungen betrachtet. Eine direkte Kraft kann auf einen tiefen Strom angewandt werden, der vermöge einer stationären periodischen Druckänderung längs seiner Oberfläche fließt. Eine solche Änderung wird stehende Wellen von gleicher Länge erzeugen. Ist dieser Bewegungszustand stabil, wenn die Wellenlänge halb so groß wie die der freien stehenden Wellen ist?“ Die mathematische Untersuchung führt zu dem Ergebnis, daß, wenn eine periodische Druckänderung gleichmäßig über die Oberfläche läuft, der erzwungene Zug gleicher Wellenlänge einen instabilen Bewegungszustand bildet, falls sich das Verhältnis der Wellenlänge zu derjenigen der freien Welle von gleicher Geschwindigkeit innerhalb eines angebbaren Bereiches um den Wert $\frac{1}{2}$ befindet. Zuletzt wird gezeigt, daß der freie Wellenzug nicht einer Periodizität der Amplitude zustrebt.

Lp.

H. Vergne. Sur un développement en série et son application au problème des ondes liquides par émersion. C. R. **152**, 1231-1233.

In seiner Thèse „Contribution à la théorie des ondes liquides“ (Paris, 1909, Gauthier-Villars; vgl. Boussinesq, F. d. M. **41**, 840, 1910) hat der Verf. das folgende, in der Theorie der Steigwellen einer Flüssigkeit vorkommende mathematische Problem formuliert: eine Funktion $\varphi(x, y, t)$ zu bestimmen, die innerhalb einer Randkurve C der xy-Ebene definiert ist und den folgenden Bedingungen genügt:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = c(s)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad \text{an der Grenze,}$$

$$\varphi = 0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(s) \quad \text{für } t = 0,$$

wo s die krummlinige Abszisse eines beliebigen Punktes des Randes C ist, $c(s)$ und $f(s)$ zwei gegebene Funktionen auf diesem Rande. Der Verf. zeigt, wie dieses Problem mit Hülfe eines funktionentheoretischen Satzes gelöst werden kann, der eine Modifikation eines Satzes von Erhard Schmidt in Math. Ann. **63** ist (F. d. M. **38**, 377, 1907). Lp.

H. Vergne. Sur la théorie de la houle en profondeur finie. C. R. **153** 174-176.

Die behandelte Bewegung wird definiert als eine periodische Bewegung, bei welcher alle Flüssigkeitsteilchen unbeschränkt in parallelen Vertikalebenen geschlossene Bahnen beschreiben und auf jeder Horizontalfläche alle Bewegungsumstände sich senkrecht zu einer Vertikalebene fortpflanzen, die zu den Ebenen der Bahnen senkrecht ist, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit ω. Unter Vernachlässigung der Quadrate und der Produkte der Verrückungen und der Geschwindigkeiten stellt der Verf. die bekannten Differentialgleichungen der Hydrodynamik auf, deren Lösung ebenfalls bekannt ist. Dagegen wußte man noch nicht, ob dies die einzige mögliche Lösung ist. Der Nachweis, daß dies in der Tat zutrifft, wird in der Note erbracht. Lp.

F. B. Pidduck. The wave-problem of Cauchy and Poisson for finite depth and slightly compressible fluid. Lond. R. S. Proc. (A) **86**, 396-405.

Die Arbeit wendet die vom Verf. früher (Lond. R. S. Proc. (A) **84**, 347-350; F. d. M. **41**, 842, 1910) entwickelten Ableitungen zu numerischen Berechnungen an, die mit denen von Lamb gut übereinstimmen. Dann werden Abweichungen für die Entwicklungen diskutiert, die sich ergeben, wenn man annimmt, daß es sich um ein schweres kompressibles Fluidum handelt, speziell um ein kompressibles Fluidum von unendlicher Tiefe oder um ein wenig kompressibles Fluidum von endlicher Tiefe. Br.

U. Crudeli. Su la teoria dei fluidi rotanti. Nuovo Cimento (6) **1**, 437-442.

Einige Zusätze zu den Betrachtungen des Verf. im Vorjahre (F. d. M. **41**, 785, 1910). 1. Ist $U = V + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, wo $V = k\varrho \int\limits_S dS/r$, so muß für die Oberfläche $dU/dn > 0$ sein. Für die Rotationsgeschwindigkeit ω ist (vgl. das angeführte Referat) $\sqrt{\pi k \varrho}$ eine obere Schranke; es fragt sich, ob dies auch eine Grenze ist, bis zu der hin Gleichgewichtsfiguren möglich sind. Hierauf vermag der Verf. nicht zu antworten; doch weist er auf Tisserand, Mécanique céleste, S. 108 hin, wonach das Gleichgewicht bei einem gewissen unendlichen elliptischen Zylinder bis an diese Grenze hin möglich ist. 2. Eine letzte Bemerkung liefert eine Beziehung zwischen der mittleren Dichte der Erde und ihrer Umlaufszeit. Lp.

Mrs. Hertha Ayrton. Some new facts connected with the motion of oscillating water. Lond. Roy. Soc. Proc. [Nature **85**, 262; Chem. News **103**, 66].

Die Erklärung, welche die Verfasserin für den Ursprung der Wellengekräusel bildenden Wirbel ergeben hat, ist angefochten worden; deshalb hat sie neue Versuche in einem Troge zur Stützung ihrer Theorie ausgeführt. Lp.

L. SANTE DA RIOS. Sul moto intestino dei filetti vorticosi. Batt. G. [(3) 2], 300-308.

Nachtrag zu den Veröffentlichungen des Verf. aus den beiden letzten Jahren (F. d. M. **40**, 807, 1909 u. **41**, 819, 1910). „Innere Bewegung" eines Wirbelfadens nennt der Verf. die Bewegung, welche innerhalb der Ebene eines senkrechten Querschnittes des Wirbelfadens stattfindet; diese bildet den Gegenstand der Untersuchung. Besonders wird auch der Fall behandelt, bei welchem jener Querschnitt kreisförmig ist. Lp.

C. W. OSEEN. Über Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit. Arkiv för Mat., Astron. och Fysik **7**, Nr. 14, 13 S.

1. In einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit sei in einem gewissen Augenblicke ($t=0$) w überall gleich Null, $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y = \bar{w}$ innerhalb eines Zylinders $R = \sqrt{x^2+y^2} = R_0$ eine stetige, stetig differenzierbare, für $R = R_0$ und nur für $R = R_0$ verschiedene Funktion von R, außerhalb dieses Zylinders $= 0$. Die Bewegung ist also bei $t = 0$ eine Helmholtzsche Wirbelbewegung um einen zylindrischen Wirbel. Es fragt sich, wie die Bewegung sich aus diesem Anfangszustand entwickelt, wenn keine Kräfte auf die Flüssigkeit wirken. — Der qualitative Inhalt der entwickelten Formeln kann so zusammengefaßt werden: Vom Zentrum des anfänglichen Wirbels breitet sich in der Flüssigkeit eine Bewegung aus, deren Rotation (curl) überall außerhalb des anfänglichen Wirbels dasselbe Vorzeichen wie dieser hat, deren Geschwindigkeit aber der ursprünglichen Geschwindigkeit entgegengesetzt ist.

2. In einer Flüssigkeit befinden sich zwei parallele geradlinige Wirbelfäden. Von einer exakten Lösung dieses Problems soll nicht die Rede sein. Das Ziel ist, der Wirklichkeit ein wenig näherzukommen, als die Helmholtzsche Theorie gestattet. Diese wird in erster Annäherung als richtig betrachtet; genauer ausgedrückt, es wird angenommen, daß in erster Annäherung die Bewegung überall außerhalb der beiden Wirbelfäden als wirbelfrei angesehen werden kann, und daß man überdies annehmen darf, daß die Bewegung in den Wirbelfäden von der Zeit unabhängig ist und daß sie übrigens den oben aufgestellten Bedingungen entspricht. Von den Achsen der Wirbel wird angenommen, daß sie sich so bewegen, wie die Helmholtzsche Theorie verlangt, d. h. in Kreisen um einen gemeinsamen Mittelpunkt oder, wenn die Intensitäten der beiden Wirbel entgegengesetzt gleich sind, längs zweier parallelen Geraden. Wegen der komplizierten Bauart der erhaltenen Formeln beschränkt sich der Verf. auf eine qualitative Diskussion, die eine Reihe anschaulicher Resultate ergibt. Lp.

C. W. OSEEN. Über das Stabilitätsproblem in der Hydrodynamik. Arkiv för Mat., Astron. och Fysik **7**, Nr. 15, 20 S.

Der einfachste Fall ist der folgende: Zwei Ebenen $y = +b$ und $y = -b$ bewegen sich parallel der x Achse mit den Geschwindigkeiten $+U$ und $-U$. Zwischen ihnen befindet sich eine Flüssigkeit, deren Bewegung dem Gesetze $u = Uy/b, v = w = 0$ gehorcht. Erfahrungsgemäß ist dieser Bewegungszu-

stand unter gewissen Umständen instabil. Wie ist dies zu erklären? Theoretische Erwägungen (von Osborne Reynolds) und experimentelle Tatsachen haben zu der Vermutung geführt, es gebe eine solche positive Größe K, daß der Bewegungszustand stabil oder instabil ist, je nachdem $\varrho bU/\mu$ kleiner oder größer als K ist. Dagegen hat Lord Kelvin die Behauptung aufgestellt, bei einer reibenden Flüssigkeit sei der Bewegungszustand für jeden Wert von $\varrho bU/\mu$ stabil. Die Kelvinsche Behauptung beschränkt sich jedoch auf unendlich kleine Störungen.

Der Verf. beschäftigt sich in dem vorliegenden Aufsatze mit einem speziellen Falle der Kelvinschen Problems, nämlich mit dem Falle $b = \infty$. In den §§ 2 u. 3 wird das zweidimensionale Problem behandelt und gezeigt, daß die Kelvinsche Behauptung vollkommen richtig ist. Eine irgendwo in der Flüssigkeit entstandene Störung gibt nicht zu einem neuen Bewegungszustande Anlaß, sondern erlischt allmählich (wohl bemerkt, wenn man voraussetzen darf, daß die quadratischen Glieder keine Rolle spielen). In § 4 wird das dreidimensionale Problem angegriffen, indem hier auch der Einfluß einer äußeren Kraft in Betracht gezogen wird. Aber nicht die vollständige Lösung des Problems wird gegeben. Schon Lord Kelvin hat gezeigt, daß das Problem analytisch in zwei Probleme zerfällt: die Bestimmung von v und p und die von u und w. Nur die erstere Bestimmung wird durchgeführt. Die von einer anfänglichen Störung herrührenden Teile von v und p konvergieren bei wachsendem t gegen Null; die von einer von t unabhängigen, auf ein endliches Gebiet der Flüssigkeit wirkenden Kraft herrührenden Teile von v und p bleiben bei wachsendem t im ganzen Raume endlich. Es scheint dem Verf. unwahrscheinlich, daß u und w sich anders verhalten. Hieraus schließt der Verf., man müsse das Stabilitätsproblem wesentlich anders angreifen. Lp.

Th. v. Kármán. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. Gött. Nachr. 1911, 509-517.

Zur Erläuterung betrachtet der Verf. die einfachste stabile Anordnung von Wirbelfäden für das ebene Problem, nämlich zwei parallele Reihen geradliniger, unendlich dünner Wirbelfäden von gleicher Stärke, verteilt in zwei Reihen von entgegengesetzter Richtung. Die einzelnen Wirbelfäden der beiden Reihen können entweder einander gegenüberstehen, oder aber die beiden Reihen mit der halben Teilung verschieben sich gegeneinander. Wenn das ganze Gebilde unverändert mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet, kann es nur bei der zweiten Anordnungsweise stabil sein, und auch nur dann, wenn das Verhältnis h/l ($h =$ Abstand der beiden Wirbelreihen, $l =$ Teilung) einen bestimmten Wert hat.

Das Bild des Widerstandsmechanismus wird nun so gedacht: Der Körper schreite in der ruhenden Flüssigkeit mit der konstanten Geschwindigkeit U nach der x-Richtung fort. Durch diese Bewegung wird hinter dem Körper eine Wirbelbewegung erzeugt, welche in einiger Entfernung von dem Körper schon sehr wenig von der (vorher berechneten) stabilen Konfiguration abweicht. Der Bewegungszustand ist nicht stationär in bezug auf ein mit dem Körper mitbewegtes Koordinatensystem. Dementsprechend muß der Körper einen

Widerstand erfahren, da stets neue Wirbelfäden hinter dem Körper entstehen und damit neue Impulsmengen erzeugt werden. — Die mathematische Durchführung ist im Original zu verfolgen. Lp.

H. Villat. Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle. C. R. **152**, 303-306, 480.

Allgemeine Bestimmung der permanenten ebenen Bewegung einer Flüssigkeit in einem unbegrenzten geradlinigen Kanal, in welchem sich ein gegebenes Hindernis befindet. Die Funktion, welche einem beliebigen Hindernisse entspricht, enthält die Weierstraßsche elliptische $\wp$-Funktion. Zum Schlusse wird die entsprechende Lösung von Cisotti verglichen (F. d. M. **40**, 814, 1909). Die Arbeit schließt sich an eine andere des Verf. vom Vorjahre an (F. d. M. **41**, 829, 1910). Lp.

H. Villat. Sur la résistance des fluides. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 28, 203-311.

Der Verf. gibt in der Einleitung dieser großen Arbeit die folgende Übersicht über die Ergebnisse seiner Untersuchungen.

„Levi-Civita hat 1907 durch eine grundlegende Abhandlung in der Theorie einen bedeutenden Fortschritt dadurch erzielt, daß er das allgemeine Integral der permanenten ebenen Bewegungen einer unbegrenzten Flüssigkeit um ein eingetauchtes Hindernis bestimmte (F. d. M. 38, 753, 1907). Die willkürliche Funktion, von der Levi-Civita die Lösung des Problems abhängig macht, ist eine gewisse Potenzreihe, deren (reelle) Koeffizienten einer von ihm angegebenen Bedingung genügen müssen sowie gewissen Gleichheiten und Ungleichheiten, die jüngst von Brillouin in seiner Vorlesung am Collège de France anschaulich entwickelt sind (F. d. M. **41**, 819, 1910). Hat man die willkürliche Funktion erst gewählt, so ermöglicht die Methode von Levi-Civita die Bestimmung der Form des Hindernisses und der Bewegungselemente.

Die fragliche Methode ist interessanter Ausdehnungen fähig. Cisotti hat aus ihr auf sehr elegante Art die Verallgemeinerung auf den Fall einer Flüssigkeit in einem geradlinigen unbegrenzten Kanal erhalten, wenn das Hindernis als symmetrisch in bezug auf die Achse des Kanales angenommen wird und die Bewegung ebenfalls in bezug auf diese Achse symmetrisch ist (F. d. M. **40**, 814, 1909).

Ich habe eine neue Ausdehnung auf den Fall zu erhalten versucht, bei dem die Flüssigkeit durch eine feste unbeschränkte Wand begrenzt wird, während das Hindernis beliebig ist. Dies ist das Problem, das ich zunächst in dem ersten Teile dieser Arbeit gelöst habe.

Zu diesem Zwecke habe ich eine konforme Abbildung bestimmt, die dem Felde, das von der in bezug auf den festen Körper bewegten Flüssigkeit eingenommen wird, die innere Fläche eines kreisförmigen Halbringes in der Ebene einer Hülfsvariable ζ zuordnet, und zwar derartig, daß die Ränder der Fur-

chung ihre Abbildung auf den geradlinigen, auf der reellen Achse liegenden Rändern des Halbringes haben. Zufolge dieser Eigenschaft kann die Funktion $\Omega(\zeta)$, mit deren Hülfe ich alle Elemente der Bewegung ausdrücke, analytisch in den Halbring fortgesetzt werden, der den ersten vervollständigt, und dies ermöglicht den Schluß, daß die allgemeine Lösung Ω, die unserer Aufgabe zukommt, dieselbe Allgemeinheit besitzt wie eine gewisse Laurentsche Reihe mit reellen Koeffizienten, die nicht sämtlich willkürlich sind, bei der Bedingung der Konvergenz in dem Kreisringe. Unter diesen Umständen folgt aus der Kenntnis einer besonderen Lösung Ω_0 die Möglichkeit, das allgemeine Integral niederzuschreiben.

Es ist mir gelungen, eine besondere Lösung Ω_0 dadurch zu erhalten, daß ich als analytische Form eine nach den Kosinus und den Sinus der Vielfachen von $i \log \zeta$ geordnete Reihe eingeführt habe (analog einer Laurentschen Reihe, abgesehen von der Anordnung der Glieder). Ich bilde zunächst eine mit Ω_0^1 bezeichnete Funktion, die für ein von zwei geradlinigen, einen beliebigen Winkel einschließenden Strecken gebildetes Hindernis allen gewollten Bedingungen der Existenz und der Stetigkeit genügt. Der Beweis der Stetigkeit (ausgenommen in zwei von vornherein ausgeschlossenen Punkten der Grenze) ist der heikelste Punkt; er folgt aus einer wiederholten Anwendung eines Abelschen Satzes.

Hiernach bilde ich in allen möglichen Fällen eine besondere Funktion Ω_0, die immer der Aufgabe entspricht. Aus ihr gewinne ich das allgemeine Integral der Frage in einer Gestalt, bei der die willkürliche Funktion die schon erwähnte Laurentsche Reihe ist; später werde ich dazu geführt, diese durch eine ganz anders geartete Funktion zweckmäßig zu ersetzen.

Die Lösung dieser Grundfrage, deren ganze Schwierigkeit Levi-Civita gezeigt hatte, bildet den Gegenstand des zweiten Teiles dieser Arbeit. Ich bin dazu gekommen, eine neue willkürliche Funktion einzuführen, mittels deren die allgemeine Lösung der Aufgabe leicht ausdrückbar ist; zwischen dieser willkürlichen Funktion und der Form des Hindernisses besteht ein enges und augenfälliges Band. Daraus folgt, daß man, sobald das Hindernis von vornherein gegeben ist, die charakteristischen Eigenschaften der ihm entsprechenden willkürlichen Funktion unmittelbar bestimmen kann. Diese besondere Funktion gehört zu einer Klasse von Funktionen, die sämtlich Hindernissen von gleicher allgemeiner Form entsprechen, und es ist möglich, eine zu der obigen Klasse gehörende Funktion so zu wählen, daß sie ein Hindernis liefert, das praktisch mit dem vorgegebenen identisch ist.

Von der Tatsache, daß man die Funktion $\omega(\zeta)$ von Levi-Civita für ein polygonales Hindernis kennt, bin ich ausgegangen. Man denke sich nun, daß die Anzahl der Seiten dieses Linienzuges unbegrenzt wachse, so daß man an der Grenze eine gegebene Kurve erhält, und nehme als willkürliche Funktion diejenige, welche die Beziehung $\theta = \Phi(\sigma)$ zwischen der Neigung θ der Tangente in einem Punkte des Profiles des Hindernisses und dem Argument σ des entsprechenden Punktes in der konformen Abbildung ausdrückt. Unter diesen Umständen führt mich eine vielleicht kühne Schlußfolgerung an der Grenze zu einem Formelsystem, dessen Berechtigung nichts weniger als augenfällig ist. Diese Berechtigung ergibt sich erst aus dem vertieften Studium der von mir so erhaltenen Funktion $\Omega(\zeta)$.

Hauptsache ist die Stetigkeit dieser Funktion $\Omega(\zeta)$ innerhalb des Kreises $|\zeta| = 1$ und bis auf seinen Rand hin (mit Ausnahme zweier Punkte). Dort

liegt auch die größte Schwierigkeit. Ist diese Stetigkeit sichergestellt, so führt die Tatsache, daß der reelle Teil θ der so gebauten Funktion Ω auf der Grenzkreislinie die Werte $\Phi(\sigma)$ annimmt, zum endgültigen Nachweise der Berechtigung des eingeschlagenen Ganges.

Hiernach habe ich meine Formeln auf einige Beispiele angewandt, bei denen die Form des Hindernisses im voraus gegeben wird, vornehmlich in dem Falle, bei dem das Hindernis die Ansicht eines Schiffsvorderteils hat, also dem praktisch interessantesten Falle.

Dann bin ich ganz von selbst dahin geführt, die nämliche Methode auf die Erforschung der Bewegung einer von einer festen Wand begrenzten Flüssigkeit auszudehnen; das allgemeine Integral dieser Bewegung hatte ich ja in dem ersten Teile bestimmt. Auch hierbei ermöglicht es die Einführung einer neuen, willkürlichen Funktion (analog der vorigen), die Lösung der Aufgabe auf eine Art zu erhalten, welche die Gestalt des von vornherein gegebenen Hindernisses hervortreten läßt,

Die früher bewirkte Einführung der Funktion Ω_0^1 spielt hier eine wesentliche Rolle; ich beweise nämlich, daß die allgemeine Lösung Ω immer dieselbe Form wie Ω_0^1 erhalten kann, und aus den Eigenschaften dieser letzteren fließen die der allgemeinen Lösung.

Aus diesen Resultaten zieht man ähnliche Schlüsse wie bei denen für die unbegrenzte Flüssigkeit.“

Zuletzt wird auf andere Ausdehnungen der befolgten Methode hingewiesen, die der Verf. in gleichzeitig veröffentlichten Mitteilungen bekannt gegeben hat. Lp.

H. Villat. Sur la détermination de certains mouvements discontinus des fluides. C. R. **152**, 1081-1084.

Die Note enthält eine Inhaltsangabe der vorstehend angezeigten größeren Arbeit des Verf. Es werden neue Einzelprobleme aufgezählt über die kontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, die der Verf. behandelt hat, und über die bei ihrer Lösung benutzten Methode der konformen Abbildung. „Alle Elemente der Bewegung werden bei jedem Problem bestimmt, und alles wird mindestens auf Quadraturen gebracht. Die Kleinarbeit der Rechnung wird anderswo dargelegt werden. Es werde jedoch angekündigt, daß die Komponente des Widerstandes des Hindernisses parallel zu der allgemeinen Strömung in jedem Falle bemerkenswerte Ausdrücke annimmt.“ Lp.

T. Boggio. Sul moto di una corrente libera, deviata da una parete rigida. Torino Atti **46**, 1024-1047.

„In diesem Aufsatz studiere ich die permanente Bewegung eines aus dem Unendlichen kommenden freien Stromes, der durch das Vorhandensein einer starren Wand, die ganz im endlichen liegt, abgelenkt wird. Wenn man das Problem in voller Allgemeinheit und auch für den Fall dreier Dimensionen angreifen wollte, würde es die größten Schwierigkeiten darbieten, die auch bei dem jetzigen Zustande der Analysis unüberwindbar sein würden. Beschränkt

man sich aber auf den Fall zweier Dimensionen, so kann dieser in verhältnismäßig einfacher und erschöpfender Weise behandelt werden, weil es gelingt, das allgemeine Integral der betrachteten Bewegungsklasse anzugeben. Die von mir benutzte Methode ist die nämliche, welche von Levi-Civita in seiner Abhandlung „Scie e leggi di resistenza" in die Wissenschaft eingeführt ist (F. d. M. 38, 753, 1907), und welche schon von Cisotti bei der Lösung mannigfacher und wichtiger Fragen der Hydrodynamik angewandt ist. Neue hydrodynamische Anwendungen sind jüngst von Colonnetti gemacht worden, der sehr beachtenswerte Resultate, auch vom praktischen Gesichtspunkte betrachtet, erhalten hat. Wenn insbesondere die starre Wand stromaufwärts sich unbeschränkt erstreckt, so daß der Flüssigkeitsstrom von einer solchen Wand geführt wird, so hat man das Problem der Kaskaden; wenn sich ferner die Wand unbeschränkt stromaufwärts und stromabwärts erstreckt, so hat man ein von Colonnetti behandeltes Problem. Die Formeln für diese besonderen Fälle fließen sofort aus denen, die ich in dem allgemeinen Falle aufstelle."

Lp.

T. Boggio. Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide. Rom. Acc. L. Rend. (5) **29**$_1$, 634-641.

„In der Hydraulik und besonders in der Theorie der Turbinen ist das Problem der Bestimmung der dynamischen Einwirkungen, die von Flüssigkeitsströmungen ausgeübt werden, von hoher Wichtigkeit. Eine solche Bestimmung wird in den Lehrbüchern über Hydraulik und Turbinentheorie für einzelne besondere Fälle und mit speziellen Kunstgriffen ausgeführt, die von Fall zu Fall wechseln und, was betont werden muß, mit Voraussetzungen und Methoden, die jede andere Bezeichnung eher verdienen als die der Strenge. Nun läßt sich aber die erwähnte Frage durch den einzigen Gebrauch der Grundprinzipien der theoretischen Hydrodynamik mittels einer gleichmäßigen, strengen und einfacheren Methode in ihrer ganzen Allgemeinheit behandeln. Als besonderer Fall ergeben sich Formeln, die mit denen in den genannten Werken völlig übereinstimmen; dies wird in der vorliegenden Arbeit nachgewiesen. Die gegenwärtige erste Note dient zunächst zur Bestimmung der Resultante der dynamischen Aktionen; in der zweiten wird das resultierende Moment ermittelt. Bei der Behandlung werden die Methoden der Vektoranalysis benutzt, welche sich bei solchen Untersuchungen als vorzüglich geeignet erweisen wegen der äußersten Einfachheit und Klarheit, die sie den zu behandelnden Formeln verleihen."

Lp.

T. Boggio. Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide. Nota II. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 901-908.

In dieser Note wird der Fall mehrerer Ströme hehandelt. „Die zur Gewinnung der Hauptformel der ersten Note auseinandergesetzte Methode ist auch in viel allgemeineren Fällen anwendbar als in dem dort betrachteten, z. B. in demjenigen, bei welchem aus dem Unendlichen verschiedene freie Ströme anlangen, die etwaige Ablenkungen durch Röhren (starre Oberflächen) erfahren, von denen sie durchkreuzt werden; einige dieser Ströme oder alle

können sich noch an andere starre Wände anlegen, indem sie sich in Teilströme zerlegen, die dann abwärts unbegrenzt weiterlaufen. Auch in diesen allgemeinen Fällen ist es ziemlich leicht, die jener Hauptformel entsprechende Formel zu finden, welche die Resultante der dynamischen Aktionen des Systems gegebener Ströme auf das System der von ihnen bespülten starren Oberflächen ausdrückt.“ Lp.

G. Colonnetti. Sul moto di un liquido in un canale. Palermo Rend. **32**, 51-87.

„In der vorliegenden Abhandlung lege ich einige Untersuchungen vor über die Bewegung einer vollkommenen und nicht von Kräften beanspruchten Flüssigkeit, die mit freier Oberfläche in einem Kanal läuft, von welchem das Bodenprofil gegeben ist. Von dem Gesichtspunkte der mathematischen Behandlung aus hat das Problem viele Berührungspunkte mit denen, die Levi-Civita (Scie e leggi di resistenza, F. d. M. **38**, 753, 1907) und Cisotti (Vene fluenti. F. d. M. **39**, 802, 1908 und Sul moto di un solido in un canale. F. d. F. **40**, 814, 1909) behandelt haben, und eignet sich recht gut zur Behandlung mit den Methoden der Theorie der Funktionen komplexer Variabeln, solange die Beschränkung der Bewegung auf nur zwei Dimensionen in dem Falle, bei welchem die Seitenwände des Kanals eben und parallel sind, ganz gesetzmäßig und der Wirklichkeit zu entsprechen scheint.

Und das Resultat ist, wenigstens unter dem mathematischen Gesichtspunkte, ganz befriedigend, da es gelingt, das allgemeine Integral der betrachteten Bewegungsart anzugeben, sei es in dem Falle eines starren krummlinigen Profils, sei es in dem eines polygonalen, indem mittels dieses Integrals der Ausdruck aller Elemente der Bewegung erhalten wird. Ungelöst bleibt also hier, wie auch schon in dem Falle der Bewegung mit Begleitwasser, das Problem der Untersuchung der Funktion, die einem vorgegebenen Profil zugehört, ebenso das der nicht bloß notwendigen, sondern auch hinreichenden Bedingungen, daß das fragliche Integral eine tatsächlich mögliche Bewegung darstellt.

Unter dem Gesichtspunkte der Darstellung der physikalischen Erscheinung sind die Ergebnisse, zu denen die mathematische Theorie führt, nur annehmbar mit den Vorbehalten, die aus der Annahme einer vollkommenen und keinen Massenkräften unterworfenen Flüssigkeit folgen. Trotzdem scheinen sie nicht gänzlich ohne Interesse zu sein, vornehmlich, weil in der technischen Literatur die Meinungen, welche sich über diesen Gegenstand das Feld streitig machen, sich sehr widersprechen. In der Tat ist ja weltbekannt, daß es nicht an Hydraulikern fehlt, welche ohne Diskussion oder Beweis die Hermannsche Theorie als ein Axiom annehmen, wonach jede Flüssigkeitsmasse, die längs einer starren Wandung strömt, bei jedem Richtungswechsel dieser Wand den Gesetzen des Stoßes zwischen vollkommen elastischen Körpern folgen soll; ebenso finden sich nicht selten solche, die als sicher die Bachsche Hypothese ansehen bezüglich der Bildung einer Art von Schrumpfung des Querschnitts in der unmittelbaren Nähe jedes Winkelpunktes der starren Wand.

Dagegen aber halten noch andere daran fest, daß hinter einer Ablenkung der Flüssigkeitsstrom in der neuen Richtung eine Geschwindigkeit annimmt, die merklich dieselbe ist, die er in der ursprünglichen Richtung besaß. Zu

dieser Theorie, die den Ausgangspunkt der jüngsten Forschungen über das Funktionieren der Turbinen für Wasserkraftbetrieb bildet, haben die neuesten Versuche von Bànki (1909) einen bemerkenswerten Beitrag geliefert; die Bestätigung seiner Versuche durch die mathematische Theorie war einer der Hauptzwecke der hier darzulegenden Untersuchungen.

Und die Bestätigung gelingt, wie man sehen wird, ebenso vollständig wie streng, nicht nur darin, was den qualitativen Gang des Phänomens betrifft, sondern auch in betreff des Elementes, das dem Versuche direkter zugänglich ist: des Druckes, den die Bewegung der Flüssigkeit auf die sie führende Wand ausübt.“ Lp.

G. Colonnetti. Sull' efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione. Nota I. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 649-655.

In dem letzten Paragraphen der Abhandlung „Sul moto di un liquido in un canale“ (Referat vorstehend) hat der Verf. bemerkt, daß immer, wenn eine starre Wand, die eine in permanenter Bewegung befindliche Flüssigkeit führt, nach dem Bewegungsfelde hin eine Konvexität mit hinreichend ausgesprochener Krümmung darbietet, das Phänomen nicht allenthalben kontinuierlich und rotationslos bleiben kann. Das Studium der durch ähnliche Singularitäten charakterisierten Flüssigkeitsbewegungen hat ganz bedeutende analytische Schwierigkeiten. Da eine vollständige Lösung des Problems annoch aussteht, ist die Arbeit des Verf. nicht ohne Interesse. Er zeigt, wie man dazu gelangen kann, das allgemeine Integral der permanenten, ebenen und rotationslosen Flüssigkeitsbewegungen, die mit einer Diskontinuität von endlichen Dimensionen behaftet sind, zu erhalten. Lp.

G. Colonnetti. Sull' efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione. Nota II. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 789-796.

Nach den in der ersten Note entwickelten Methoden wird jetzt ein spezielles Beispiel durchgerechnet. Die Flüssigkeit strömt zwischen zwei parallelen geradlinigen Wänden; die eine Wand ist aber an einer Stelle auf einer Strecke von gegebener Länge fortgenommen. Nachdem das Integral, von dem die Lösung abhängt, aufgestellt ist, wird es für ein angenommenes Zahlenbeispiel so weit ausgewertet, daß Druck und Geschwindigkeit an mehreren Punkten daraus berechnet werden konnten. Lp.

G. Colonnetti. Sopra un caso di emisimmetria che si presenta in certe questioni di Idrodinamica. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 322-324.

Bei der Untersuchung der Bewegung von Flüssigkeiten, die ganz oder teilweise von starren, bezüglich einer gegebenen Ebene Π symmetrischen Wänden geleitet werden, kommt es nicht selten vor, daß man auf Fälle stößt, bei denen die das Phänomen bestimmenden Elemente einer Art von Halb-

symmetrie genügen, d. h. so geartet sind, daß in Punkten, die symmetrisch zu Π sind, die skalaren Parameter die nämlichen sind und die Vektoren symmetrische Bestimmungen haben, mit Ausnahme der Geschwindigkeiten, für welche die Symmetrie sich mit einer Umkehrung des Sinnes begleitet ergibt. Nun wird von vielen Hydraulikern angenommen, daß das System der Strömungslinien außer von allen übrigen bestimmenden Elementen auch von dem Sinne der Geschwindigkeiten abhängt und deshalb sich nicht mit Notwendigkeit als symmetrisch bezüglich der Ebene zu erweisen braucht; man nimmt also an, daß jene Halbsymmetrie der das Phänomen bestimmenden Elemente eine nicht hinreichende Ursache zur Bestimmung einer analogen Halbsymmetrie des ganzen Phänomens ist. Die kurzen und ganz elementaren Betrachtungen des Verf. lassen auf das Gegenteil schließen. Lp.

U. Cisotti. Sulla biforcazione di una vena liquida. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 314-322, 494-502.

Eine Flüssigkeitsschicht, die in einer Ebene zwischen zwei freien Linien λ' und λ'' fließt, läuft um ein starres Profiil γ, das ihr in den Weg gestellt ist, und gabelt sich dort, wie z. B. wenn die Strömung eines Flusses auf einen Brückenpfeiler stößt. Die mathematische Untersuchung der Gesetze der Gabelung wird vom Verf. mit den Mitteln untersucht, welche T. Levi-Civita in seiner Arbeit „Scie e leggi di resistenza" (F. d. M. **38**, 753, 1907) benutzt hat. Die Lösung des vorliegenden Problems und noch allgemeinerer Fragen zeigt die Anwendbarkeit der Methoden von Levi-Civita. Nachdem im ersten Paragraphen die allgemeinen Vorbemerkungen zur Umgrenzung der Aufgabe gemacht sind, werden in § 2 der Druck und die Grenzbedingungen erörtert. Dann wird in § 3 durch Einführung komplexer Variabeln die Betrachtung in bekannter Weise auf das funktionentheoretische Gebiet geleitet und in § 4 durch eine Vertauschung der Variabeln das gegebene Strömungsgebiet in einen Halbkreis verwandelt. Dadurch wird es möglich, in § 5 das allgemeine Integral aufzustellen. Die Aktion der Strömung gegen das starre Profil wird in § 6 bestimmt. Ein besonderes Beispiel, bei welchem die Strömung symmetrisch geteilt wird durch eine geradlinige Wand, gestattet in § 7 eine genauere Verfolgung der Erscheinung, so daß zuletzt sogar Tabellen zur Veranschaulichung gegeben werden können. Lp.

U. Cisotti. Sopra la derivazione dei canali. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 137-151.

Der Zweck des Aufsatzes ist die Ableitung einer bemerkenswerten Formel, die mit Nutzen zur Anwendung kommen kann, wenn es sich darum handelt, seitlich an einen Kanal (den Hauptkanal) einen zweiten Kanal (Nebenkanal) anzulegen. Beide mögen einen geradlinigen Lauf haben, wenigstens in der Nachbarschaft der Örtlichkeit, wo die Abzweigung des neuen Wasserlaufes beginnt. Man bezeichne mit α (in Bogenmaß) den Winkel, den der abge-

zweigte Kanal mit dem Hauptkanal bildet, jeder in der Richtung der Strömung in ihm gerechnet; mit λ und χ die Verhältnisse der Breiten und Förderungen des ersten zu denen des zweiten. Die erwähnte Formel ist:

$$\text{(I)} \qquad \lambda = \left[\left(\frac{\chi}{1-\chi}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} - \chi^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

In dem Falle von Abzweigungen mit kleinen Förderungen (z. B. für $\chi < 0,1$) kann man zu der viel einfacheren Rechnungsformel greifen:

$$\text{(II)} \qquad \lambda = \left(\frac{\pi}{\alpha} - 1\right)^{\pi/\alpha} \cdot \chi.$$

Aus ihr geht hervor, daß für kleine Abzweigungen das Verhältnis der Breiten der beiden Kanäle proportional dem Verhältnisse der Förderungen beibehalten werden kann; der Proportionalitätsfaktor hängt ausschließlich vom Abzweigungswinkel ab und ändert sich nur wenig mit α um den Wert 1,16 herum. Die obigen Formeln fließen aus den gewöhnlichen allgemeinen Prinzipien der theoretischen Hydrodynamik bei Behandlung der Frage in zwei Dimensionen. Dabei hat man den Vorteil, daß man das wirksame Hülfsmittel der konformen Abbildung benutzen kann. Am Schlusse wird eine kleine Tafel zusammengehöriger Werte von λ, α, χ gegeben. Lp.

U. Cisotti. Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 633-637.

Der Verf. behandelt die wirbellose permanente Strömung von Wasser in einem Kanale mit vertikalen Seitenwänden und einem Boden, der unter dem Winkel α gegen die Horizontalebene geneigt ist. Nach Aufstellung der Gleichungen für die Funktionen komplexer Variabeln, von denen die Lösung der Aufgabe abhängt, gewinnt er eine erste genäherte Lösung jener Gleichungen durch Benutzung des Verfahrens, dessen sich Lord Rayleigh bei dem Problem der Einzelwelle (onda solitaria) bedient hat (Papers **1**, 256 oder Phil. Mag. (5) **1**, 257-279; F. d. M. **8**, 613, 1876). Dadurch werden mehrere einfache Resultate erhalten. Lp.

U. Cisotti. Sur la réaction dynamique d'un jet liquide. C. R. **152**, 180-183.

Mit Hülfe von Betrachtungen, wie sie der Verf. in seiner Arbeit „Vene fluenti" angestellt hat (F. d. M. **39**, 802, 1908), und unter Benutzung von Methoden, die Levi-Civita in der Arbeit „Scie e legge di resistenza" erprobt hat (F. d. M. **38**, 753, 1907), gelingt es dem Verf., einen Ausdruck für die dynamische Reaktion eines Flüssigkeitsstrahles gegen das Gefäß, aus dem er entspringt, in geschlossener Form aufzustellen. Aus diesem Ausdrucke folgen unter anderem die Sätze: Die dynamische Reaktion des Flüssigkeitsstrahles hängt nicht von der Form des Gefäßes in der Umgebung der Mündung ab.

Wenn die Richtung des Strahles in der Fortsetzung der Achse des Gefäßes liegt, wird die Reaktion desselben ganz von dem Boden des Gefäßes getragen. Die horizontale Reaktion des Strahles ist in Richtung der des Strahles entgegengesetzt. Lp.

H. Blasius. Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 225-243.

Das komplexe Potential der zweidimensionalen Strömung für den Kreisbogen wurde zuerst von Kutta ausgerechnet (Aeron. Mitt. 1902, Münch. Ber. 1910); er stellte auch eine Formel für den Zusammenhang zwischen der Tragkraft für die Einheit der Breite und Zirkulation auf. Dieselbe Formel ist auch von Joukowsky 1910 abgeleitet (Zs. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt). Die Strömung um eine kreisbogenförmig gekrümmte Flugfläche stellte Kutta nach dem Schwarz-Christoffelschen Verfahren her, und zwar auch für solche Fälle, in denen die äußere Strömung schief zur Flugfläche gerichtet ist. In solchen Fällen existieren für den Kreisbogen nur Lösungen, die an der Vorderkante singulär sind, und die genannten Arbeiten von Kutta und Joukowsky beschäftigen sich hauptsächlich mit der Frage, wie diese Singularität durch Abrundung der Vorderkante zu vermeiden sei, und ob aus der Geschwindigkeitsvermehrung dort vorn eine Saugkraft in Richtung der Strömung resultiert. Der Verf. der vorliegenden Abhandlung befolgt eine andere Methode, um zu dem komplexen Potential solcher Strömungen zu gelangen. Er geht von den Überlegungen aus, welche Singularitäten das Potential in der komplexen Ebene haben muß, und baut den Funktionsausdruck aus diesen Singularitäten auf. Der Querschnitt der Flugfläche ergibt sich dann als Stromlinie zwischen zwei Verzweigungspunkten, wobei im allgemeinen verschiedene Form der oberen und unteren Linie zu erwarten ist. Die Form der Flugfläche ist also nicht, wie bei Kutta, gegeben, sondern sie ergibt sich erst aus der gefundenen Lösung, für deren Aufbau möglichst einfache Funktionsform, nur mit den notwendigsten Singularitäten, maßgebend ist. Für den Fall schiefer äußerer Strömung ergibt sich daher gerade eine solche Fläche, bei der hinten und vorn stetiger Verlauf der Strömung stattfindet. Die Einzelheiten der Rechnung müssen im Original verfolgt werden. Lp.

H. Blasius. Stromfunktionen für Flügel und Turbinenschaufeln. Physik. Zs. **12**, 1177-1179; Verh. Ges. D. Naturf. u. Ärzte, Karlsruhe 1911, $\mathbf{2}_1$, 150-153.

Mit Bezugnahme auf die Abhandlung in Zs. Math. u. Phys. **59** (Referat vorstehend) bemerkt der Verf.: „Die Betrachtung über die charakteristischen Singularitäten legt bei zweidimensionalen Strömungen den funktionentheoretischen Gedanken nahe, daß durch die Kenntnis der Singularitäten die Funktion bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Aus möglichst einfachen Annahmen über die Zahl und Lage der Singularitäten wird man also die einfachsten Ausdrücke für derartige Strömungen herstellen können. Man verzichtet dabei allerdings darauf, die Form des Flügels vorzugeben, diese muß vielmehr erst aus der Stromfunktion errechnet werden. Andererseits aber ist

man in der Lage, durch Hinzunahme weiterer Singularitäten die Strömung in mannigfacher Weise zu variieren und sich so den gewünschten Formen beliebig anzupassen.“ Diese Gedanken werden näher erläutert. Lp.

H. Blasius. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen. Physik. Zs. **12**, 1175-1177; Verh. Ges. D. Naturf. u. Ärzte, Karlsruhe 1911, 2_1, 153-157.

Während Froude den Reibungskoeffizienten k in der Hydraulik als Funktion von $v^2/2gl$ eingeführt hat, weist der Verf. darauf hin, daß O. Reynolds in allgemeinerer Weise k als Funktion von vl/ν definiert hat, wo ν die Dimension hat: Längenquadrat, dividiert durch Zeit. Die Anwendung dieses „Ähnlichkeitsgesetzes“ wird empfohlen unter gleichzeitiger Angabe zur Anstellung praktischer Versuche an Modellen. Lp.

N. Joukowsky. Geometrische Untersuchungen über die Kuttaströmung. Moskau. Phys. Sekt. **15**, Lief. 1, 10-22.

Der Verf. beginnt mit dem Beweise des Theorems: Die Auftriebkraft des Flugzeugs wird erhalten durch Multiplikation des die Geschwindigkeit des Stromes darstellenden Vektors mit der Dichtigkeit der Flüssigkeit und ihrer Zirkulation und durch Drehung dieses Vektors um einen rechten Winkel in die Richtung der Zirkulation. Ferner wird der geometrische Bau der konformen Abbildungen dargelegt, entsprechend den Strömen, welche flügelförmige Konturen und die in Gestalt eines Steuers erscheinende Kontur umfließen. Die erste von diesen Konturen verwandelt sich an der Grenze in die von Kutta untersuchte Kreisbogenkontur. Der Artikel endet mit der Beschreibung des Rohres der aerodynamischen Rollengallerie, welches in der Moskauer technischen Hochschule gebaut ist und einen planparallelen Luftstrom gibt. Jk.

K. Menges. Über lamellare Rotationsbewegung viskoser Flüssigkeiten. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **18**, 327-337.

Der Raum zwischen zwei sich nicht schneidenden koaxialen Rotationsflächen sei von einer zähen Flüssigkeit angefüllt. Die eine der Flächen werde in gleichförmiger Rotation um ihre Achse erhalten. Infolge der inneren Reibung der Flüssigkeit wird dann auf die andere Fläche nach Eintritt des stationären Zustands ein konstantes Drehmoment ausgeübt. Theoretische Formeln sind bisher für drei Fälle abgeleitet worden: koaxiale unendlich lange Zylinder, konzentrische Kugeln, konfokale Ellipsoide, und zwar für jeden Fall durch eine besondere Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen (Margules, Wien. Ber. **83** [2*a*], 588, 1881 und Kirchhoff, Mechanik, 26. Vorlesung). Die drei Integrale haben den Umstand gemeinsam, daß die von ihnen dargestellten Bewegungen der Flüssigkeit lamellar sind, d. h. daß die ganze Flüssigkeit in unendlich dünne Schichten zerfällt, die die Gestalt von

Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse haben, und die sich während der Bewegung einzeln wie starr verhalten. Der Verf. leitet eine bei allen solchen Flüssigkeitsbewegungen gültige Formel für jenes Drehmoment ab und wendet sie auf die obengenannten drei Fälle an, außerdem aber auch noch auf rotierende ähnliche Kegelschnitte, auf Kegel mit gemeinschaftlicher Spitze und auf parallele Ebenen. Lp.

K. Menges. Drehende Schwingungen eines Hohlzylinders in einer zähen Flüssigkeit. Diss. Gießen 1911. Zs. f. Math. u. Phys. **60**, 113-136.

Der Verf. faßt am Schlusse des Aufsatzes die Ergebnisse seiner Arbeit wie folgt zusammen:

1. Es wurde die Theorie eines in einer zähen Flüssigkeit um seine Achse schwingenden dünnwandigen Hohlzylinders aus den hydrodynamischen Grundgleichungen entwickelt und dabei der Einfluß des Zylinderrandes angenähert berücksichtigt. 2. Die Theorie wurde durch Versuche mit Wasser geprüft und bestätigt. 3. Es wurden Versuche mit Wasser nach dem von Margules vorgeschlagenen Kombinationsverfahren angestellt. 4. Die aus den beiden Arten von Versuchen berechneten Reibungskoeffizienten des Wassers stimmen mit den nach den anderen Methoden gefundenen Werten überein. — Als praktisches Verfahren zur Bestimmung der inneren Reibung können die Versuche mit schwingenden Zylindern sich ebensowenig mit den Durchflußversuchen messen wie die anderen Schwingungsversuche: sie sind nicht so bequem und rasch auszuführen, bedeutend umständlicher zu berechnen und erfordern viel größere Flüssigkeitsmengen. Lp.

W. Rybczyński. Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium. Krak. Anz. (A) 1911, 40-46.

Das behandelte Problem kann als eine Verallgemeinerung der bekannten, von Stokes gelösten Aufgabe betrachtet werden. Die Stokessche Annahme, daß die Bewegung so langsam sei, daß man den Einfluß der Trägheit im Vergleich zum Einfluß der Reibung vernachlässigen kann, wird beibehalten; es wird aber vorausgesetzt, daß die Kugel kein starrer Körper ist, sondern aus einer reibenden Flüssigkeit besteht. Als Bewegungsursache wird die infolge der Dichtedifferenz beider Flüssigkeiten wirksame Schwere angenommen. Die vermöge gewisser Annahmen gefundene Lösung zeigt, daß die Grenzfläche der bewegten Kugel die Kugelgestalt behält. Für die Grenze der Geschwindigkeit U wird die Formel gefunden:

$$U = \frac{2}{9}\frac{\sigma - \sigma'}{\mu'} g a^2 \frac{3\lambda + 3}{3\lambda + 2},$$

wo $\lambda = \mu/\mu'$ (Verhältnis der Reibungskoeffizienten der inneren und der äußeren Flüssigkeit) ist. Für die starre bewegte Kugel ($\lambda = \infty$) geht diese Formel in die Stokessche über:

$$U = \frac{2}{9}\frac{\sigma - \sigma'}{\mu'} g a^2,$$

während sie sonst größere Zahlen ergibt. So beträgt die Geschwindigkeit eines in der Luft fallenden Wassertropfens 0.3% mehr als die nach Stokes berechnete; für eine Luftblase in Wasser beträgt der Unterschied 50%. Lp.

Lord Rayleigh. On the motion of solid bodies through viscous liquid. Phil. Mag. (6) **21**, 697-711.

Nachdem der Verf. (§ 1) kurz an die Stokessche Behandlung der Bewegung einer Kugel und eines Zylinders in einer zähen Flüssigkeit erinnert hat, weist er (§ 2) auf eine bekannte Analogie des allgemeinen Problems hin zwischen der Bewegung einer zähen Flüssigkeit, wenn das Quadrat der Bewegung vernachlässigt wird, und den Verrückungen eines elastischen Körpers. „In dem Lichte dieser Analogien können wir schließen, daß, falls das Quadrat der Bewegung absolut vernachlässigt wird, immer eine stetige Bewegung der Flüssigkeit hinter einem festen, nach allen Richtungen begrenzten Widerstande beliebiger Form existiert, die den nötigen Bedingungen sowohl an der Oberfläche des Hindernisses, als auch im Unendlichen genügt, und daß die zur Erhaltung des Gleichgewichts des starren Körpers nötige Kraft endlich ist.“ Unter diesem Gesichtspunkte wird in §§ 3 u. 4 der Fall einer materiellen Ebene behandelt, in § 5 das Problem einer Kugel, die sich mit beliebiger Geschwindigkeit durch eine zähe Flüssigkeit bewegt, in § 6 die Stokessche Lösung für einen Zylinder, der transversal in einer zähen Flüssigkeit oszilliert. In den beiden letzten Paragraphen wird auf die Vorsichtsmaßregeln eingegangen, welche die Bedingungen der angewandten Methode erfordern, und besonders eine Schwierigkeit in dem Werke „Aerodynamics“ von Lanchester (London 1907) behoben. Lp.

E. Zondadari. Sul moto traslatorio d'un solido di rivoluzione in un liquido viscoso. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 338-342.

Die Bewegung wird als so langsam angenommen, daß in den bekannten Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit die Produkte aus den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w und ihren partiellen Ableitungen nach den Koordinaten vernachlässigt werden können; dadurch erhält man die vereinfachten Bewegungsgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(U-\dfrac{p}{\varrho}\right)+\nu\Delta^2 u, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(U-\dfrac{p}{\varrho}\right)+\nu\Delta^2 v, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(U-\dfrac{p}{\varrho}\right)+\nu\Delta^2 w. \end{cases}$$

Der Verf. untersucht die Bewegung, welche in einer unbegrenzten Flüssigkeit durch die Translationsbewegung eines beliebigen Rotationskörpers erzeugt wird, der sich mit der Geschwindigkeit $V(t)$ in der Richtung seiner Drehachse bewegt; $V(t)$ wird so klein angenommen, daß die Gleichungen (3) gelten. Diese Gleichungen sind zwar ursprünglich für festliegende Achsen aufgestellt; sie behalten aber auch die nämliche Form für Achsen, die mit dem bewegten festen

Körper starr verbunden sind. Es zeigt sich, daß die Lösung der Aufgabe vollständig durchführbar ist. Die Note ist ein Auszug aus der Dissertation des Verf. (Rom, Oktober 1909). Lp.

J. HADAMARD. Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. C. R. **152**, 1735-1738.

Die Gesetze des Falles einer festen Kugel in einer zähen Flüssigkeit sind seit Stokes wohlbekannt. Anders verhält es sich mit dem Falle einer flüssigen Kugel. Diese Frage kommt bei den Untersuchungen vor, die zur Bestimmung der Größe der Atome führen. Der Verf. zeigt, daß man dieses Problem nach der Stokesschen Methode ebenfalls behandeln kann, wenigstens wenn man, wie Stokes es übrigens auch getan hat, die Bewegung als so langsam annimmt, daß man die Quadrate der Geschwindigkeiten vernachlässigen kann. Unter den gemachten Annahmen bleibt die Kugelgestalt des fallenden Flüssigkeitskörpers erhalten. Eine Anwendung findet die Untersuchung unter anderem auf die in Luft fallenden Regentropfen. Die Schlußformel bietet im Vergleich zu den bislang erhaltenen Versuchsergebnissen erhebliche Abweichungen. „Es scheint also, bis auf weiteres, daß in den untersuchten Fällen die klassischen Annahmen, von denen wir ausgegangen sind, modifiziert werden müssen." Lp.

H. LAMB. On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid. Phil. Mag. (6) **21**, 112-119.

„Der alleinige Zweck dieser Note ist die Erbringung eines einfacheren Beweises der Oseenschen Resultate (vgl. F. d. M. **41**, 832, 1910) und einer etwas vollständigern Beleuchtung ihres Ziels und ihrer Bedeutung. Eine andere Anschauung der Frage, auf welche in seiner Abhandlung Bezug genommen ist, und welche dem Anscheine nach den Gegenstand einer weiteren Forschung bilden soll, habe ich nicht gestreift." . . . „Es ist von einigem Interesse, die nämliche Methode auf das zweidimensionale Problem des Fließens hinter einem Kreiszylinder anzuwenden. Hierbei wurde bekanntlich Stokes zu dem Schlusse geführt, daß eine stetige Bewegung unmöglich ist. Es wird sich zeigen, daß, wenn die Trägheitsglieder teilweise nach der erörterten Weise in die Rechnung einbezogen werden, dieser Schluß zu ändern ist, und daß ein bestimmter Wert für den Widerstand erhalten wird." Lp.

C. W. OSEEN. Über die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. Zweite Mitteilung. Arkiv för Mat., Astron. och Fysik **7**, Nr. 1, 36 S.

Die Prüfung der Frage, ob nach der Theorie wirklich ein stationärer, singularitätenfreier Bewegungszustand möglich ist, bildet den Gegenstand dieses Artikels. Zu diesem Zweck ist es nicht notwendig, das komplizierte Problem von der Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit zu lösen. „Die Schwierigkeiten, auf welche es hier ankommt, treten in ganz derselben Art in dem ein-

facheren Problem auf, die durch ein translatorisch bewegtes, von der Zeit unabhängiges System von Kräften hervorgerufenen stationären Bewegung einer reibenden Flüssigkeit zu berechnen. Wenn dieses Problem eine singularitätenfreie Lösung besitzt, so läßt sich mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß dasselbe von dem S t o k e s schen Probleme gilt."

Das Resultat der vorliegenden Untersuchung lautet: „Wenn auf eine reibende und unzusammendrückbare Flüssigkeit ein System von Kräften wirkt, welche der Richtung und der Intensität nach von der Zeit unabhängig sind, während die Angriffspunkte sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel der x-Achse bewegen, ist ein stationärer und singularitätenfreier Bewegungszustand möglich, falls erstens die Komponenten der Kraft X, Y, Z abteilungsweise stetige Funktionen von x, y, z sind, welche Ungleichungen von der Form:

$$|X|, |Y|, |Z| < k' \left\{ \frac{1}{(1+R)^{2-\alpha}} \sqrt{1+\frac{x}{R}} + \frac{1}{(1+R)^{2+\beta}} \right\} e^{-\gamma(R+x)}$$
$$(\alpha < \tfrac{1}{8},\ \beta > 0)$$

genügen, und wenn zweitens die Konstante k' hinreichend klein ist." — Nachdem die Existenz dieses Bewegungszustandes festgestellt ist, treten die Fragen auf, ob er eindeutig bestimmt und ob er stabil ist. Diesen Fragen soll eine folgende Mitteilung gewidmet werden. Lp.

C. W. Oseen. Vereinfachte Darstellung einiger in der Hydrodynamik auftretender Funktionen. Arkiv för Mat., Astron. och Fysik 7, Nr. 12, 3 S.

Nachtrag zu den Untersuchungen „Über die S t o k e s sche Formel" usw. Gewisse dort eingeführte Funktionen gestatten, wie der Verf. nachträglich bemerkt hat, verhältnismäßig einfache, integralfreie Darstellungen. Lp.

J. Stock. Über die Bewegung einer Kugel in einem zähen Medium längs einer ebenen Wand. Krak. Anz. (A) 1911, 18-27.

In Bd. 2, S. 23 der „Abhandlungen über theoretische Physik" behandelt H. A. L o r e n t z die Beeinflussung einer stationären Bewegung in einer reibenden Flüssigkeit durch eine unbegrenzte Wand infolge des Umstandes, daß an der Wand die Geschwindigkeiten Null sein müssen, da Gleitung ausgeschlossen ist. Als spezieller Fall der allgemeinen Erwägungen wird dann die Bewegung einer Kugel normal und parallel zur Wand betrachtet; es ergibt sich bei einmaliger Zurückwerfung der Bewegung, daß der Widerstand, den die Kugel erleidet, im Verhältnis von $1:1+9R/8a$, bzw. $1:1+9R/16a$ vergrößert wird (R ist der Kugelradius, a ihr Abstand von der Wand). Dabei werden unter der Voraussetzung, daß R/a klein gegen 1 ist, die an der Oberfläche übrigbleibenden Bewegungskomponenten als verschwindend klein vernachlässigt. Auf Veranlassung von S m o l u c h o w s k i führt der Verf. die Rechnung weiter, indem er höhere Potenzen von R/a (bis zum vierten Grade)

in Betracht zieht; die Untersuchung soll besonders feststellen, ob auch Kräfte in normaler Richtung wirken oder Drehungsmomente auftreten. Als Resultat ergibt sich: Eine Kugel, die sich in einem zähen Medium parallel einer ebenen Wand langsam bewegt, erleidet einen Widerstand in der Richtung der Bewegung, der durch Anwesenheit der Wand im Verhältnis

$$1 : \left[\frac{1}{1 - 9R/16a} - \left(\frac{R}{2a}\right)^3 \left(1 + \frac{16a}{9R}\right)\right]$$

bei Berücksichtigung vierter Potenzen von R/a vergrößert wird. In der Richtung senkrecht zur Wand wirken dagegen auf die Kugel keine Kräfte, solange in den hydrodynamischen Grundgleichungen die Glieder $u\partial u/\partial z$ usw. vernachlässigt werden. — Das Drehungsmoment ist in diesem Falle ebenfalls Null.

Lp.

H. D. Arnold. Limitations imposed by slip and inertia terms upon Stokes's law for the motion of spheres through liquids. Phil. Mag. (6) 22, 755-775.

Die Arbeit ist hauptsächlich experimentellen Charakters. Theoretisch ist daran nur die Form, in die die Formeln gebracht werden, um der Prüfung durch die Beobachtung zugänglich zu werden.

Br.

M. Smoluchowski. Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. Krak. Anz. (A) 1911, 28-39.

Die Untersuchung soll einen Beitrag zur Beantwortung der Frage liefern, inwieweit die Bewegung einer in einem zähen Medium befindlichen Kugel durch die Anwesenheit oder Bewegung einer oder mehrerer anderen Kugeln modifiziert wird. Die Resultate schränken die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes für die Bewegung von Nebelteilchen erheblich ein und mögen vielleicht auch Divergenzen in den Anschauungen der Elektronentheorie aufklären. Von speziellen Ergebnissen der Untersuchung führen wir die folgenden Sätze an, die sich auf zwei Kugeln von den Radien a und b im Abstande R voneinander beziehen.

1) Bewegen sich die beiden Kugeln parallel zueinander mit gleicher Geschwindigkeit c, so ist der Widerstand einer jeden derselben in erster Annäherung um die Größe $9abc\mu\pi/2R$ vermindert; also ist die Fallgeschwindigkeit bei gegebener Größe der Kugeln im Vergleich zum Stokesschen Gesetze vergrößert. 2) Außerdem wirkt längs der Verbindungslinie der Kugeln, und zwar in der Richtung von der rückwärtigen zur voranschreitenden hin, eine Kraft, welche in erster Annäherung durch $gabc\mu x/R^2$ gegeben ist, also für beide Kugeln gleich gerichtet und gleich groß ist. 3) Überdies werden die Kugeln von Drehungsmomenten beansprucht.

Während diese Ergebnisse in den beiden ersten Abschnitten der Arbeit, die sich auf die Strömung bei Gegenwart zweier Kugeln beziehen, abgeleitet

werden, ist der dritte Abschnitt den Systemen von n Kugeln gewidmet und den allgemeinen Folgerungen für verschiedene physikalische Erscheinungen.

Lp.

R. Gans. Wie fallen Stäbe und Scheiben in einer reibenden Flüssigkeit? Münch. Ber. 1911, 191-203.

Die Arbeit ist durch die Diskussion veranlaßt, die sich an den Königsberger Vortrag von Ehrenhaft über die Stokessche Theorie fallender Kugeln in einem reibenden Medium angeschlossen hatte. Der Verf. stellt die Frage, wie ein konstantes Strömungsfeld durch einen in ihr ruhenden festen Körper modifiziert werde, und welche Kräfte und Drehmomente man aufwenden müsse, um den Körper in dieser Strömung in Ruhe zu halten. Aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen (Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, § 324) wird gefolgert: Scheiben oder Stäbchen, die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, haben nicht die Tendenz, beim langsamen Fallen in einer Flüssigkeit sich irgendwie einzustellen. Hierauf wird angenommen, daß eine Scheibe ein abgeplattetes, ein Stäbchen ein verlängertes Rotationsellipsoid ist; die für die stationäre Bewegung maßgebenden Formeln sind die bekannten Oberbeckschen Gleichungen (J. für Math. **81**, 62, 1876). Aus ihnen berechnet der Verf. den Winkel zwischen Geschwindigkeit und Kraft und gibt am Schlusse drei Tafeln für angenommene Zahlenverhältnisse. „Aus Tabelle 2 ersieht man, daß man aus dem nicht senkrechten Fall von Teilchen in einer Flüssigkeit einen Schluß auf ihre Abweichung von der Kugelgestalt machen kann; doch ist dies Kriterium nicht besonders scharf, da im äußersten Falle die Abweichung von der Vertikale bei Platten 11° 32′, bei Stäbchen 19° 28′ beträgt.“ Befremdlich ist der Mangel an Bezugnahme auf die bekannten Erscheinungen in der Ballistik.

Lp.

L. Euler. Vollständigere Theorie der Maschinen, die durch Reaktion des Wassers in Bewegung versetzt werden. Herausgegeben von E. A. Brauer und M. Winkelmann. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 94. S. kl. 8°. (Ostwalds Klassiker, Nr. 182.)

„Die drei Arbeiten, durch welche Leonhard Euler zum Begründer der Turbinentheorie wurde, sind in französischer Sprache abgefaßt und gelten wohl im Kreise der heutigen Ingenieure als zu veraltet, um sie noch in die Hand zu nehmen. Wer sich aber die Mühe gibt, die dritte dieser Abhandlungen zu studieren, die unter dem Titel: „Théorie plus complète des machines, qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau“ in der Histoire de l'Académie Royale, Berlin 1754, veröffentlicht ist, wird überrascht sein, wie wenig sie in 1½ Jahrhunderten veraltet ist.“

Die Übersetzung dieser dritten Abhandlung nimmt 70 Seiten in Anspruch. Hierbei ist die Eulersche Ausdrucksweise möglichst treu wiedergegeben worden. Die dann folgende geschichtliche Einleitung (S. 72-79) und die Erläuterungen zum Text (S. 80-94) sind mit großer Sachkenntnis abgefaßt und geben eine Fülle von Belehrung nach der historischen und theoretischen Seite

des von Euler behandelten Gegenstandes. Das Bändchen verdient ein genaues Studium sowohl von den Theoretikern der Hydrodynamik, als auch von den Technikern des Maschinenbaues. Lp.

H. Lorenz. Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder, Wasser- und Dampfturbinen, Schleuderpumpen und -gebläse, Turbokompressoren, Schraubengebläse und Schiffspropeller. Zweite, neubearbeitete und vermehrte Auflage. München und Berlin: R. Oldenbourg. XII u. 240 S. gr. 8°. Mit 116 Abbildungen.

Die erste, 1906 erschienene Auflage dieses Werks konnte F. d. M. **37**, 783, nur mit dem Titel angezeigt werden. Mit Genugtuung kann der Verf. im Vorwort feststellen, daß diese Monographie in allen Fachkreisen ein lebhaftes Interesse erweckt und eingehende Erörterungen über prinzipielle Fragen hervorgerufen hat. Wir verweisen nur auf die Artikel von R. von Mises (F. d. M. **38**, 751-752, 1907 u. **40**, 821-822, 1909), der bei aller Anerkennung der verdienstlichen Leistungen von Lorenz doch in einem unausgeglichenen Gegensatze zu ihm verblieb.

„Die eingehendere Behandlung der wissenschaftlichen Grundlagen unserer Theorie der Kreiselräder sowie die Aufnahme neuerer, eigener und fremder Forschungen und Versuchsergebnisse, über die das Literaturverzeichnis im Anhang Aufschluß gibt, war naturgemäß ohne einer Vergrößerung des Umfanges gegenüber der ersten Auflage (von 144 auf 240 S.) nicht durchführbar. Um diesen nicht noch mehr anschwellen zu lassen, habe ich unter anderem den historischen Überblick, der den größten Teil des Vorwortes der ersten Auflage bildete, gestrichen."

Inhalt. Kap. I. Hydrodynamische Grundlagen. 1. Die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit. 2. Umformung in Zylinderkoordinaten. 3. Die zweidimensionale Strömung. 4. Die rotationsfreie Strömung. 5. Strömung mit Rotation. 6. Die wirbelfreie ebene Strömung. 7. Allgemeine Theorie achsensymmetrischer Strömungen ohne Ringwirbel.

Kap. II. Radialräder. 8. Grundlagen der Theorie. 9. Einführung der Wirbelkomponenten. 10. Folgerungen für die Gestaltung von Kreiselrädern. 11. Profile von Radiallaufrädern. 12. Profile der Leitapparate von Radialrädern. 13. Die Schaufelform der Radialräder. 14. Die Schaufelenden der Radialräder. 15. Der Einfluß der endlichen Schaufelzahl. 16. Die Berechnung von Radialrädern. 17. Beispiele von radialen Wasserturbinen, Pumpen und Gebläsen. 18. Versuche mit ausgeführten Turbinen, Pumpen und Gebläsen. 19. Die Gleichdruck- und Freistrahlräder. 20. Die Verbundräder. 21. Der Druckverlauf im Innern der Lauf- und Leitkränze von Verbundrädern. 22. Beispiele von Turbokompressoren und Dampfturbinen. 23. Die Verwendung von Kreiselgebläsen als Verdichter in Kaltdampfmaschinen. 24. Die Verwendung von Kreiselrädern in Kaltluftmaschinen und Verbrennungsmotoren.

Kap. III. Die Axialräder. 25. Allgemeine Eigenschaften der Axialräder. 26. Theorie und Berechnung der Schraubengebläse. 27. Theorie der Schiffs-

propeller. 28. Berechnung der Schiffspropeller. 29. Versuche mit Schiffspropellern. 30. Die Axialdampfturbine.

Nachtrag zu § 9. — Anhang: Verzeichnis der Schriften über die neue Theorie der Kreiselräder, ihre Grundlagen und Versuche. Lp.

P. Razous. Utilisation des marées pour la production de la force motrice. Ass. Franç. Toulouse **39**, 108-131.

Der Verf. gibt zuerst einen summarischen Überblick über die bisher gemachten Vorschläge zur Ausnutzung der Gezeiten als Kraftquelle und entwickelt dann neue Pläne, die nach seiner Ansicht sowohl bei Ebbe, als bei Flut fast konstante Fallhöhe versprechen. Lp.

C. Schippers. Étude générale des fleuves à marées et ses applications. La grande coupure d'Anvers. Ann. Assoc. Ingén. Gand (5) **4**, 187-198.

Beweis und Anwendung des folgenden Satzes: Der Ort der mittleren Wasserspiegel in allen Punkten eines Wasserlaufes bildet die hydraulische Achse, welche den oberen mittleren Strömungsmengen entspricht und im mittleren Spiegel des Meeres oder der aufnehmenden Wasserläufe endigt. Mn. (Lp.)

C. A. Parsons. Experiments on the compression of liquids at high pressures. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 332-348.

Die Arbeit hat auch einen kleinen theoretischen Anhang betreffend die Berechnung der Versuche. Br.

R. v. Mises. Über den Englerschen Flüssigkeitsmesser. Physik. Zs. **12**, 812-814.

Herleitung von Formeln, die in dem Enzyklopädienartikel des Verf. IV 10 (Referat S. 777 dieses Bandes) schon benutzt sind. Lp.

L. E. Bertin. Lois générales du mouvement accéléré ou retardé du navire consécutif d'un changement de puissance du moteur. C. R. **152**, 19-26.

Es werden die Bewegungsgleichungen eines Schiffes aufgestellt und integriert, indem einfache Ansätze über die Schiffswiderstände als Funktionen der Wasserverdrängung und der Geschwindigkeit und über den Schraubenschub in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gemacht werden. Die Ergebnisse sollen für die Steuerungstaktik der Kriegsschiffe wichtig sein. Rr.

L. E. Bertin. Complément aux „Lois générales du mouvement accéléré ou retardé des navires." C. R. **152**, 165-166.

Berichtigt die obige Mitteilung über die Integration der Bewegungsgleichung des Anlaufs und Auslaufs von Schiffen, in der Exponentialfunktionen mit Beobachtungskoeffizienten der abhängigen Variabeln des Weges auftreten. Rr.

Weitere Literatur.

D. Bánki. Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit. Zs. d. Ver. d. Ing. **55**, 1215-1216.

J. H. Biles. The grounds of our belief to see whether any known possible combination of circumstances may cause disaster. (Opening address.) Nature **87**, 335-356.

Fr. Horn. Die dynamischen Wirkungen der Wellenbewegung auf die Längsbeanspruchung des Schiffskörpers. Berlin: Springer. 118 S. Lex. 8°.

H. J. Hughes and A. T. Safford. A treatise on hydraulics. New York: The Macmillan Co.; London: Macmillan and Co., Ltd. XIV u. 505 S. [Nature **89**, 82-83, 1912.]

D. W. Mead. Water-power engineering. Corrected edition. New York: Mc Graw. 803 S. 8°.

Menneret et Boussinesq. Mouvement oscillatoire et mouvement uniforme des liquides dans les tubes cylindriques. Frottement interne. Aperçu historique sur les oscillations d'une colonne liquide dans un tube en *U*. Tours: Deslis. 28 S. 8°.

Ch. S. Slichter. The mixing effect of surface waves. Annals of Math. (2) **12**, 170-178.

A. Sonnefeld. Über Flüssigkeitsströmungen um zusammengesetzte zylindrische Schalen und die daraus folgenden Auftriebskräfte. Diss. Jena. 61 S. 8°.

M. Stark. Hydromekanik med övningsexempel och tillämpningar jämte en kortfattad turbinteori. Till ledning vid undervisningen i de tekniska elementarskolorna. 2ª upplaga. Stockholm: Fritz. 72 S. 8°.

F. Wittenbauer. Aufgaben aus der technischen Mechanik. Bd. III. Flüssigkeiten und Gase. Berlin: J. Springer. VIII u. 328 S. gr. 8°.

C. Aerodynamik.

F. Charbon. Influence de l'air dans le frottement des solides. Ann. de Chim. et Phys. (8) **24**, 1-87.

In dieser Thèse zeigt der Verf. zuerst an einigen einfachen, ganz einleuchtenden qualitativen Versuchen die von der Luft bei der Reibung fester Körper gespielte Rolle. Dann studiert er in einem besonders einfachen und zu ex-

perimentellen Bestätigungen geeigneten Falle die Einwirkung der Luft als Schmiermittel: a) unter atmosphärischem Druck, b) unter sehr stark vermindertem Druck. Hieraus werden einige die Reibung zwischen festen Körpern betreffende theoretische Schlüsse gezogen, die experimentell geprüft worden sind. Am Schluß werden alle Ergebnisse zusammengestellt. Unter „tragender Kraft" ist dabei die Differenz zwischen dem inneren Druck (der Elastizität) p der trennenden Luftschicht und dem äußeren Druck π, also $p - \pi = F$ verstanden.

1. Bei der Reibung zwischen festen Körpern in freier Luft schiebt sich dieses Fluidum unabweislich ein. Wenn man die Wandlungen, die sie hervorruft, nicht berücksichtigt, so erscheinen die Reibungsgesetze bedeutend abgewandelt, besonders bei leichten Belastungen der Flächeneinheit.

2. Die Navierschen, auf die benutzte Anordnung angewandten Gleichungen gestatten es, zwei verschiedene Ausdrücke der tragenden Kraft F zu finden, je nachdem die Luftdichte rechtmäßig oder nicht als eine konstante betrachtet werden kann. In dem ersten Falle wächst F mit der Anfangsgeschwindigkeit und ist unabhängig von dem äußeren Druck. In dem zweiten Falle nähert sie sich dagegen einer dem äußeren Druck proportionalen Grenze, wenn u_0 unendlich groß wird. Aus denselben Gleichungen läßt sich der Ausdruck für die tangentiale Komponente V des Druckes auf den Reiber berechnen. Diese Komponente kann verschwinden und das Zeichen wechseln.

3. Die ausgeführten Versuche haben diese Formeln bestätigt; insbesondere haben sie gezeigt, daß die tragende Kraft in der Luft bei mittleren Drucken der Geschwindigkeit proportional und vom Druck unabhängig ist. Sie haben die theoretisch vorhergesagte Existenz der Grenze für die tragende Kraft sichergestellt. Sie haben den für V angekündigten Zeichenwechsel ermittelt.

4. Endlich haben einige Anwendungen dieser Studie auf die gleitende Reibung bewiesen, daß der Einfluß der Luft die Reibungsgesetze scheinbar abwandelt. Die direkt meßbare tangentiale Kraft ist nicht mehr unabhängig von der Geschwindigkeit, sondern wird eine linear zunehmende oder abnehmende Funktion von ihr.

Lp.

H. Lamb. On atmospheric oscillations. Lond. R. S. Proc. (A) **84**, 551-572.

Die Arbeit beschäftigt sich in der Hauptsache mit der Theorie der longitudinalen Wellen in einer Atmosphäre, die den folgenden Voraussetzungen genügt: Sie soll längs ihrer ganzen Erstreckung gleichmäßig und stetig geschichtet sein. Der Temperaturgradient soll nicht weit unterhalb seines normalen Wertes liegen. Die Ausdehnungen und Zusammenziehungen sollen adiabatisch vor sich gehen. Bei einem unstetigen Übergang zweier Schichten verschiedener Dichte und einem vom normalen sehr abweichenden Temperaturgradienten werden die Resultate wesentlich anders. Für die spezielle Analyse wird der Temperaturgradient direkt als konstant angenommen. Br.

A. Steichen. On the motion of a gas in two dimensions. Journ. Ind. M. S. **3**, 7-15, 53-65.

Es wird der Inhalt von zwei Göttinger Dissertationen gegeben. Ph. Meyer (1908) hat die Gegenden der einfachen Ausdehnung eines Gases gefunden,

indem er ausging von der zweidimensionalen Kontinuitätsgleichung, der Wirbelfreiheit des Feldes und der Energiegleichung. Verf. hingegen untersucht das Gebiet doppelter Ausdehnung, indem er zur zweidimensionalen Kontinuitätsgleichung die Eulersche Gleichung hinzunimmt (Diss. 1909) (Experimentelles schon bei Prandtl, Phys. Zs. 8, 26). Grb.

F. W. Lanchester. Aerodynamik. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem Englischen übersetzt von C. und A. Runge. Zweiter Band: Aerodonetik. Mit Anhängen über die Theorie und Anwendung des Gyroskops, über den Flug der Geschosse usw. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. XIV u. 327 S. gr. 8⁰. Mit 208 Fig. im Text und einem Titelbild.

Vgl. die Anzeige des ersten Bandes F. d. M. **40**, 826, 1909.

Kapitel I ist eine einführende Darlegung der allgemeinen, für das Gleichgewicht und die Stabilität eines fliegenden Aerodons („Luftgleiters") in Betracht kommenden Sätze, die durch praktische Beispiele, darunter einen Bericht über die früheren Versuche des Verf., erläutert ist.

Die Kapitel II und III enthalten eine analytische Untersuchung der Flugbahn, beschränkt durch eine Hypothese, die den Einfluß der Größenverhältnisse und des Trägheitsmoments des Aerodons ausschließt und den Widerstand entweder als nicht vorhanden oder durch eine Triebkraft von gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung ausgeglichen annimmt. Die Untersuchung gipfelt in der Auftragung der Flugkurve nach der Gleichung und enthält eine Erörterung gewisser besonderer Fälle, so der Flugbahn oder Phygoide von kleiner Amplitude. Sie bildet in der Hauptsache die Grundlage der übrigen Arbeit, und es wird unter dem Namen Phygoidtheorie im weiteren Bezug darauf genommen; sie ist der Schlüssel zu der quantitativen Erforschung der Longitudinalstabilität und zur Lösung vieler verwandter Probleme des freien Fluges.

Kapitel IV ist einer Erörterung einiger der naheliegenden und einleuchtenden Folgerungen aus der Phygoidtheorie und der Betrachtung der Wirkungen des Windes, sowohl einzelner Windstöße, als einer Fluktuation mit bestimmter Periodizität, gewidmet.

Kapitel V bringt eine wichtige Erweiterung der Phygoidtheorie: die durch die anfangs eingeführte Hypothese ausgeschlossenen Elemente, Widerstand und Trägheitsmoment, werden in die Betrachtung mit einbezogen. Die Theorie wird bis zu einem Punkte entwickelt, wo sie für die Berechnung der Verhältnisse eines Aerodons oder Aerodroms großen praktischen Wert bekommt; die Untersuchung gipfelt in der Aufstellung einer Gleichung, der Stabilitätsgleichung; durch sie werden die Bedingungen scharf definiert, von denen die Beständigkeit der Flugbahn abhängt.

Kapitel VI ist ein Bericht über die experimentelle Nachprüfung der in den Kapiteln II, III und IV angestellten theoretischen Untersuchungen.

Kapitel VII besteht aus einer Untersuchung über seitliche und Richtungsstabilität. Der Gegenstand ist so behandelt, daß diese beiden Arten der Stabilität erst getrennt und dann gemeinschaftlich unter dem Namen der „Rotationsstabilität" untersucht werden. Auch diese Erörterung faßt die Bedingungen dieser Art der Stabilität in einer Gleichung zusammen.

Kapitel VIII enthält teils eine Übersicht, teils eine weitere Ausführung des Vorhergehenden. Es umfaßt einen Überblick über die Grundlagen der theoretischen Untersuchungen nebst einigen Bemerkungen und einer Erörterung ihrer Grenzen und Lücken; ferner die Ausdehnung der in Kap. V entwickelten Theorie auf den Fall eines durch Motor und Flügelschraube getriebenen Aerodons und eine weitere Untersuchung der Dämpfungsgeschwindigkeit der Phygoidoszillation. Den Schluß des Kapitels bildet eine Erörterung der Theorie der entsprechenden Geschwindigkeiten und ihrer Anwendung auf Modellversuche in verkleinertem Maßstabe sowie einige Bemerkungen über vom elementaren Typus abweichende Formen von Aerodonen.

Kapitel IX behandelt das Phänomen des Segelfluges, sowohl vom Standpunkte des Beobachters, als im Lichte der im Vorhergehenden entwickelten Theorie. Die theoretischen Betrachtungen gehen von dem Ausspruche Rayleighs aus, daß zur Ermöglichung des Segelfluges der Wind entweder nicht horizontal oder nicht gleichmäßig sein müsse.

Kapitel X ist hauptsächlich eine Darlegung einer Versuchsmethode des Verf.; es enthält viele Bemerkungen, Beobachtungen und Hinweise, die für solche, die das Flugproblem experimentell untersuchen wollen, von Wert sein dürften.

Der Anhang enthält: 1. Theorie der Stabilität (Penaud, 1870). 2. Theorie der Stabilität (Verf., 1897). 3. Des Verf. Aerodon von 1894. 4. Lösung der Gleichung dritten Grades (mit dem Rechenschieber). 5. Rechnungen zur Konstruktion der Phygoidentafel. 6. Trägheitsmoment. Die Methode der doppelten Aufhängung. 7. Das Gyroskop. 8 a. Das gezogene Geschütz. 8 b. Der Bumerang. 8 c. Der Schlicksche Schiffskreisel. 8 d. Anwendung der Gyroskope zur Richtung des Whitehead-Torpedos. 8 e. Andere Anwendungen des Gyroskops.

Wir schließen mit den folgenden Sätzen aus der Anzeige dieses Bandes im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **20**, 134 von C. Runge: „Es ist ein gutes Zeugnis, das man dem Buche ausstellen kann, wenn man sagt, daß es seit dem Erscheinen des englischen Originals im Herbst 1908 nicht veraltet ist; denn in diesen Zeitraum fallen die außerordentlichen praktischen Fortschritte der Aviatik. Physiker und Ingenieure werden auch in dem zweiten Bande eine Fülle von Betrachtungen bleibenden Wertes finden, wenn auch natürlich manche Ableitung Ergänzungen und Änderungen erfahren wird.“

Lp.

G. H. Bryan. Stability in aviation. An introduction to dynamical stability as applied to the motions of aeroplanes. London: Macmillan and Co., Limited. X u. 192 S. 8°.

Als zweites Heft der „Macmillan's Science Monographs“ erscheinend, liefert das Buch von Bryan sehr wertvolle Untersuchungen über Stabilität beim Luftfluge. Inhalt: Kap. I. Introduction and summary. II. Fundamental principles. III. General considerations regarding symmetrical derivatives. IV. Graphic statics of longitudinal equilibrium. V. Longitudinal stability of single-lifting systems. VI. Longitudinal stability of double-lifting systems. Extension of results to systems other than narrow aeroplanes moving at small angles. VII. Asymmetric or „lateral“ stability; straight planes and vertical fins. VIII.

Lateral stability. Bent up planes. IX. General conclusions. X. Comparison with other theories. XI. Problems. Notes. Nomenclature. Notation. [Vgl. Nature 88, 406-407, 1912.] J.

P. Lucas-Girardville. Étude du problème de l'aviation (Fin). Revue d'Artillerie 78, 56-72.

Nachträge zu der Abhandlung des Vorjahres (F. d. M. **41**, 849, 1910). I. Die Gesetze des Luftwiderstandes. Wiederholung der Grundformeln. Formeln des Kapitäns Pagezy. Ihre Anwendungen. II. Neuere experimentelle Forschungen über den Luftwiderstand.

II. Auf die Schrauben bezügliche Betrachtungen. Änderungen des Antriebs einer Triebschraube, die durch ein konstantes motorisches Kräftepaar beansprucht wird. Beziehung zwischen dem Rückstoß und der mechanischen Nutzleistung der Schraube. Lp.

D. Tschapligin. Von dem Drucke eines planparallelen Stromes auf untergetauchte Körper (zur Theorie der Aeroplane). Moskau. Math. Samml. 28, 120-166. (Russisch.)

Diese Arbeit bringt eine vollständige Analyse der von Kutta gestellten Aufgabe über den einen sehr langen zylindrischen Körper umfließenden Strom. Der Verf. gibt die allgemeine Methode an, um die verschiedene Randlinien umfließenden Ströme zu erhalten. Er schlägt diese Methode vor für die Bestimmung des hydrodynamischen Druckes auf den Kreisbogen, auf den Kreisbogen mit Endabrundung, auf eine flügelartige Form, welche die Inversion einer Parabel vorstellt, auf einen Rand, welcher unterhalb des Flügels eine gezahnte, ausgebauchte Oberfläche gibt. Neben der Bestimmung der Auftriebkraft gibt der Verf. die Methode, die Momente der Druckkräfte bezüglich irgend eines Momentenzentrums zu finden, d. h. er gibt die Methode zur Auffindung des Druckzentrums. Für den Fall der flügelartigen Form, die als Inversion einer Parabel erscheint und an der Grenze in den Kreisbogen übergeht, gibt er folgende Formel des Moments M der Druckkräfte:

$$M = 4\pi\varrho a^2 v_0 \sin^2\mu \left(\sin\beta\cos\beta + \frac{\sin\beta\cos\mu\cos(\beta-\mu)}{1+\varepsilon} + \frac{\sin(\beta-\mu)\cos(\beta-\mu)\cos^2\mu}{(1+\varepsilon)^2}\right),$$

in welcher μ ein Viertel des die Sehne umspannenden Bogens vorstellt und $\beta-\mu$ der von der Sehne ab zuzählende Angriffswinkel ist, a der Radius des Bogens, ε eine die Konturbreite charakterisierende Größe und v_0 die Geschwindigkeit des Windes. Wenn $\beta = 0$ und der Angriffswinkel den Wert $-\mu$ erhält, wobei die Auftriebkraft gleich Null, so erhält das Moment die Größe:

$$M = -\frac{4\pi\varrho\, a^2 v_0^2}{(1+\varepsilon)^2}\sin^3\mu\cos^3\mu,$$

wobei das Zeichen — anzeigt, daß ein Kräftepaar erhalten wird, welches die

Angriffspunkte der Tragflächen nach unten dreht. Diese sehr wichtige Bemerkung Tschaplingins zeigt die Gefahr an, welche eintreten kann, wenn man sich beim Fluge auf Aeroplanen des negativen Angriffswinkels bedient.

In der zu besprechenden Arbeit werden auch die Fälle behandelt, bei welchen im Strome ein Wirbel vorhanden ist, welcher sich oberhalb der Tragflächen im Gleichgewicht befindet. Der Verf. zeigt, welchen Einfluß dieser Wirbel auf die Steigkraft des Aeroplans ausübt. Jk.

N. Joukowsky. Bestimmung des Drucks eines planparallelen Flüssigkeitsstromes auf eine Kontur, welche an der Grenze in einen Abschnitt einer Geraden übergeht. Moskau. Math. Samml. 28, 195-204. (Russisch.)

Mit Hülfe der konformen Abbildung

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

gibt der Verf. einen Strom, welcher die in bezug auf die Achse symmetrische Kontur des Steuers umfließt, wobei diese Kontur an der Grenze in einen Abschnitt einer geraden Linie übergeht. Dieser Kontur entspricht die von dem Angriffswinkel unabhängige Lage des Druckzentrums in der Entfernung eines Viertels der Steuerlänge von der Eintrittskante. Jk.

N. Joukowsky. Von den Tragflächen der Flugzeuge des Typus Antoinette. Moskau. Phys. Sect. 15, 1-46. (Russisch.)

Der Verf. nennt so Flächenkonturen, deren Durchschnitt durch zwei sich schneidende Kreisbogen begrenzt ist. Er enthält einen solche Konturen umfließenden Flüssigkeitsstrom, indem er einen einfachen Strom zuerst einer konformen Abbildung mit n-facher Winkelveränderung und dann einer Inversion unterwirft. Der einfache, der Abbildung zu unterwerfende Strom wird aus dem planparallelen Strome erhalten, welcher durch eine unbewegliche Gerade und einen kleinen Kreis begrenzt wird, der sich unter einem Winkel zur Geraden bewegt, und um welchen sich ein Wirbel dreht. Einer gründlichen Untersuchung unterwirft der Verf. die Kraft des Drucks auf die Kontur des Typus Antoinette und die Angriffspunkte dieser Kraft.

Für die Größe der Kraft erhält er die Formel

$$P = 4\pi r \left(\frac{2}{n}\right) \varrho V^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$$

und für das Moment der Druckkraft in bezug auf die hintere Konturkante den Ausdruck:

$$L = 4\pi r^2 V^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \Big[\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(n-1\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{n^2-1}{3}\cos\frac{2\alpha}{2}\sin\beta\cos\beta\Big].$$

Hier ist β der Angriffswinkel mit der Sehne; der Winkel α wird nach dem Winkel α_1 des mehr gewölbten Bogens aus der Formel bestimmt:

$$\alpha = \frac{2\alpha_1}{n} - \frac{\mu}{n},$$

in der μ der Winkel zwischen den Bogen ist und $n = \pi(2 - n)$, r ist der Radius, welcher zur Sehne bei dem Winkel α gehört.

Außer den durch zwei Bogen gebildeten Konturen hat der Verf. in derselben Analyse flügelförmige Konturen erhalten. Die Abhandlung endet mit der Bestimmung des Stromwiderstandes in Abhängigkeit von den fortlaufenden Wirbeln.

Bei dem Falle $n = 2$ stehenbleibend, bei welchem die Kontur des Typus Antoinette in einen Kreisbogen übergeht, erhält der Autor für diese Kraft folgende Formel:

$$T = 4\pi\varrho V^2 r \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^3\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\beta.$$

Jk.

ZIEMBINSKI. De la relation qui existe entre la poussée de l'hélice propulvise en marche et sa poussée au point fixe. C. R. **152**, 77-79.

Der Schub eines Schraubenpropellers im Stande wird zu demjenigen in Fahrt nach der Froudeschen Flügelblattheorie (hier Drzewiecki zugeschrieben) in Beziehung gesetzt. Die Berechnung ist falsch, weil die Ansaugungsgeschwindigkeit des Steigungsmediums und die gegenseitige Beeinflussung der Flügel nicht berücksichtigt wird. Rr.

W. JARKOWSKI. Loi approximative de la montée d'un aéroplane. C. R. **153**, 237-239.

Entwickelt für die größte erreichbare Höhe eines Flugzeuges das Gesetz, daß die verhältnismäßige erreichbare Luftdruckabnahme (in der Höhe) gleich dem verhältnismäßigen Motorleistungsüberschuß gegen horizontale Fahrt am Boden ist. Rr.

W. M. KUTTA. Über ebene Zirkulationströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen. Münch. Ber. 1911, 65-125.

Der Verf. bildet in der vorliegenden Abhandlung seine Methode, den Auftrieb von flügelartigen Körpern in einer Parallelströmung zu finden, aus.

Es handelt sich darum, die Kontur oder die Konturen der Flügelfläche auf einen oder zwei Kreise abzubilden, dergestalt, daß alle Singularitäten innerhalb der Kreise oder auf denselben liegen, die Außengebiete eindeutig aufeinander abgebildet sind, und zwar so, daß die unendlich fernen Punkte einander entsprechen. Dann wird auch die Parallelströmung mit Zirkulationen um die Kreise in eine solche mit Zirkulationen um die Flügelprofile übergeführt.

Die Stärken der Zirkulationen können bestimmt werden, falls die Flügelkonturen je eine Spitze an der austretenden Seite der Strömung haben, durch die Bedingung des Endlichbleibens der Geschwindigkeit.

Kutta führt nun aus, wie aus Konturen mit zwei Verzweigungspunkten solche mit je einem abgeleitet werden können, durch umschließende in einem Verzweigungspunkt tangierende Kreise, dann wie Wirbelfäden im Endlichen, durch die die entgegengesetzte Zirkulation entstehe, rechnerisch berücksichtigt werden können.

Er zeigt ferner, wie die Strömungsfunktion bei Mehrdeckerprofilen aufzustellen ist.

Sodann folgen die speziellen Einzelfälle des Sichelprofils, das in bezug auf den Auftrieb numerisch mit dem doppelt gezählten Kreisbogen verglichen wird.

Ferner wird der ebene Doppeldecker mit Hülfe Legendrescher Integrale behandelt, wobei nicht nur die Größe des Auftriebs bei verschiedener Flügelentfernung, sondern auch seine Verteilung auf jeden der beiden Flügel nach Richtung und Lage ermittelt wird und sich gute Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt.

Auch für kreisförmig gewölbte Doppeldeckerprofile gewisser gegenseitiger Stellung können diese Fragen allerdings erheblich komplizierter erledigt werden (mit Hülfe mechanischer Integration), und die Ergebnisse zeigen gewisse auch tatsächlich vorhandene Vorteile der gewölbten Flächen.

Besonders bemerkenswert wird die Rechnung nun für sogenannte Jalousieflächen, d. h. unendlich viele senkrecht übereinandergestellte ebene Profile. Durch Reihenbildung aus einer endlichen Zahl von Profilen kann eine einfache Abbildungsfunktion und Strömungsfunktion aufgestellt werden. Es stellt sich dabei heraus, daß die Geschwindigkeit auch im Unendlichen vor und hinter den Platten durch die Summierung der unendlich vielen Zirkulationen nach oben oder nach unten abgelenkt wird, und daß der Auftrieb infolgedessen nicht senkrecht auf der Geschwindigkeit im Unendlichen steht. Sehr schön kommt ferner heraus, wie bei dichter Stellung der Platten der Auftrieb von der Breite der Platten unabhängig wird.

Den Schluß der Arbeit bildet die Durchrechnung des Falles zweier hintereinander in gleicher Linie liegenden Tragflächen in bezug auf die einzelnen Auftriebe und Druckpunkte. Rr.

C. Del Lungo. La legge della resistenza dell' aria e il sostentamento degli aeroplani. Nuovo Cimento (6) 1, 309-319.

Sucht das schon von Langley als falsch nachgewiesene Verfahren der Luftwiderstandsbildung aus den Geschwindigkeitskomponenten durch ein anderes falsches, schon von Loessl versuchtes zu ersetzen, indem die ebene Flügelfläche um die in 1 Sekunde überstrichene Fläche vermehrt wird. Rr.

L. Orlando. Sulla sezione trasversale dei palloni dirigibili. Rom. Acc. L. Rend. (5) 20_2, 3-7.

Für den Schnitt der Querwände eines Lenkballons wird die Gleichgewichtsform der Hülle unter Gas- und Luftdruck und angehängter Gondel als Kettenlinie berechnet. Vernachlässigt wird dabei der Einfluß der Längsspannung: der Ballon wird als zylindrisch und überall gleich gespannt und die Hülle wird als undehnbar angenommen. Die Formeln des Verf. können nicht als neu bezeichnet werden. Rr.

J. Pacotte. L'aile amphibolique propulsive. Effort de l'aile amphibolique d'après l'aérodynamique expérimentale. Belg. Bull. Sc. 1911, 32-40.

Triebleistung, größte Geschwindigkeit, inneres Vermögen und Arbeitsleistung des amphibolischen Flügels (Fortsetzung des Artikels Belg. Bull. Sc. 1910, 689; F. d. M. **41**, 852). Der jetzige Artikel verbessert die in dem früheren gegebenen Formeln nach neuen Versuchsergebnissen. Mn. (Lp.)

Fr. Wächter. Zur Theorie der Drachenflieger. Mitt. üb. Art. u. Gen. 1911, 243-265.

„Der vorliegende Aufsatz stellt sich die Aufgabe, in gedrängter Kürze die wichtigsten Grundzüge der Theorie und Konstruktion von Drachenfliegern zu erörtern, wobei von mathematischen Formeln nur soweit Gebrauch gemacht werden soll, als dies unerläßlich notwendig ist." Lp.

Weitere Literatur.

G. de Bothezat. Étude de la stabilité de l'aéroplane (Thèse). Avec une préface de P. Painlevé. Paris: Gauthier-Villars. 184 S. 8°.

Brillouin. Stabilité des aéroplanes. Surfaces métacentriques. Paris: Dunod et Pinat (1910).

H. Chatley. Stability of aeroplanes. Nature **86**, 177.

J. Chovet. Essais sur la résistance de l'air et le calcul des aéroplanes. Grenoble: Anselme. 49 S. 8°.

M. E. Delsol. Note sur le vol des oiseaux. Paris: Gauthier-Villars. 22 S. 8°.

Espitallier et R. Chasseriaud. Cours d'aviation. Livre I: Appareils d'aviation et propulseurs. Paris: Gauthier-Villars. 295 S. 4°.

C. Grahame-White and H. Harper. The aeroplane, past, present and future. London: T. Werner Laurie. XV u. 319 S.

Enthält ein Kapitel über „The power unit of aeroplanes von W. T. Wright. Vgl. Nature **87**, 245.

A. G. Greenhill. Report on the theory of a stream line past a plane barrier, and of the discontinuity arising at the edge, with an application of the theory to an aeroplane. London: Wyman. 96 S. 4°.

V. E. Johnson. Theory and practice of model aeroplaning. New York: Spon. 163 S. 12mo.

R. Kennedy. The principles of aeroplane construction. With calculations, formulae, and 51 diagrams. London: J. and A. Churchill. VII u. 137 S. [Nature **87**, 312, 1911.]

Otto Lilienthal. Birdflight as the basis of aviation: a contribution towards a system of aviation, compiled from the results of numerous experiments made by O. and G. Lilienthal. With a biographical introduction and addendum by Gustav Lilienthal. Translated from the second edition by A. W. Isenthal. London: Longmans, Green and Co., XXIV u. 142 S. u. VIII Plates [Nature **86**, 582.]

A. Lippmann. Einführung in die Aeronautik. I. Teil: Theoretische Grundlagen. Elementare Vorträge. Leipzig.

L. Marchis. Cours d'aéronautique. Première partie: Statique et dynamique des ballons. Résistance de l'air, 2e partie: Aérostation, aviation. Paris: Dunod et Pinat (1910).

S. Nehru. Über die Strömung von Gasen durch Röhren und den Widerstand kleiner Kugeln und Zylinder in bewegten Gasen. Diss. Heidelberg. 70 S. 8°.

E. v. Némethy. Die endgültige Lösung des Flugproblems. 2. Teil. Gesammelte Aufsätze des Verf., welche die vollständigen Beweise für die Richtigkeit der im 1. Teil aufgestellten Flugtheorie und für die Priorität des Verf. erbringen. (Teil I. erschien 1903.) Akad. Selbstverlag. 41 S. Lex. 8°.

P. Painlevé u. E. Borel. Theorie und Praxis der Flugtechnik. Übersetzt von A. Schöning. (Bibliothek für Luftschiffahrt und Flugtechnik. 5. Bd.) Berlin: R. C. Schmidt u. Co. 251 S. 8°.

A. P. Thurston. Elementary aëronautics, or the science and practice of aërial machines. London: Whittaker and Co., VII u. 126 S. [Nature **87**, 311-312, 1911.]

Kapitel 5.

Potentialtheorie.

J. Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Preisschr. Jablonowskische Ges. **40**, Nr. 16, XIX u. 100 S.

Die vorliegende Schrift ist durch die von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1910 gestellte Aufgabe veranlaßt, in der eine Arbeit gefordert wurde, durch welche die Theorie der Grundbelegung (betreffs dieses Begriffs vgl. F. d. M. **37**, 785, 1906) in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert werde. „Da bei Problemstellungen, die gewissermaßen den Schlußstein einer Theorie bilden, ausgedehnte Hülfsmittel zur Lösung herangezogen werden müssen, erschien es dem Verf. nötig, den ganzen Lehrgang der Potentialtheorie durchzugehen, um schon in den Fundamenten einige Ergänzungen hinzuzufügen, die gewissen Theoremen eine Allgemeinheit verschaffen, wodurch sie erst bei Behandlung so sub-

tiler Fragen anwendbar werden. Wenn so meine Arbeit gleichsam den Charakter eines systematischen Aufbaues der Potentialtheorie erhalten hat, so wird man hoffentlich selbst in den Grundlagen der Potentialtheorie die Darstellung nicht als eine einfache Wiedergabe längst bekannter Darstellungsmethoden finden. Es mußte mir daran gelegen sein, nur das wirklich Nötige zu präzisieren und erforderlichenfalls zu ergänzen, hingegen alles nicht Nötige und deshalb Hemmende zu vermeiden."

Die Arbeit zerfällt in vier Abschnitte, deren erster die Grundlagen der Potentialtheorie entwickelt. Hier wird vor allem eine neue Definition des regulären Verhaltens des Potentials im Unendlichen gegeben, die für beide Potentialarten, das logarithmische und das Newtonsche, völlige Gleichartigkeit erzielt und dem Unendlichen ganz den exzeptionellen Charakter nimmt. Es ist folgende: Ein Potential $U(p)$ heißt dann und nur dann im Unendlichen regulär, wenn $U(p)$ bei unbegrenzt wachsender Distanz R vom Ursprung des Koordinatensystems gegen einen bestimmten konstanten Wert c konvergiert, während die Ableitung von $U(p)$ in irgendeiner Richtung x einen solchen Kleinheitsgrad hat, daß

$$\lim_{R=\infty} R\,\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{beim logarithmischen,}$$

$$\lim_{R=\infty} R^2\,\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{beim Newtonschen}$$

Potential sich ergibt. Wenn für alle hinreichend großen R ein Potential $V(p)$ das Verhalten zeigt:

$$V(p) = m \log\frac{1}{R} + U(p) \quad \text{beim logarithmischen,}$$

$$V(p) = m\cdot\frac{1}{R} + U(p) \quad \text{beim Newtonschen}$$

Potential, wobei $U(p)$ eine im Unendlichen reguläre Potentialfunktion bedeutet, so heißt m die Gesamtmasse von $V(p)$. Für im Unendlichen reguläre Potentiale ist also die Gesamtmasse gleich Null.

Ferner wird die Schwierigkeit, die die Existenz oder Nichtexistenz der normalen Ableitungen macht, dadurch umgangen, daß statt der normalen Ableitungen am Rande ein neuer Begriff eingeführt wird, nämlich das auf ein Stück der Berandung erstreckte Integral $\int \frac{dU}{dn}\,ds$. Diese Größe, die sich ohne Verwendung der Randwerte der Ableitungen rein durch das Verhalten im Regularitätsgebiet definieren läßt, wird „Strom" oder „Strömung" genannt. Sie ist beim logarithmischen Potential die Änderung des konjugierten Potentials zwischen den Endpunkten des Kurvenstücks.

Wichtig ist auch, daß, um die Massenverteilung in der Berandung nicht als differenzierbar voraussetzen zu müssen, der Begriff der Dichtigkeit ausgeschaltet, für das Potential einer einfachen Schicht also der Ausdruck

$$V(p) = \int \log\frac{1}{r_{ps}}\cdot d\mu_s$$

gewählt wird. Nur durch diese neue Form von $V(p)$ gelingt es später, ein Poten-

tial mit gegebenen Randwerten in der Form eines einfachen Potentials darzustellen.

Der zweite Abschnitt enthält die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen. Die Beweise sind stellenweise von einer etwas einfacheren Form als bei Fredholm.

Im dritten Abschnitt werden die beiden Randwertaufgaben behandelt. Hier wird zunächst gezeigt, daß das Eindeutigkeitstheorem auch für stückweise stetige Randwerte bestehen bleibt, daß es ferner auch bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen gilt, wenn es auf konstante Unterschiede am Rande nicht ankommt. Bei der Lösung der Randwertaufgaben wird die durch einen Parameter λ verallgemeinerte Poincarésche Problemstellung zugrunde gelegt, und es wird sowohl das Neumannsche, als das Robinsche Problem auf je eine Integralgleichung und zugleich das letztere auf das erstere zurückgeführt. Für das Moment $\nu(s)$ des Potentials W einer Doppelbelegung, das die erste Randwertaufgabe bei gegebener Randfunktion $f(\sigma)$ löst, ergibt sich die Form

$$\nu(s) = f(s) - \lambda \int f(\sigma) H(\sigma, s)\, d\sigma,$$

worin $H(\sigma, s)$ eine einzig vom Parameter λ und der Form des vorausgesetzten Gebietes abhängige Funktion zweier Punkte σ, s des Randes ist, die aus einer der beiden Integralgleichungen

$$H(\sigma, s) + \lambda \int h(\sigma, \vartheta) H(\vartheta, s)\, d\vartheta = h(\sigma, s),$$

$$H(\sigma, s) + \lambda \int H(\sigma, \vartheta)\, h(\vartheta, s)\, d\vartheta = h(\sigma, s)$$

zu bestimmen ist; dabei ist

$$h(\sigma, s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dn_\sigma} \log \frac{1}{r_{\sigma s}} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s} \right).$$

Die Fredholmsche Lösung gibt $H(\sigma, s)$ als Quotienten zweier ganzen, im allgemeinen transzendenten Funktionen von λ. Hinsichtlich der singulären Parameterwerte λ (für die der Nenner von $H(\sigma, s)$ verschwindet) wird neben dem Poincaréschen Satze, daß die singulären Parameter alle reell, absolut genommen, nicht kleiner als 1 sind und sich im Unendlichen häufen können, noch der weitere abgeleitet, daß jene Parameter einfache Pole der Funktion $H(\sigma, s)$ sind. Von den absolut kleinsten der singulären Parameter, nämlich $\lambda = \pm 1$ ist nur $\lambda = -1$ singulär. Es zeigt sich, daß an der Stelle $\lambda = -1$, wo $H(\sigma, s)$ die Form hat:

$$H(\sigma, s) = \frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma, s),$$

das Residuum $\mathfrak{m}'(\sigma)$ genau die Massendichte der natürlichen Belegung (betreffs der Definition vgl. F. d. M. **41**, 858, 1910) ist, während die endlich bleibende Funktion $\mathfrak{H}(\sigma, s)$, an Stelle von $H(\sigma, s)$ in $\nu(s)$ eingesetzt, ein Potential W ergibt, welches am Rande die gegebenen Werte $f(s)$ nur bis auf einen additiven konstanten Unterschied, die Neumannsche Konstante, liefert. Im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche ergeben sich aus dem Residuum genau

ebensoviel natürliche Belegungen, als getrennte Randstücke vorhanden sind. Die Potentiale der natürlichen Belegungen dieser Randstücke, Leiterpotentiale genannt, geben ein Mittel, die Randwertaufgabe genau zu lösen, nicht nur bis auf je einen konstanten Unterschied auf jedem geschlossenen Stück. — Nachdem noch die Funktionen $\mathfrak{H}(\sigma, s)$ und $\nu(s)$ in Reihenform dargestellt sind, werden die Resultate auf Kreis und Ellipse angewandt.

Bei der besprochenen Lösung der Randwertaufgaben ist durchweg das logarithmische Potential zugrunde gelegt. Es läßt sich aber zeigen (§ 29), daß die hierfür abgeleiteten Sätze ausnahmslos auch beim Newtonschen Potential richtig sind.

Waren die meisten Sätze des dritten Abschnitts nicht wesentlich neu, sondern nur ihre Ableitung, die sich erheblich einfacher gestaltet als nach den bisherigen Methoden, so sind die Ergebnisse des vierten Abschnitts sowohl inhaltlich, als methodisch neu. Dieser vierte Abschnitt betrifft die Zusammenhänge zwischen den Lösungen für das Innen- und für das Außengebiet. Ein einfacher Ausdruck ergibt sich dadurch, daß es möglich ist, das irgendwelchen gegebenen Randwerten $f(s)$ entsprechende Potential sowohl für das Außen-, wie für das Innengebiet in der Form darzustellen: $U(p) = \int \{\cdots\} f(\sigma)\, d\sigma$. Die durch $\{\cdots\}$ angedeuteten Ausdrücke sind in einfacher Weise von der obigen Funktion $\mathfrak{H}(\sigma, s)$ abhängig, und zwar für das Innengebiet von dem Werte, den $\mathfrak{H}$ für $\lambda = +1$, für das Außengebiet von dem, den $\mathfrak{H}$ für $\lambda = -1$ annimmt. Der Verf. bezeichnet diese Werte resp. mit $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$. Aus den Integralgleichungen, die oben für $H(\sigma, s)$ angegeben sind, werden die entsprechenden für $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$ abgeleitet und weiter die für $\mathfrak{K} = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_{+1} + \mathfrak{H}_{-1})$ und $\mathfrak{K}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_{+1} - \mathfrak{H}_{-1})$. $\mathfrak{K}_1$ ergibt sich dann aus $\mathfrak{K}$ durch eine Quadratur; es ist also die Kenntnis der Randfunktion $\mathfrak{K}(\sigma, s)$ ausreichend zur Bestimmung der beiden Funktionen $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$ und damit zur Bildung des Potentials für beide Gebiete. Aus den Reihen für $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$ folgt auch eine konvergente Entwicklung von $\mathfrak{K}(\sigma, s)$.

Weiter wird gezeigt, daß, wie $h(\sigma, s)$ die Ableitung einer in bezug auf s und σ symmetrischen Funktion nach σ ist, auch $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma, s)$ sich als Differentialquotient einer anderen Funktion darstellen läßt:

$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma, s) = \frac{d}{d\sigma} \mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s).$$

Man erhält $\mathfrak{P}$ folgendermaßen. Ist $d\mathfrak{m}(s) = \mathfrak{m}'(s) ds$ das Massenelement der natürlichen Verteilung, so setze man

$$\mathfrak{m}(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{m}'(s) ds,$$

ferner

$$\mathfrak{p}(\sigma, s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s} - \mathfrak{m}(\sigma) - \mathfrak{m}(s).$$

Die Funktion $\mathfrak{p}$ ist nicht nur symmetrisch, sondern auch auf der ganzen Berandung endlich und stetig und kehrt nach einem Umlauf irgendeines der Punkte σ, s um die Randkurve zum Ausgangswerte zurück, was bei $\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s}$

nicht der Fall ist. Bildet man aus $\mathfrak{p}(\sigma, s)$ die Neumannsche Funktionenfolge $\mathfrak{p}(\sigma, s)$, $\mathfrak{p}_1(\sigma, s)$, $\mathfrak{p}_2(\sigma, s), \ldots$, so ist

$$\mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s) = \mathfrak{p}(\sigma, s) - \lambda \mathfrak{p}_1(\sigma, s) + \lambda^2 \mathfrak{p}_2(\sigma, s) - \cdots.$$

Die durchaus endliche und stetige Funktion $\mathfrak{P}$ hat die merkwürdige Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{P}_{-\lambda}(\sigma, s) = \mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s)$$

ist. Weiter ergibt sich, daß, wenn die Randfunktion $\mathfrak{P}(\sigma, s)$ das Randwertproblem im Innengebiet löst, in ganz analoger Weise $\mathfrak{P}(s, \sigma)$ die Lösung für das Außengebiet gibt. Aus dem Symmetriegesetz für die Funktion $\mathfrak{P}$ folgt, daß die singulären λ-Werte, die ja einfache Pole von $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s)$ sind, in der reellen λ-Achse vom Nullpunkt aus symmetrisch liegen. Übrigens läßt sich die Funktion $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s)$, die für den Kreis $= 0$ ist, für die Ellipse vollständig bestimmen; $\mathfrak{P}(\sigma, s)$ wird hier durch den Logarithmus eines unendlichen Produktes dargestellt, das große Analogie mit den unendlichen Produkten für die Thetafunktionen hat.

Zum Schluß wird eine gleichzeitige Lösung des Randwertproblemes für das Innen- und Außengebiet in der Form eines Potentials V einer einfachen Schicht gegeben. Die Lösung hat folgende Form: Es gibt eine nur von der Form des Gebietes abhängige symmetrische Randfunktion $\Delta(\sigma, s) = \Delta(s, \sigma)$, die bei Annäherung der Punkte s und σ gegeneinander wie $\frac{1}{\pi^2} \log r_{s\sigma}$ unendlich wird. Bildet man aus ihr durch Integration über den Rand

$$\mu(s) = \int \Delta(s, \sigma)\, df(\sigma),$$

wo $f(s)$ die überall stetigen gegebenen Randwerte bezeichnet, so ist

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu(s)$$

jenes Potential, welches die Randwerte $f(s)$ bis auf eine additive, nämlich die Neumannsche, Konstante hat. Die Hinzufügung dieser Konstante zu V gibt dann die genaue Lösung beider Probleme. Die Bestimmung der Funktion $\Delta(s, \sigma)$ wird durch zwei Funktionen $\mathfrak{S}^+(\sigma, s)$ und $\mathfrak{S}^-(\sigma, s)$ vermittelt, die mit der „charakteristischen Funktion“ von F. Neumann zusammenhängen. Für die Ellipse hat $\Delta(\sigma, s)$ folgenden Wert:

$$\Delta(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi^2} \log \sin \frac{\sigma - s}{2} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\sigma - s}{2}\right) \vartheta\left(\frac{\sigma + s}{2}\right),$$

wo ϑ_1 und ϑ die Jacobischen Thetafunktionen sind. Wn.

M. Olivo. Sui potenziali di semplice e di doppio strato in prossimità dell' agente. Ven. Ist. Atti **70** [(8) **13**], S. 519-546.

Aus den asymptotischen Werten, die Levi-Civita und Viterbi für das Potential einer Linie angegeben haben (vgl. F. d. M. **39**, 830, 1908;

40, 834, 1909), werden hier die entsprechenden Ausdrücke für das Flächenpotential abgeleitet. Ist O ein Punkt im Innern der betrachteten Fläche, so führe man geodätische Polarkoordinaten u, v mit O als Pol ein, wende auf irgendeine der von O ausgehenden geodätischen Linien ($v =$ const.) von sehr kleiner Länge u den asymptotischen Potentialwert $V^{(a)}$ von Levi-Civita an und integriere nach v von 0 bis 2π, so erhält man als asymptotischen Wert des Flächenpotentials $V_1 = 0$. Die Anwendung dieses Verfahrens auf Punkte O der Randkurve der Fläche, wo die Integration nur von $v = 0$ bis $v = \pi$ zu erstrecken ist, ergibt als Resultat:

$$V_1 = -2\varrho_0 y \log \varepsilon,$$

wo ε den Abstand des Aufpunktes P von O bezeichnet, y den normalen Abstand des Punktes P von der Randkurve, ϱ_0 die Dichtigkeit in O. Die Formel bedarf nur einer geringen Umänderung, wenn die Randkurve in O eine Ecke hat.

Es folgt die Untersuchung von V_1 für den Fall, daß O ein im Innern der Fläche gelegener konischer Punkt ist. An Stelle der geodätischen Polarkoordinaten werden hier räumliche Polarkoordinaten u, ϑ, v eingeführt mit O als Pol ($u = 0$), wo ϑ eine gegebene Funktion von u und v ist. Auch hier wird auf die von O ausgehenden Linien $v =$ const. von sehr kleiner Länge der asymptotische Ausdruck $V^{(a)}$ des Potentials angewandt und nach v integriert. So ergibt sich für den Fall, daß der Tangentialkegel in O ein Rotationskegel, also ϑ konstant ist, als asymptotischer Wert des Flächenpotentials:

$$V_1 = -\pi\varrho_0 z \sin(2\vartheta) \log \varepsilon,$$

wo ϱ_0, ε dieselbe Bedeutung haben wie vorher, während z die Projektion von ε auf die Kegelachse bezeichnet. Auch die allgemeine Formel für den Fall eines beliebigen Kegels wird aufgestellt.

Anders gestalten sich die Resultate, wenn man für den asymptotischen Wert $V^{(a)}$ des Linienpotentials statt des Ausdrucks von Levi-Civita den von Viterbi zugrunde legt. Eine längere Rechnung ergibt hier für einen regulären Flächenpunkt O als asymptotischen Wert des Flächenpotentials:

$$V_2 = -2\pi\varrho_0 |z|,$$

wo z den Abstand des Aufpunktes P von der Tangentialebene in O bezeichnet. Daraus folgt, daß die normale Ableitung von V_2 dasselbe Verhalten zeigt wie die des Gesamtpotentials V, so daß die normale Ableitung von $V - V_2$ beim Durchgang durch die Fläche kontinuierlich bleibt. Auch für einen regulären Punkt O der Randkurve wird der Wert von V_2 ermittelt, ebenso für reguläre Innen- oder Randpunkte die asymptotischen Werte des Potentials einer Doppelbelegung. Hinsichtlich dieser Resultate, die sich nicht in Kürze wiedergeben lassen, muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Wn.

U. Cisotti. Sul comportamento della funzione di Neumann in punti prossimi al contorno. Palermo Rend. 31, 201-233.

Die Neumannsche Funktion $\Gamma(A, B)$, die für die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie dieselbe Rolle spielt wie die Greensche Funktion

für die erste, hat die Eigenschaft, als Funktion des Punktes A betrachtet, innerhalb eines von einer geschlossenen Fläche σ begrenzten Raumes der Laplaceschen Gleichung $\Delta\Gamma = 0$ zu genügen, während für Punkte der Fläche σ

$$\frac{\partial\Gamma(\alpha, B)}{\partial n_\alpha} = \frac{4\pi}{\sigma} - \frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{1}{r(\alpha, B)}\right)$$

ist. Darin bezeichnet α einen Punkt von σ, n_α die innere Normale von σ in α, $r(\alpha, B)$ den Abstand der Punkte α und B, σ den Flächeninhalt der Fläche σ. Es handelt sich darum, das Verhalten der Funktion Γ zu ermitteln, wenn der innere Punkt B in einen Punkt β von σ übergeht und zugleich A dem Punkte β unendlich nahe kommt. Dazu wird der folgende asymptotische Wert von Γ hergeleitet:

$$\Gamma^{(a)} = \frac{1}{r} - \frac{C}{2}\log(r+z) - \frac{E}{4}\frac{x^2-y^2}{(r+z)^2}\left\{1 - \frac{C}{6}(2r+z)\log r\right\} - \frac{E^2}{16}z\log r - \frac{1}{4}\left(x\frac{dC}{ds_2} + y\frac{dC}{ds_1}\right)\log r.$$

Hierin bezeichnet r den Abstand $A\beta$; x, y, z sind die Koordinaten von A, bezogen auf ein System, dessen Anfangspunkt β, dessen z-Achse die innere Normale von σ in β ist, während die Achsen x, y Tangenten an die Hauptnormalschnitte von σ in β sind. C ist gleich der Summe, E gleich der Differenz der Hauptkrümmungen von σ in β, s_1 und s_2 die Bogen der Krümmungslinien von σ in β. Man erkennt, von welcher Art $\Gamma^{(a)}$ unendlich wird, wenn A in β fällt. Dabei bleibt $\Gamma - \Gamma^{(a)}$ auch dann endlich. Für den Fall, daß σ eine Kugel vom Radius R ist, also $C = \frac{2}{R}$, $E = 0$, läßt sich Γ nach Hadamard in endlicher Form darstellen, und der daraus folgende Wert von $\Gamma^{(a)}$ stimmt mit dem aus vorstehender Formel sich ergebenden überein.

Den Ausgangspunkt für die Ableitung obiger Formel bildet der asymptotische Wert des Potentials einer Linie. Die dafür von Levi-Civita aufgestellte Formel (s. F. d. M. **39**, 830, 1908) reicht hier nicht aus, da dort die Dichtigkeit der Linie als eine solche Funktion des Bogens vorausgesztzt ist, die nebst ihren beiden Ableitungen endlich ist. Die Formel wird dahin erweitert, daß die Dichtigkeit zwar endlich bleibt, ihre Ableitung nach dem Bogen aber in einem Punkte unendlich wird. Insbesondere wird für die Dichtigkeit der Ausdruck

$$\mu(s) = \varrho_0' s\log s + \tfrac{1}{2}\varrho_0'' s^2\log s + \varrho_1 s^3\log s$$

angenommen, dessen Ableitung nach s für $s = 0$ unendlich wird, während μ selbst dann verschwindet. Gestützt auf den so ermittelten asymptotischen Wert des Linienpotentials, werden die asymptotischen Werte der beiden Integrale

$$W(A, B) = \int_\sigma \frac{\varrho(\alpha, B)}{r(\alpha, B)} \cdot \frac{d\sigma_\alpha}{r(A, \alpha)},$$

$$U(A, B) = \int_\sigma \frac{\varrho(\alpha, B)\log r(\alpha, B)\, d\sigma_\alpha}{r(A, \alpha)}$$

für den Fall ermittelt, daß B in einen Punkt der Grenzfläche σ übergeht: α bezeichnet ebenfalls einen Punkt von σ, A einen inneren Punkt, r den Abstand, der jedesmal daneben stehenden Punkte, $\varrho(\alpha, B)$ eine stets, auch wenn B in β übergeht, endlich bleibende Funktion. Die gesuchten asymptotischen Werte für U, W ergeben sich so: Man ziehe von β aus alle geodätischen Linien von konstanter sehr kleiner Länge u, wende auf jede derselben die Formel für den asymptotischen Wert des Linienpotentials an und integriere dann über den geodätischen Kreis u. Die übrigen Bestandteile von W, U bleiben dabei endlich, kommen also für die asymptotischen Werte nicht in Betracht.

Was endlich die Funktion Γ betrifft, so läßt sich diese durch ein Integral darstellen:

$$\Gamma(A, B) = \int_\sigma \frac{k(\alpha, B)}{r(A, \alpha)} d\sigma_\alpha,$$

wo $k(\alpha, B)$ einer gewissen Integralgleichung genügt. Durch einen zweckmäßigen Ansatz für die Lösung dieser Integralgleichung wird $\Gamma(A, B)$ in die Summe von vier Integralen zerlegt, deren asymptotische Werte unter Benutzung der vorher aufgestellten Hülfsformeln einzeln abgeleitet werden und zu dem an die Spitze gestellten Resultat führen. Wn.

C. Neumann. Zur Theorie des logarithmischen Potentials. Aufsatz VI. Leipz. Ber. **63**, 226-239.

Es wird zunächst einer der allgemeinen Sätze, die der Verf. im Aufsatz II (s. F. d. M. **41**, 858, 1910) aufgestellt hatte, rekapituliert und zugleich schärfer formuliert. Er lautet nunmehr folgendermaßen: $\Phi(x, y)$ genüge in dem Gebiete $\mathfrak{A}$ außerhalb einer geschlossenen Kurve σ der Laplaceschen Gleichung, ferner sei Φ eindeutig und stetig und ebenso die ersten und zweiten Ableitungen von Φ stetig, endlich sei (Annahme γ) bekannt, daß außerhalb eines gewissen Kreises

$$\text{abs}\left(\Phi - \alpha \log \frac{1}{E}\right)$$

[E der Abstand des Punktes x, y vom Mittelpunkte des Kreises, α eine Konstante] durch Vergrößerung des Kreisradius unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrückbar ist. Dann gilt für alle Punkte p außerhalb einer Kurve s, die σ ganz umschließt, die Gleichung

$$\Phi_p = \frac{1}{2\pi} \int \left(\Phi \frac{dT}{dN} - T \frac{d\Phi}{dN}\right) ds,$$

wo die Integration über s zu erstrecken ist, N die äußere Normale von s bezeichnet, $T = \log \frac{1}{E}$, E der Abstand des Punktes p von ds ist.

Von den Voraussetzungen dieses Satzes wird nun die eine (Annahme γ) durch die folgende andere (Annahme δ) ersetzt: Es soll außerhalb eines gewissen Kreises $\text{abs}(\Phi - C)$ durch Vergrößerung des Kreisradius beliebig klein gemacht werden können, wo C eine vorläufig unbekannte Konstante ist. Dann läßt sich zeigen, daß $\text{abs}(\Phi - C)$ auch außerhalb jedes andern Kreises mit wachsendem

Radius beliebig klein wird. Ferner gelten für jede die Kurve σ umschließende Kreisperipherie S vom Radius R die Gleichungen

$$(15)\qquad \int \frac{d\Phi}{dR}\, dS = 0, \qquad\qquad (16)\quad \int \Phi dS = 2\pi RC.$$

Endlich läßt sich der Wert von Φ in einem Punkte p außerhalb einer die Kurve σ umschließenden Kurve s durch das folgende über s erstreckte Integral darstellen:

$$(22)\qquad \Phi(p) = C + \frac{1}{2\pi}\int \left(\Phi \frac{dT}{dN} - T\frac{d\Phi}{dN}\right) ds,$$

wo T, N dieselbe Bedeutung wie oben haben.

In der Theorie des Newtonschen Potentials, wo $\frac{1}{E}$ an Stelle von $\log\frac{1}{E}$ tritt, gelten die Analoga der Gleichungen (15) und (16) nicht mehr; an ihre Stelle treten die folgenden, in denen die Integration über eine Kugel S vom Radius R zu erstrecken ist, während β eine neue Konstante bezeichnet:

$$(15')\quad \int \frac{d\Phi}{dR}\, dS = \beta, \qquad\qquad (16')\quad \int \Phi dS = 4\pi R^2 C - \beta R,$$

während die zu (22) analoge Gleichung auch hier gilt, nur 2π durch 4π ersetzt.

Aus der Gleichung (15) ergibt sich noch folgendes: In der Theorie des logarithmischen Potentials ist von den vier Bedingungen, die der Verf. in seiner Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels [vgl. F. d. M. **19**, 1029, 1887] als Definition der Fundamentalfunktion hingestellt hatte, die Bedingung (3) überflüssig. Wn.

C. Neumann. Zur Theorie des logarithmischen Potentials. Aufsatz VII (Über das Riemannsche Abbildungsproblem). Leipz. Ber. **63**, 240-248.

Der Verf. macht darauf aufmerksam, daß die Lösung des Riemannschen Abbildungsproblems, das die Abbildung einer von irgendeiner Kurve begrenzten ebenen Fläche auf das Innere eines Kreises verlangt, für die Ellipse wie für andere von Niveaukurven begrenzte Flächen implizit bereits in seiner 1861 publizierten Arbeit „Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$“ (J. für Math. **59**) enthalten ist, allerdings ohne daß dort auf den Zusammenhang der abgeleiteten Formeln mit dem Abbildungsproblem hingewiesen ist. Er wendet dann die Formel für Φ, die er in jener Abhandlung aufgestellt, auf die Ellipse an, speziell unter der Annahme, daß der Pol O der in Betracht kommenden Greenschen Funktion (das ist zugleich der Punkt, der bei der Abbildung dem Mittelpunkte des Kreises entspricht) auf der Brennlinie der Ellipse liegt. Dadurch gewinnt er für die Abbildungsfunktion $U + iV = \log(\xi + i\eta)$ eine Reihe, die sich mittels bekannter Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen summieren läßt. Es ergibt sich:

$$\xi + i\eta = -k \sin\text{am}\left(\frac{K(f+w_0)}{\pi}, k\right) \sin\text{am}\left(\frac{K(f-w_0)}{\pi}, k\right).$$

Darin hat f den Wert

$$f = \arccos \frac{x+iy}{\sqrt{a^2-b^2}};$$

a, b sind die Achsen der Ellipse, K bezeichnet, wie üblich, das volle elliptische Integral. Der Modul k ist so zu wählen, daß

$$q = e^{-\pi K'/K} = \frac{a-b}{a+b}$$

wird. Endlich ist $\sqrt{a^2-b^2}\cos w_0$ gleich dem Abstand des Punktes O vom Mittelpunkte der Ellipse. Die Resultate vereinfachen sich, wenn O in einen Brennpunkt fällt ($w_0 = 0$) oder in den Mittelpunkt ($w_0 = \frac{1}{2}\pi$). Wn.

C. Neumann. Zur Theorie des logarithmischen Potentials. Aufsatz VIII (Über die Fourierschen Reihen). Leipz. Ber. **63**, 407-419.

Der in dem Aufsatz II (s. F. d. M. **41**, 858, 1910) vom Verf. gefundene Ausdruck für die Dichtigkeit γ der natürlichen Belegung eines Kreisbogens wird benutzt, um γ in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln. Reicht im Kreise vom Radius R der Bogen AB, für den γ bestimmt werden soll, von $\varphi = -\alpha$ bis $\varphi = +\alpha$, so läßt sich die frühere Formel so schreiben:

$$\gamma = \frac{1}{\pi R} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Fouriersche Reihe, so ergibt sich, da γ auf dem Bogen, der AB zu einem Vollkreise ergänzt, verschwindet, mittels des Mehlerschen Integrals für die Kugelfunktionen:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi R}\left\{1 + \sum_1^\infty [P_n(\cos\alpha) + P_{n-1}(\cos\alpha)]\cos(n\varphi)\right\}.$$

Das logarithmische Potential des Bogens AB wird für Punkte innerhalb des Kreises ($\varrho = R$):

$$\Pi = \log\frac{1}{R} + \sum_1^\infty \frac{P_n(\cos\alpha) + P_{n-1}(\cos\alpha)}{2n}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cos n\varphi;$$

und hieraus folgt sofort das für äußere Punkte. Auf dem Bogen AB selbst nimmt Π den konstanten Wert $\mathfrak{C} = -\log\left(R\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ an.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich folgendes Theorem für Fouriersche Reihen:

Ist g eine gegebene positive Konstante, α ein Winkel zwischen 0 und π, und soll man die Größen D und $\mathfrak{A}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ so bestimmen, daß

$$D + \sum_1^\infty \frac{1}{n} \mathfrak{A}_n \cos(n\varphi) = 0 \quad \text{für } 0 \leqq \varphi^2 \leqq \alpha^2,$$

$$g + \sum_1^\infty \mathfrak{A}_n \cos(n\varphi) = 0 \quad \text{für } \alpha^2 < \varphi^2 \leqq \pi^2,$$

so ist

$$\mathfrak{A}_n = g\,[P_n(\cos\alpha) + P_{n-1}(\cos\alpha)],$$

$$D = 2g \log \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Die aus diesem Theorem für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pm\pi$ sich ergebenden Gleichungen lassen sich auch direkt verifizieren. Ferner ergibt die Anwendung der Formel für Π auf die Fälle $\alpha = \pi$ (Vollkreis) und $\alpha = 0$ (anziehender Punkt) bekannte Resultate. Wn.

O. Hölder. Die Cauchysche Randwertaufgabe für den Kreis in der Potentialtheorie. Leipz. Ber. **63**, 477-500.

Die Cauchysche Randwertaufgabe, eine reguläre analytische Funktion u so zu bestimmen, daß sie einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt und längs eines singularitätenfreien analytischen Linienstücks l selbst nebst ihrer normalen Ableitung gegebene Werte annimmt, die ihrerseits ebenfalls als reguläre analytische Funktionen angesehen werden, wird hier dahin abgeändert, daß 1. die Funktion u nur auf einer Seite von l (nicht auf beiden Seiten) gewissen Bedingungen der Stetigkeit etc. genügen soll, und daß 2. u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf l durch im allgemeinen nichtanalytische Funktionen gegeben sind. Die modifizierte Aufgabe wird hier für den Fall erledigt, daß l der Einheitskreis ist, daß ferner u für einen an den Einheitskreis sich anlehnenden konzentrischen Ring zu bestimmen ist, und daß u der Laplaceschen Differentialgleichung genügt. Dabei sind für den andern Grenzkreis des Ringes keine Randbedingungen vorgeschrieben.

Als Vorbereitung für die eigentliche Aufgabe wird zunächst die funktionentheoretische Randwertaufgabe behandelt, in dem konzentrischen Kreisring mit den Radien 1 und R eine eindeutige und reguläre Funktion $u + iv$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ zu bestimmen, die, wenn sie einem Punkte des Einheitskreises unendlich nahe kommt, sich dem diesem Punkte zugeordneten Randwerte $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}i$ unendlich nähert. Der Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus der Laurentschen Reihe. Damit die Reihe auch konvergiert, ist für den Fall $R < 1$ folgende Bedingung zu erfüllen, in der α den Zentriwinkel bezeichnet, der einen Punkt des Einheitskreises bestimmt, und in der die gegebenen Funktionen $\mathfrak{u}(\alpha)$ und $\mathfrak{v}(\alpha)$ eindeutige, stetige und um 2π periodische Funktionen sind: „Es muß für jedes λ, das kleiner als $\frac{1}{R}$ ist, eine zugehörige endliche Schranke existieren, unter der die Größen:

$$\lambda^\nu \int_{-\pi}^{+\pi} [\mathfrak{u}(\alpha)\cos(\nu\alpha) - \mathfrak{v}(\alpha)\sin(\nu\alpha)]\,d\alpha,$$
$$\lambda^\nu \int_{-\pi}^{+\pi} [\mathfrak{u}(\alpha)\sin(\nu\alpha) + \mathfrak{v}(\alpha)\cos(\nu\alpha)]\,d\alpha \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

in ihrem absoluten Betrage gelegen sind.“

Eine analoge Bedingung wird für den Fall $R > 1$ abgeleitet, und es werden diese Bedingungen auf den Fall angewandt, daß $\mathfrak{u}(\alpha)$ gleich der Weierstraßschen Funktion ist, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten besitzt, $\mathfrak{v}(\alpha)$ gleich einer ähnlichen Funktion. Die in Rede stehende Randwertaufgabe hat dann nur eine Lösung für den Fall $R < 1$, nicht aber für $R > 1$.

Um zur Lösung für die eigentliche Cauchysche Randwertaufgabe zu gelangen, wird zunächst, wenn $u(x, y)$ das gesuchte Potential ist, die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, in der v im allgemeinen unendlich vieldeutig ist, betrachtet und $\frac{df(z)}{dz} = F(z)$ nach dem Laurentschen Satze entwickelt. Aus der Reihe für $F(z)$ folgt die für den reellen Teil u von $f(z)$, sowie die für $\frac{\partial u}{\partial r}$. Die Untersuchung dieser Reihen ergibt für $R < 1$ folgende Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe. Sind $\mathfrak{u}(\alpha)$ und $\bar{\mathfrak{u}}(\alpha)$ die Werte, die u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ am Einheitskreise annehmen, wobei n die innere Normale bezeichnet und die reellen Funktionen $\mathfrak{u}$ und $\bar{\mathfrak{u}}$ eindeutig, stetig und um 2π periodisch sind, so muß für jedes einzelne λ, das kleiner als $\frac{1}{R}$ ist, eine zugehörige Schranke existieren, unter der die Größen

$$\lambda^\nu \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\mathfrak{u}(\alpha) - \frac{1}{\nu}\bar{\mathfrak{u}}(\alpha)\right] \cos(\nu\alpha)\,d\alpha,$$
$$\lambda^\nu \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\mathfrak{u}(\alpha) - \frac{1}{\nu}\bar{\mathfrak{u}}(\alpha)\right] \sin(\nu\alpha)\,d\alpha \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelegen sind. Weiter wird gezeigt, daß diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind.

Hierbei war vorausgesetzt, daß $\frac{\partial u}{\partial n}$ in den Punkten des Einheitskreises selbst existiert und daselbst den vorgeschriebenen Werten gleich ist, wobei in der Definition des Differentialquotienten der Wert von u in dem Kreispunkt selbst durch die Annäherung erklärt ist. Man kann aber auch die Randwerte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ als Annäherungswerte denken, indem man zunächst für einen inneren Punkt $\frac{\partial u}{\partial n'}$ bildet, wo n' eine Richtung bedeutet, die mit dem wachsenden Radius einen Winkel η bildet, und bei Annäherung des Punktes P an den Einheitskreis n' sich der inneren Normale unendlich nähern,

also $\eta = \pi$ werden läßt. Man hat dann, wenn r, φ Polarkoordinaten sind, nicht nur das Verhalten von $\frac{\partial u}{\partial r}$, sondern auch das von $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ zu untersuchen. Diese Untersuchung ergibt, daß $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ bei Annäherung an den Rand absolut unter einer festen endlichen Grenze bleibt, falls die gegebene Funktion $\mathfrak{u}(\alpha)$ der folgenden Bedingung genügt: Es muß für alle α, α', die wenig von β abweichen,

$$|\mathfrak{u}(\alpha) - \mathfrak{u}(\alpha')| \leqq B|\alpha - \alpha'|$$

sein, wo β ein bestimmter Winkel ist, B eine diesem zugeordnete Konstante. Diese neue Bedingung muß neben den vorher angegebenen erfüllt werden, damit die Aufgabe lösbar ist. Wn.

C. Somigliana. Sulle funzioni armoniche ellissoidali. Palermo Rend. **31**, 387-391.

Auf sehr einfache Weise wird das Potential von Ellipsoiden bei beliebiger homothetischer Massenverteilung entwickelt. Ist die Dichtigkeit ϱ eine beliebige Funktion $f(\alpha)$ von

$$\alpha = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

wo für Punkte im Innern $0 \leqq \alpha \leqq 1$, für die Grenzfläche $\alpha = 1$ ist, so setze man $\alpha = 1 - \beta$ und entwickle $f(1-\beta)$ nach dem Taylorschen Satz nach Potenzen von β:

$$f(1-\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \beta^n,$$

so ist das gesuchte Potential

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n+1} U_{n+1}.$$

Darin ist U_{n+1} das Potential des Ellipsoides von der Dichtigkeit $(n+1)(1-\alpha)^n$. In der Einleitung wird der bekannte Ausdruck für U_n (vgl. u. a. die Arbeit von Morera, an die der Verf. anknüpft, F. d. M. **37**, 794, 1906) ausführlich verifiziert. Wn.

A. Signorini. Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del geoide. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 154-160, 219-222.

Falls das Geoid nur wenig von einer Kugel abweicht, kann man es folgendermaßen bestimmen: Man geht aus von folgender Gleichung der Erdoberfläche in geozentrischen Polarkoordinaten r, ϑ, v:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \alpha t),$$

wo α eine sehr kleine Größe ist, deren Quadrate zu vernachlässigen sind, t eine passend gewählte Funktion von ϑ, v, und berechnet für diese Oberfläche den

Wert von g. Ist $\Delta g(\vartheta, v)$ die Differenz zwischen dem so berechneten und dem beobachteten Werte von g, so ist eine Funktion Δt von ϑ, v zu ermitteln derart, daß die Fläche

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \alpha t - \alpha \Delta t)$$

den beobachteten Wert der Schwere ergibt. Zur Berechnung von Δt aus Δg dient folgende Formel von Stokes:

$$\Delta t(\vartheta, v) = -\frac{a^2}{8\pi f M \alpha}\int \Delta g(\vartheta', v')\, dw' + \frac{a^2}{4\pi f M \alpha}\int \Delta g(\vartheta, v')\, \Phi(\gamma)\, dw'.$$

Darin bezeichnet f die Anziehungskonstante, M die Erdmasse, dw' das Flächenelement der Kugel vom Radius 1, über welche Kugel zu integrieren ist, während γ der Winkel zwischen den Richtungen ϑ, v und ϑ', v' ist und

$$\Phi(\gamma) = \sum_{2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\gamma),$$

eine Funktion, die sich übrigens leicht auch in endlicher Form darstellen läßt. Der Beweis von Stokes für diese Formel ist nicht streng, und auch die Ableitung von Pizzetti (vgl. F. d. M. **27**, 664, 1896) ist, wie dieser selbst bemerkt hat, insofern nicht ohne Bedenken, als sie die gliedweise Integration einer gewissen Reihe ohne weiteres als zulässig annimmt. In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Beweis jener Formel gegeben, der sich auf die Theorie der Integralgleichungen stützt. Den Ausgangspunkt bildet eine Integralgleichung für Δt, die sich schon bei Pizzetti (vgl. dessen vorher zitierte Arbeit) findet. Der Kern dieser Integralgleichung wird in einem Punkte unendlich. Bildet man aber die iterierten Kerne, so ist der nächste ebenfalls unendlich, der dann folgende aber endlich und kontinuierlich. Unter Zugrundelegung dieses Kernes läßt sich jene Integralgleichung auf eine andere reduzieren, deren Lösung die Formel von Stokes ergibt.

Bei der Entwicklung wird der folgende Hülfssatz benutzt, der im ersten Teil der Arbeit ausführlich bewiesen wird: Ist $f(x)$ eine Funktion, die nebst ihrer ersten Ableitung im Intervall $(-1, +1)$ endlich und kontinuierlich ist, mit Ausnahme des Punktes $x = 1$, wo $f(x)$ unendlich wird wie $1:(1-x)^{1+m}$, während $m < 1$; hat $f(x)$ ferner in jenem Intervall nur eine endliche Zahl von Oszillationen; ist endlich $\psi(x)$ eine Funktion, die in jenem Intervall der Dirichletschen Bedingung genügt, so ist, falls $-1 \leqq c \leqq 1$:

$$\int_c^1 f(x)\,\psi(x)\,dx = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\alpha)\,X_n(\alpha)\,d\alpha \int_c^1 \psi(x)\,X_n(x)\,dx.$$

Wn.

Ch. Halphen. Sur les potentiels des accélérations de divers ordres. S. M. F. Bull. **39**, 169-175.

Existiert für die Bewegung eines Punktes in irgendeinem Kraftfelde ein Geschwindigkeitspotential, d. h. eine Funktion V, deren partielle Ableitungen

nach den Koordinaten, die Geschwindigkeitskomponenten ergeben, so existiert, wie Darboux bemerkt hat, auch für die Beschleunigungen ein Potential. Denn die Funktion

$$\tfrac{1}{2}\Delta V = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}$$

hat die Eigenschaft, daß ihre partiellen Ableitungen nach x, y, z die Komponenten der Beschleunigung darstellen. Es wird nun gefragt: Welche Bedingungen muß V erfüllen, damit auch für die Beschleunigungen zweiter, dritter etc. Ordnung, also für $\frac{d^3x}{dt^3}, \ldots, \frac{d^4x}{dt^4}, \ldots$ ein Potential existiert? Diese Bedingungen werden zunächst für Bewegungen in der xy-Ebene entwickelt. Damit die Beschleunigungen zweiter Ordnung ein Potential besitzen, muß

$$(A_2) \qquad \delta(\Delta V)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \delta V \cdot \frac{\partial^2(\Delta V)}{\partial x \partial y}$$

sein, wo $\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ist. Damit auch die Beschleunigungen dritter Ordnung ein Potential besitzen, muß zu der vorstehenden Bedingung (A_2) eine weitere hinzukommen, die ebenfalls eine Differentialgleichung dritter Ordnung ist. Allgemein läßt sich zeigen, daß die Ordnung $(n+1)$ der Differentialgleichung, welche die entsprechende Bedingung für die Beschleunigungen n-ter Ordnung ausdrückt, sich um eine Einheit erniedrigt, wenn für die Beschleunigungen $(n-1)$-ter Ordnung bereits ein Potential existiert.

Bei räumlichen Bewegungen treten an Stelle je einer Bedingung, wie z. B. an Stelle von (A_2), deren je drei. Auch hier reduziert sich die Ordnung solcher Systeme von drei Differentialgleichungen um eine Einheit, falls die Bedingungen für die vorhergehende Ordnung erfüllt sind.

Die Bedingungen für alle Beschleunigungen beliebig hoher Ordnung werden erfüllt, falls $V = f(x) + \varphi(y) + \psi(z)$ ist. Auch andere spezielle Lösungen der Bedingungen werden erörtert, insbesondere bei ebenen Bewegungen der Fall $V = bxy$, in dem ebenfalls für alle Beschleunigungen Potentiale existieren.

Wn.

G. Lauricella. Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 99-107.

Wenn eine Aktion außerhalb eines Körpers (im besonderen der Erde) gegeben ist, so kann man ihr bekanntlich unendlich viele verschiedene Arten von Änderungen der Dichte des Körpers entsprechen lassen, und gewisse auf den Körper bezügliche, von der Dichte abhängende mechanische Elemente sind dadurch völlig bestimmt. Einen beachtenswerten Beitrag zur Erforschung der erwähnten Unbestimmtheit der Dichte und der Bestimmung der erwähnten mechanischen Elemente hat jüngst Pizzetti in der Abhandlung geliefert: Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell' interno della terra (Annali di Mat. (3) **17**, 225-258; F. d. M. **41**, 1033, 1910). Der Verf. der gegenwärtigen Abhandlung zeigt, welches der Grad der Unbestimmtheit der Dichte des Körpers ist, die einer vorgegebenen äußeren Aktion auf den Körper entspricht, und

wie man mit Benutzung der zweiten Greenschen Funktion die allgemeinste Potentialfunktion dieses Körpers bestimmen kann, ferner wie das allgemeinste bestimmte Integral, das die unbekannte Dichte enthält, welche aus der äußeren Aktion folgt, zu finden ist. Die nämlichen Fragen werden unter der (in dem Falle der Erde zulässigen) Voraussetzung gelöst, daß außer der äußeren Aktion auf den Körper an seiner Oberfläche die Werte der Dichte und ihrer normalen Ableitung gegeben sind. Lp.

C. Kraft. Über die direkte Integration der typischen Differentialausdrücke von Raum-Zeit-Vektoren. Krak. Anz. (A) 1911, 564-576.

Im Anschluß an die Potentialtheorie, welche A. Sommerfeld in der F. d. M. **41**, 759, 1910 besprochenen Arbeit gegeben hat, zeigt der Verf., daß die dort auf S. 664 stehende Fundamentalformel bei Anwendung auf Vektoren sich so umformen läßt, daß sie unter dem Integralzeichen statt des Laplaceschen Ausdrucks nur die beiden typischen Differentialausdrücke erster Ordnung des betreffenden Vektors enthält. Hierdurch kann jeder in einer solchen Differentialform gegebene Vektor direkt in Integralform dargestellt werden; dies lasse sich an Beispielen aus der Elektrodynamik erweisen. Lp.

N. Mudd. The gravitational potential and energy of harmonic deformations of any order. Messenger (2) **40**, 137-144.

„Der Gegenstand der Mitteilung ist die Erläuterung einer Methode, die zu benutzen ich neuerdings Gelegenheit hatte, um das Potential einer harmonischen Deformation auf einer Oberfläche bis zu jedem geforderten Grade der Genauigkeit zu erhalten. Gewöhnlich ist es möglich, das Potential der Oberfläche niederzuschreiben, wenn wir die Quadrate und die höheren Potenzen der Deformation vernachlässigen können, d. h. wenn die Deformation als eine Oberflächendichte behandelt werden kann. Die Quadrate der kleinen in der Definition der deformierten Oberfläche vorkommenden Größen können mit einbegriffen werden mittels einer eleganten, von H. Poincaré ersonnenen Methode (Lond. Phil. Trans. (A) **198**; F. d. M. **33**, 740, 1902); bislang jedoch ist meines Wissens keine Methode in allgemeiner Anwendung gewesen, um die Annäherung bis zu irgendeiner höheren Ordnung zu treiben. — In dem letzten Teile der Abhandlung wird die Methode dazu gebraucht, den Wert von $\omega^2/2\pi\varrho$ durch Terme der Elliptizität in dem Falle des Maclaurinschen Ellipsoids zu erhalten. Es tritt dabei weiter zutage, daß die Methode zu dem genauen Werte dieses Ausdruckes in endlichen Termen führt.“ Lp.

H. Wäsche. Beiträge zur Untersuchung über Maximalanziehungen homogener Körper bei Zugrundelegung des Anziehungsgesetzes $1/\varrho^{\nu}$. Diss. Halle a. S. 78 S. 8° u. 2 Fig.-Taf.

„Im Anschluß an die von A. Wangerin in seiner Theorie des Potentials gegebenen Ausdrücke für die Oberfläche und das Volumen des homogenen Ro-

tationskörpers, der auf einen in der Rotationsachse liegenden Oberflächenpunkt nach dem Gesetz $1/\varrho^p$ eine möglichst große Anziehung ausübt, wird im ersten Teil der Arbeit die Gestalt der Meridiankurven des Körpers größter Anziehung systematisch untersucht. Aus Zweckmäßigkeitsgründen ist dabei zunächst die Länge der Rotationsachse festgehalten und die Form der Meridiankurven für variables p behandelt worden. Es zeigt sich, daß nur für Werte von $p > -1$ Körper größter Anziehung entstehen, während den Werten für $p < -1$ Körper kleinster Anziehung entsprechen. Als eines der Ergebnisse sei ferner erwähnt, daß, falls p reziproker Wert einer positiven oder negativen ungeraden Zahl ist, die Meridiankurven sogenannte Multiplikatrixkurven sind. Besondere Beachtung und Sorgfalt ist auch der Konstruktion der Kurven geschenkt worden. Weiter wird das Verhalten der Meridiankurven im angezogenen Punkte sowie der Krümmungsradius im Pol und Gegenpol untersucht. Da bei der bisherigen Betrachtung das Volumen sich mit p ändert, ist bis zum Schluß dieses Teils noch kurz der Fall erörtert worden, daß das Volumen konstant gehalten wird. Alsdann ändert sich die Länge der Rotationsachse mit p; jedoch ist der Charakter der Meridiankurve derselbe wie im vorigen Fall. Es stellt sich aber heraus, daß nur positive Werte von p in Betracht kommen können, wenn das gegebene Volumen des Körpers größter Anziehung ein endliches ist.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wann ein homogener Körper von gegebenem Formtypus auf einen ausgezeichneten Punkt seiner Oberfläche eine möglichst große Anziehung ausübt. Ferner wird den allgemeinen Sätzen von Sella eine Reihe weiterer allgemeiner Sätze an die Seite gestellt, sowohl für das Newtonsche Gesetz, als auch für das allgemeine Gesetz $1\varrho/^p$. Auch wird diese Untersuchung auf Flächen ausgedehnt."

Lp.

A. G. Webster. On the wave potential of a circular ring of sources. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 63.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Kapitel 1.

Molekularphysik, Kapillarität, Elastizität, Akustik.

A. Molekularphysik und Allgemeines.

A. SCHUSTER. The progress of physics during thirty-three years (1875—1908). Four lectures delivered to the University of Calcutta during March, 1908. Cambridge: University Press. X u. 164 S.

Schildert die Veränderungen in unseren Anschauungen von 1875-1908. Das Buch ist subjektiv abgefaßt und ist keine streng historische Darstellung. Es gibt wertvolle erkenntnistheoretische Bemerkungen (vgl. Nature **87**, 375-377).

J.

MÉCHAIN und DELAMBRE. Grundlagen des dezimalen Systems, und BORDA und CASSINI. Versuche über die Länge des Sekundenpendels in Paris. In Auswahl übersetzt und herausgegeben von W. Block. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 200 S. 8⁰ u. 1 Taf. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 181.)

Die Schrift umfaßt folgende Teile: I. Vorbemerkungen. II. Bestimmung des Meters. III. Versuche über die Länge des Sekundenpendels in Paris von Borda und Cassini. IV. Bericht über die Messung des Meridianbogens zwischen den Breitenkreisen von Dünkirchen und Barcelona und über die Länge des hieraus abgeleiteten Meters, der Kommission für Maß und Gewicht am 11. Floréal des Jahres VII erstattet. V. Letzte Bemerkungen über das Meter. VI. Bericht von Tralles an die Kommission über die Einheit des Gewichts im dezimalen metrischen System nach den Arbeiten von Lefèvre-Gineau, am 11. Prairial des Jahres VII erstattet. VII. Definitives Meter. — Anmerkungen.

„Die Auswahl der Abschnitte ist derart erfolgt, daß alle irgend entbehrlichen Teile, die umfangreiche theoretische Erörterungen, Berechnungen, Beobachtungsergebnisse usw. enthalten, fortgelassen oder nur soweit aufgenommen sind, als sie zum Verständnis der historischen Entwicklung dieser ersten um-

fassenden Präzisionsmessung, die noch dazu unter den denkbar schwierigsten äußeren Verhältnissen durchgeführt wurde, erforderlich sind oder allgemeinere Betrachtungen bringen.“ Der hiermit vorgelegte Auszug aus dem Werke „Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridian compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes par MM. Méchain et Delambre“ (Paris 1806, 1807, 1810) ist für jedermann eine willkommene Schrift, die darüber unterrichtet, welche mühsamen Arbeiten erforderlich waren, um das jetzt geltende Maßsystem zu begründen. Lp.

K. Strecker. AEF. Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen. Verh. Deutsche Physik. Ges. **13**, 519-526.

Der Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen stellt vier Entwürfe zur Beratung: VIII. Arbeit und Energie. Begründung und Erläuterung von F. Emde, M. Planck, H. Rubens, G. F. Strahl. IX. Durchflutung und Strombelag. Begründung von F. Emde, G. Rößler. X. Mathematische Zeichen. XI. Ersatz der Pferdestärke. Begründung von F. Emde, W. Jaeger, D. Meyer, K. Scheel, K. Strecker. Lp.

J. B. Stallo. Die Begriffe und Theorien der modernen Physik, nach der 3. Aufl. des englischen Originals übersetzt und herausgegeben von Dr. Hans Kleinpeter, mit einem Vorwort von Ernst Mach. 2. Aufl. Leipzig: Joh. Ambrosius Barth, XXIV u. 328 S. 8°.

Das Werk, das eine erkenntnistheoretische Kritik einiger Disziplinen der Physik und hauptsächlich der Mechanik enthält, liegt in zweiter Auflage vor. Daß der Verf. mit seinen beachtenswerten kritischen Ausführungen (kritischen im Sinne Kants) nicht auf einem falschen Wege war, geht aus seinen Ausführungen über die mechanischen Grundbegriffe hervor, die teilweise nur noch der analytischen Formulierung bedürfen, um direkt zur modernen Relativitätstheorie zu führen. Diese Kapitel sind jedenfalls die beachtenswertesten des Buches, das sich aber darin nicht erschöpft. Vielmehr geht es auf die Theorien von der Molekularkonstitution und auf die kosmogonischen Theorien ein, ohne allerdings in diesen Kapiteln, bei denen der kritische Standpunkt ja viel leichter ist, auf der gleichen Höhe zu stehen (vgl. F. d. M. **32**, 783, 1901). Br.

E. v. Lommel. Lehrbuch der Experimentalphysik. 17.—19. neubearbeitete Auflage, herausgegeben von Walter König. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. X u. 644 S. 8°. Mit 441 Textfig. u. 1 Spektraltafel.

„Die letzte Auflage hatte den bei Gelegenheit der 12. bis 13. Auflage erheblich umgearbeiteten Text des Lommelschen Buches ohne größere Änderungen übernommen. Auch der vorliegenden Neuauflage liegt dieser Text wieder in sorgfältiger Durchsicht zugrunde. Er hat aber zugleich eine nicht unbeträchtliche Erweiterung und Vervollkommnung durch Einfügung einer

Reihe neuer Abschnitte und Ergänzung älterer erfahren. So sind in die Darstellung neu aufgenommen worden: die Gesetze des Luftwiderstandes, die Brownsche Molekularbewegung, das Kapillarelektrometer, Saitengalvanometer und Oszillograph, der Halleffekt, der Thomson-Effekt, die Reststrahlen, Bemerkungen über die Spektralserien, über die Elektronentheorie. Neu bearbeitet sind, abgesehen von kleinen Änderungen, die Abschnitte über Pyro- und Piezoelektrizität, über Fluoreszenz und Phosphoreszenz, über die Dispersionsformeln, über die lichtelektrischen Wirkungen und über die Telegraphie ohne Draht.“ Lp.

P. Duhem. Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale. Tome I. Conservation de l'énergie. Mécanique rationnelle. Statique générale. Déplacement de l'équilibre. Tome II. Dynamique générale. Conductibilité de la chaleur. Stabilité de l'équilibre. Paris: Gauthier-Villars. IV u. 528, IV u. 504 S. 8°.

„Die Thermodynamik hieß zuerst mechanische Wärmetheorie; sie nahm an, die Wärme bestehe in sehr kleinen und sehr schnellen Bewegungen der materiellen Molekeln, und versuchte, die Ableitung der Wärmegesetze aus den Prinzipien der theoretischen Mechanik zu bewerkstelligen. Später ist sie zu einer selbständigen Wissenschaft ausgewachsen, die sich auf eigene Prinzipien stützt und jeder Hypothese über das Wesen der Wärme bar ist; unter dieser Gestalt erscheinen noch immer die meisten neueren Lehrbücher. Diese Gestalt wird abgelöst durch eine dritte. Sowie die Anwendungen der Thermodynamik sich mehrten, begegnete sich diese Wissenschaft wieder mit der Mechanik bei der Behandlung von Problemen, die von beiden zugleich abhängen. Allmählich hat sich aus der Verschmelzung der Thermodynamik mit der Mechanik eine weit ausgedehnte Lehre gebildet; sie will allgemeine Prinzipien festlegen, die auf die verschiedenartigsten Fragen der Physik anwendbar sind: auf die Mechanik der unveränderlichen festen Körper und der Flüssigkeiten, auf die Erforschung der physikalischen und chemischen Zustandsänderungen, auf die elektrischen oder magnetischen Erscheinungen. Da das Prinzip von der Erhaltung der Energie das erste ist, welches von dieser Lehre aufgestellt wird, da sie aus ihm die Definition der Hauptbegriffe abzieht, über die sie nachsinnt, hat sie den Namen Energetik erhalten.

Die Energetik ist also eine Art Gesetzbuch, in welchem jeder Teil der Physik allgemeine Gesetze finden muß, denen sich seine besonderen Gesetze unterordnen. Man begreift unschwer, daß der Aufbau einer derartigen Lehre eine lange und beharrliche logische Anstrengung erfordert. Jedes energetische Gesetz hat die Bestimmung, bei den verschiedensten Umständen herbeigeholt, auf die mannigfaltigsten Erscheinungen angewandt zu werden. Wenn man nicht will, daß sie auf zahllose Widersprüche stößt, muß man sie in einer Fassung vortragen, die sowohl ganz allgemein als auch ganz präzis ist, die alle Arten vorausgesehen und alle Ausnahmefälle von vornherein angegeben hat.

Seit fünfundzwanzig Jahren arbeitet der Verf. mit Anspannung seiner Kräfte an diesem Aufbau der Energetik; er meint nun, durch die Darstellung dieser Wissenschaft als eines Ganzen den Physikern einen großen Dienst zu leisten.

Die peinlichen Vorsichtsmaßregeln, mit denen jeder Begriff definiert, jedes Gesetz formuliert werden kann, würden widerwärtig und abstoßend wirken, wenn nicht passend gewählte Beispiele dargeboten würden, um an ihnen die Grenze zu zeigen, bis zu der diese Bedingungen notwendig sind, und wie man ihnen Rechnung tragen muß. Der Verf. hat daher dafür gesorgt, diese Beispiele zu vervielfältigen; er entnimmt sie der Mechanik der Flüssigkeiten, der Elastitätslehre, der Theorie der Zustandsänderungen, der chemischen Mechanik. Dadurch macht er dem Leser die Aufgabe leicht, diese verschiedenen Wissenschaften mit der allgemeinen Energetik zu verknüpfen."

I. Einleitung. 1. Einführende Definitionen. 2. Das Prinzip von der Erhaltung der Energie. 3. Die Arbeit und die Aktionen. 4. Die Wärmemenge. 5. Die Mechanik der unveränderlichen festen Körper und die theoretische Mechanik. 6. Die normale Definition eines Systems. 7. Die Vorläufer des Carnotschen Prinzips. 8. Das Prinzip von Sadi Carnot und von Clausius. 9. Das innere thermodynamische Potential und die Entropie. 10. Das Gleichgewicht eines holonomen Systems. 11. Die Verschiebung des Gleichgewichtes.

II. 12. Die Bewegung der Systeme von gleichförmiger Temperatur. 13. Die Systeme mit Verbindungen. 14. Die kontinuierlichen Systeme. 15. Die Leitfähigkeit der Wärme. 16. Die Stabilität des Gleichgewichtes und die Bedingungen zu ihrer Sicherung. 17. Die notwendigen Bedingungen für die Stabilität des Gleichgewichtes. Die kleinen Bewegungen. 18. Stabilität des relativen Gleichgewichtes. Lp.

A. Kneser. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vorlesungen an der Universität Breslau. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. VIII u. 244 S. 8°.

Das Buch geht hauptsächlich von den Anwendungen der Wärmeleitung, der freien und erzwungenen Schwingungen in ein- und mehrdimensionalen Gebieten aus und behandelt jedes dieser Probleme „individuell, mit möglichst geringem Aufwand von allgemeiner Theorie". Die ersten Kapitel knüpfen an die Arbeiten des Verf. an und geben von diesen und von Ausarbeitungen seiner Schüler eine Gesamtübersicht. Das letzte Kapitel gibt einen kurzen Einblick in die Fredholmsche Theorie, aus ihm sei der elegante Beweis des Hadamardschen Determinantensatzes hervorgehoben. Das Buch gibt eine vorzügliche Einführung in die Behandlung physikalischer Probleme unter Zuhilfenahme der Integralgleichungen, behandelt aber nicht, wie der Titel vermuten läßt, die Integralgleichungen im ganzen. Es kann allen denen, die sich mit Anwendungen derselben in der mathematischen Physik beschäftigen wollen, sehr empfohlen werden (vgl. S. 363 dieses Bandes). Grb.

Sir Oliver Lodge. Der Weltäther. Übersetzt von Hilde Barkhausen. Braunschweig: Vieweg u. Sohn. VII u. 107 S. gr. 8°. 17 Abbild., 1 Taf. (Die Wissenschaft Heft 41.)

Das Buch gibt eine zusammenfassende Darstellung der Theorie des Äthers, wie sie auf englischem Boden durch die Arbeiten von Faraday, Max-

well, J. J. Thomson, Lord Kelvin und Lodge sich entwickelt hat. Danach ist der Äther eine kontinuierliche, inkompressible, ruhende vollkommene Flüssigkeit von der Dichte 10^{12}; die Materie besteht aus modifizierten Ätherpunkten, die sowohl mechanischen als elektrischen Kräften unterworfen sind. Während dem Verständnis des Laien zahlreich herangezogene Analogien dienen sollen, wird für den Physiker das bekannte Tatsachenmaterial übersichtlich zusammengestellt und im Anschluß daran die Theorie strenger begründet. Sk.

P. Debye. Die Frage nach der atomistischen Struktur der Energie. Zürich. Naturf.-Ges. **56**, 156-157.

Akademische Antrittsrede. Br.

A. Emch. Un appareil démontrant la transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique. Ens. math. **13**, 349-353.

Das bekannte Spielzeug, bei dem eine Rolle beim Fallen einen um die Achse gewickelten Faden, der am Ende festgehalten wird, abwickelt und nach vollständiger Abwicklung durch die erlangte Rotationsgeschwindigkeit dann wieder aufwickelt und dadurch gehoben wird, ist etwas verfeinert und dient zur Berechnung der Erscheinung. Lp.

J. D. van der Waals jr. Über die Erklärung der Naturgesetze auf statistisch-mechanischer Grundlage. Physik. Zs. **12**, 547-549.

J. D. van der Waals jr. Über die Frage nach den fundamentalsten Naturgesetzen. Physik. Zs. **12**, 600-602.

In dem ersten Artikel wird ausgeführt, daß der geordnete Zustand nicht durch Zufall, sondern durch Absicht (ein ordnendes Prinzip) entstanden ist, daß es ohne die Annahme eines solchen Prinzips nicht möglich ist, die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen mit der kontinuierlichen Geltung des Entropiegesetzes in Einklang zu bringen. Bezüglich des zweiten Artikels vergleiche man F. d. M. **40**, 850, 1909. Lp.

H. Bateman. Some problems in the theory of probability. Phil. Mag. (6) **21**, 745-752.

Es handelt sich um eine Reihe von Ausblicken auf die Art und Weise, wie man Wahrscheinlichkeitsformeln, die auf der Exponentialfunktion beruhen, auf verschiedene physikalische Probleme, z. B. solche der Gastheorie, der Theorie kolloidaler Lösungen und der Elektronentheorie anwenden könnte. Br.

C. Beckenhaupt. Über die physikalischen Verhältnisse, welche bei dem Relativitätsprinzip und der Vierdimensionalität in Betracht kommen. Verh. Naturf.-Ges. Karlsruhe 2_1, 105-110.

Der Verf. ist mit der Auffassung der Vorgänge nach dem Relativitätsprinzip nicht einverstanden. „In der Physik gibt es überhaupt gar nicht ein Verhältnis von Raum und Zeit, sondern überaus verschiedene Verhältnisse der Masse zu Raum und Zeit; Raum und Zeit kommen uns nur durch Masse zum Bewußtsein. Die Masse ist das Prinzip der Physik, aber sie verkörpert nicht Raum und Zeit und hat auch nicht etwa nur Beziehungen zu den anderen Massen, wie es das Relativitätsprinzip annimmt; sie steht vielmehr in einem sich unaufhörlich verändernden Verhältnis zum Raum, und diese ihre Verhältnisse zu Raum und Zeit sind die notwendigen Ausgangspunkte der Physik. Die Gravitationskonstante und die Lichtgeschwindigkeit sind nur Äußerungen dieser Verhältnisse.“ Lp.

A. Sommerfeld. Das Plancksche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekularphysik. Physik. Zs. **12**, 1057-1069; Verh. Deutsche Phys. Ges. **13**, 1074-1093; Verh. Naturf.-Ges. Karlsruhe $\mathbf{2}_1$, 31-49.

„Aktuell und problematisch ist die Theorie des Energiequantums oder, wie ich selber sage, die Theorie des Wirkungsquantums. Hier sind die Grundbegriffe noch im Fluß und die Probleme ungezählt. Planck, der Entdecker der Energieelemente, steht im Begriff, in seinen letzten Publikationen über die Emissionsquanten seine ursprünglichen Anschauungen wesentlich umzubilden. Einstein zog aus der Planckschen Entdeckung die weitgehendsten Folgen (übrigens schon in demselben denkwürdigen Jahre 1905, noch vor der Aufstellung des Relativitätsprinzips) und übertrug das Quantenhafte von dem Emissions- und Absorptionsvorgang auf die Struktur der Lichtenergie im Raume, ohne, wie ich glaube, seinen damaligen Standpunkt heute noch in seiner ganzen Kühnheit aufrechtzuhalten. Nernst, der das Tatsachenmaterial zur Lehre der Energiequanten so erfolgreich erweitert hat, bildet die ursprünglichen Ideen Plancks weiter aus.

Nichts könnte der modernen Physik förderlicher sein als eine Klärung der Ansichten über diese Fragen. Hier liegt der Schlüssel der Situation, der Schlüssel nicht nur zur Strahlungstheorie, sondern auch zur molekularen Konstitution der Materie, und zwar liegt er zurzeit noch tief versteckt. In einem ersten Teil meines Vortrags möchte ich über die bisherigen Erfolge der Quantentheorie berichten, in einem zweiten Teil eigene, an den Begriff des Wirkungsquantums anschließende Überlegungen besprechen, ohne irgendwie im ersten Teil Vollständigkeit anzustreben oder im zweiten Teil dem Umfang des Problems auch nur annähernd gerecht zu werden. Der Umstand, daß ich hierbei auch die Relativtheorie zu streifen haben werde, möge als Beleg dafür dienen, wie sehr diese Theorie die Grundlagen unseres physikalischen Denkens durchsetzt hat.“

1. Strahlungstheorie und Statistik. 2. Die neue Statistik der Energiequanten. 3. Die Gastheorie und ihre Wolken. 4. Die spezifischen Wärmen im Lichte der neuen Statistik. 5. Man soll die Freiheitsgrade wägen und nicht zählen. 6. Weitere Anwendungen der Energiequanten und der Lichtquanten. 7. Wirkungsquantum und Zeitmaß des Energieaustausches bei reinen Molekularprozessen. 8. Relativistische Begründung der Grundhypothese. 9. Anwendung

auf den lichtelektrischen Effekt. 10. Schlußbemerkungen zum lichtelektrischen Effekt und zur Auffassung des Wirkungsquantums. Verhältnis a) zur Strahlungstheorie, b) zur Elektrodynamik, c) zur Molekulartheorie, d) zur allgemeinen Mechanik. Lp.

J. E. MILLS. Molecular attraction. IX. Molecular attraction and the law of gravitation. Journ. phys. chem. **15**, 417-462.

Die Abhandlung setzt die Betrachtungen fort, welche in Nr. VIII (Fortschritte der Phys. **65**$_1$, 479-480, 1909) zu dem „neu entdeckten Gesetze“ für die molekulare Anziehung geführt hatten: $L - E_e = \mu' [\sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{D}] = \lambda$ (vgl. F. d. M **41**, 875, 1910), und sucht den Nachweis zu führen, daß dieses Gesetz notwendig das Newtonsche Gravitationsgesetz zur Folge haben müsse, oder daß beide Gesetze identisch seien. Wir referieren durch Wiedergabe des zusammenfassenden Schlußwortes, um die Gedanken des Verf. getreu vorzuführen.

„Die Aufmerksamkeit wird auf ein jüngst vom Verf. entdecktes, die molekulare Anziehung beherrschendes Gesetz gelenkt. Die Bedeutung dieses Gesetzes wird erörtert, und aus ihm wird die Kraft abgeleitet und mit dem Gesetze der Gravitationskraft verglichen. Eine sorgfältige Prüfung der Tatsachen würde die Vermutung erwecken, daß vielleicht die Gesetze der Gravitationskraft und der Molekularkraft identisch seien. Es wird gezeigt, daß das Gravitationsgesetz in der Newtonschen Fassung nicht auf die Molekularkraft Anwendung finden kann, und es wird vorgeschlagen, die Newtonsche Fassung des Gravitationsgesetzes so abzuändern, daß sie lautet $f = \mu m/s^2$, wenn die Gesamtkraft der Masse m betrachtet wird, d. h. die Gravitationsanziehung muß als eine begrenzte Eigenschaft der Materie und nicht als eine Eigenschaft angesehen werden, die unbegrenzt von dem Produkte der Massen abhängt. Die Augenfälligkeit des Gravitationsgesetzes in der Newtonschen Fassung wird erörtert, und die Schwierigkeiten, die mit der üblichen Anschauung der Gravitation verknüpft sind, werden hervorgehoben. Gelegentlich werden die anderen anziehenden Kräfte erörtert: die chemischen, elektrischen, magnetischen. Dadurch entsteht die Ansicht, daß vielleicht alle diese Kräfte nach Ursprung und Charakter identisch sind. Hieraus entspringt der Gedanke, daß die Masse eines Körpers der von ihr ausgeübten Anziehung proportional ist, und daß Masse eine relative und nicht eine absolute Eigenschaft der Materie ist. Die Tragweite der über einige Punkte vorgebrachten Ideen wird kurz erörtert.“ Lp.

J. E. MILLS. The relation of temperature and molecular attraction. Phil. Mag. (6) **22**, 84-113.

Verf. hat früher die Formel abgeleitet: $\lambda = \mu' (\sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{D})$, wo λ die innere Verdampfungswärme, μ' eine Konstante und d und D die Dichten einer Flüssigkeit und ihres gesättigten Dampfes bedeuten, und zwar auf Grund der Annahme,

daß die chemische Anziehung der Moleküle im wesentlichen von der Temperatur unabhängig ist. Es wird diskutiert, was man für Änderungen an der Formel anbringen muß, wenn dies nicht mehr der Fall ist. Br.

A. Einstein. Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Ann. der Phys. (4) **35**, 898-908.

Durch eine Erweiterung der Relativitätstheorie kommt der Verf. dazu, die Hypothese einzuführen, daß alle Naturvorgänge in einem homogenen Gravitationsfeld genau so vor sich gehen, als ob kein Feld vorhanden wäre, daß dafür aber das Bezugssystem sich mit einer konstanten, der Gravitationsbeschleunigung gleichen und entgegengesetzten Beschleunigung bewegt. Es muß also z. B. eine Uhr durch das Gravitationspotential in ihrem Gang beschleunigt werden. Hieraus ergibt sich, daß die Lichtgeschwindigkeit c an einem Ort zum Gravitationspotential Φ den Wert hat

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Es nimmt also c ab, wenn man sich einem gravitierenden Träger nähert, d. h. die Lichtstrahlen erfahren in der Nähe eines solchen Trägers eine Ablenkung nach diesem Körper hin. Se.

M. Abraham. Sulla teoria della gravitazione. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_2$, 678-682.

In Ann. der Phys. (4) 35, 898 ff. (Referat vorstehend) hat Einstein die Hypothese ausgesprochen, daß die Lichtgeschwindigkeit (c) vom Potential Φ der Gravitation abhängt. In der vorliegenden Note stellt der Verf. eine Theorie der Gravitation auf, die, indem sie sich mit dem Relativitätsprinzip im Einklang befindet, zu einer Relation zwischen c und Φ gelangt, welche in erster Annäherung mit der von Einstein gleichwertig ist. Diese Theorie schreibt der Dichtigkeit der Energie und dem Energiestrome im Gravitationsfelde Werte zu, die von den jetzt üblichen verschieden sind. Lp.

Ch. F. Brush. A kinetic theory of gravitation. Paper read before the American Association for the Advancement of Science, December 30, 1910. Science (N. S.) **33**, 381-386; Nature **86**, 130-132; Phys. Rev. **32**, 633-635.

Der Verf. sucht die Ursache der Gravitation in der kinetischen Energie des Äthers. Er fordert, daß der Äther mit sehr großer innerer kinetischer Energie in Wellenform irgendwelcher Art begabt ist; daß die Wellen in geraden Linien nach jeder denkbaren Richtung fortgepflanzt werden, d. h. daß die Wellenenergie isotrop ist; endlich daß diese Energie gleichmäßig über das ganze Universum verteilt ist, außer bei Störungen durch die Gegenwart von Materie. Mit andern Worten, der Hagelschauer von Ätherteilchen nach Lesage wird

durch Ätherwellen ersetzt. Damit die Moleküle eines von den Wellen getroffenen Körpers nicht in Schwingungen geraten, wodurch eine Umwandlung der kinetischen Energie der Welle in Wärme bewirkt werden könnte, werden die Wellen als sehr lang und von sehr langsamen Schwingungen vorausgesetzt. Die Schattentheorie wird dann, wie bei Lesage, benutzt, um die Annäherung zweier Körper durch die Gravitation zu erklären; diese sei also kein Zug, sondern ein Schub. Die momentane Wirkung scheine sich auch daraus zu erklären. Versuche, die der Verf. angestellt hat, um irgendwelche Resonanzerscheinungen der Gravitationswellen zu beobachten (die vielleicht longitudinal sind), haben bis jetzt noch keinen Erfolg gehabt. Lp.

F. Sanford. Dr. Brush's Theory of gravitation. Science (N. S.) **33**, 933.

Der vorstehend angezeigte Artikel „wird für Physiker von großem Interesse sein, wenn der Verf. das tut, was er zum Teil in einer künftigen Veröffentlichung zu tun verspricht, nämlich erklärt, wie ein Körper, der für eine gegebene Strahlung vollkommen durchgängig ist, einen anderen Körper vor jener Strahlung beschirmen kann, und warum, wenn der andere Körper ebenfalls völlig durchgängig ist, es irgendwelchen Unterschied macht, ob er vor der Strahlung beschirmt wird oder nicht.“ Lp.

W. Kent. A kinetic theory of gravitation. Science (N. S.) **33**, 619-620.

In dem Artikel „Kinetic theory of gravitation“ von Ch. F. Brush (Referat vorstehend) war aus dem Umstande, daß ein Pfund Eisen, das von der Erde bis an den neutralen Punkt zwischen Erde und Mond gehoben ist, nach keiner Seite hin fällt, geschlossen worden, daß die verloren gegangene potentielle Energie der Lage in dem Äther, durch den das Pfund gehoben wurde, unter irgendeiner Form vorhanden sein müsse. Kent zieht die Bündigkeit dieses Schlusses in Zweifel durch Vergleichung des Beispiels mit einem anderen, wenn nämlich das Gewicht nach einer Erhebung durch eine feste Unterlage in Ruhe gehalten wird. Ein anderer schwacher Punkt jener Theorie sei die Annahme, daß die langen Ätherwellen frei durch alle Körper hindurchlaufen und die Körper dennoch einen Schatten werfen sollen. Lp.

E. S. Manson Jr. A kinetic theory of gravitation. Science (N. S.) **33**, 894-895.

„Der Punkt, den Brush übersehen zu haben scheint, ist der, daß die Anziehung zwischen zwei Körpern eine gegenseitige ist.... Es verschwindet ebensowenig Energie, die in Betracht zu ziehen ist, wie in dem einfacheren Falle, wo eine Masse, die keiner anderen Anziehung unterworfen ist als der von der Erde, oberhalb der Erdoberfläche gehoben wird.“ Lp.

O. Lodge. A kinetic theory of gravitation. Nature **86**, 142-143.

C. V. Burton. A kinetic theory of gravitation. Nature **86**, 246.

Lodge kritisiert die von Brush (Referat vorstehend) aufgestellte Theorie, bei der, wie bei jeder auf den letzten Grund ausgehenden Forschung, Zirkelschlüsse vorkommen. „Dies ist nicht mehr als eine negative Voraussage oder Bewertung der Unmöglichkeit zu deuten; solche Voraussagen sind stets widersinnig. Es kann sein, daß, wenn die Struktur eines Elektrons verstanden wird, wir einsehen, daß ein gleichmäßig mächtiger Spannungszustand in dem umgebenden Äther notwendig einbegriffen ist. Was ich instinktiv fühle, ist, daß dies die Richtung für die Entwicklung ist; daß, was wir bedürfen, etwas Innerliches und Inwendiges ist, und daß alle Versuche, die Gravitation als von der Einwirkung irgendeines äußerlichen Agens stammend zu erklären, seien es fliegende Partikelchen oder drängende Wellen, zum Bankerott verdammt sind; denn alle diese Spekulationen betrachten das Atom als eine fremde Substanz, eine Art Gries in dem Äther, hierhin und dorthin getrieben durch Kräfte, die ihr selbst fremd sind.“ — Burton schließt sich unter Hinweis auf seine bezügliche Veröffentlichung (F. d. M. **39**, 839, 1908) der Kritik von Lodge an, meint aber, die wahre Lösung einer Frage liege oft weit abseits von dem, was wir vernünftigerweise zu erwarten berechtigt seien. Lp.

H. V. Gill. A wave theory of gravitation. Nature **86**, 180.

Hinweis auf die Verwandtschaft der von Brush aufgestellten Hypothese mit der alten Theorie von Lesage und auf frühere ganz ähnliche Versuche. Der Verf. hat einen bezüglichen Artikel in der Augustnummer 1907 von The New Ireland Review veröffentlicht, und Sir J. J. Thomson sagt in „Electricity and Matter“ (1903), S. 160: „Wir haben in dem ersten Kapitel gesehen, daß Wellen elektrischer und magnetischer Kraft eine Bewegungsgröße in ihrer Fortpflanzungsrichtung besitzen; wir können daher die Lesageschen Körperchen durch sehr eindringende Röntgenstrahlen ersetzen.“ Lp.

Th. Erismann. Sur la dépendance de la force de gravitation du milieu intermédiaire à travers lequel elle s'exerce. Arch. sc. phys. et nat. (4) **31**, 36-56.

Gekürzte Wiedergabe der Dissertation des Verf., über welche F. d. M. **39**, 841, 1908 referiert ist. Lp.

A. Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (1. Mitteilung). Wien. Ber. **120**, 385-530.

Verf. entwirft ein System von Gleichungen, das für alle physikalischen und chemischen Vorgänge gelten soll und für keinerlei Fernwirkung Raum läßt. Alle Größen erscheinen darin als Vektoren mit stetiger Änderung von Ort zu

Ort. Die verschiedenen neu auftretenden Größen erhalten naturgemäß immer neue Bezugszeichen und werden in Gleichungen gebracht, die bestimmt sind, die bisher gültigen zu ersetzen. So wird eine ganze Reihe von Gebieten der Mechanik, Optik, Elektrizität, Chemie, Wärmetheorie, Strahlungstheorie bearbeitet. Ob das System nützlich ist oder nicht, erfährt man noch nicht. Denn Verf. stellt nur eine große Zahl von Grundformeln auf und schreibt das mathematische Bild der bekannten Vorgänge mit seinen eigenen Zeichen, ohne aus seiner Darstellungsweise neue Tatsachen abzuleiten, oder die bekannten durch Ausrechnung der neuen Formeln zu verifizieren. Br.

A. Jäger. Die Berechnung der Loschmidtschen Zahl mit Hülfe der Flüssigkeitstheorie. Wien. Ber. **120**, 635-637.

Die Loschmidtsche Zahl wird für Quecksilber aus den bekannten Größen der kinetischen Gastheorie zu $612 . 10^{21}$ berechnet. Br.

A. Einstein. Bemerkung zu dem Gesetz von Eötvös. Ann. der Phys. (4) **34**, 165-169.

Aus dem Eötvösschen Gesetz wird eine Reihe von Folgerungen molekulartheoretischen Charakters bei verschiedenen Grundannahmen gezogen. Br.

A. Einstein. Eine Beziehung zwischen dem elastischen Verhalten und der spezifischen Wärme bei festen Körpern mit einatomigem Molekül. Ann. der Phys. (4) **34**, 170-174, 590.

Es wird die der Verschiebung eines Moleküls entgegenwirkende Kraft aus den molekulartheoretischen Größen berechnet, wenn angenommen wird, daß die Moleküle einatomig und nach einem quadratischen Raumgitter angeordnet sind. Br.

A. Einstein. Berichtigung zu meiner Arbeit: „Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen“. Ann. der Phys. (4) **34**, 591-592.

Die zu berichtigende Arbeit ist in Ann. der Phys. (4) **19**, 289-306 (F. d. M. **37**, 811, 1906) erschienen. Die Berichtigung betrifft einen Rechenfehler in der Ermittlung des Viskositätskoeffizienten. Br.

J. Stark. Prinzipien der Atomdynamik. II. Teil. Die elementare Strahlung. Leipzig: S. Hirzel. XV + 286 S. 8°.

Ein Versuch, die zahlreichen Einzelresultate und Theorien im Gebiet der Atomstrahlung in ein einheitliches System zu bringen. Die Grundlage bildet

natürlich die elektromagnetische Lichttheorie, und das Hauptproblem besteht auch für den Verf. darin, auf Grund dieser unter plausiblen Annahmen für die elektrische Struktur eines Atoms, das auch hier als ein der Absorption und Emission fähiger Resonator erscheint, die Zusammensetzung der elementaren Strahlung abzuleiten. Natürlich wird dieses Problem vom Verf. nicht gelöst; es werden aber alle bekannt gewordenen elementaren Strahlungserscheinungen daraufhin durchgeprüft, ob sie sich alle der Hypothese eines von den Atomen auf eine freie Schwingung aller Wellenlängen ausgeübten partiellen Zwanges unterordnen lassen. Das Gebiet der so untersuchten Schwingungsarten ist recht groß: Lichtschwingungen, Röntgenstrahlen, Kathodenstrahlen, γ-Strahlen, Kanalstrahlen werden in den Kreis der Betrachtung gezogen, und die mit ihnen verbundenen Sondererscheinungen: Bandenspektrum, Serienspektrum, Zeeman-Effekt, Fluoreszenz, Phosphoreszenz usw. untersucht. Das Ganze gibt sich nicht als eine Theorie, zu der ja noch, abgesehen von den grundlegenden Formeln, nahezu alles fehlt, sondern mehr als eine Vorarbeit zu einer solchen, die sich mit der Aufstellung gewisser Leitprinzipien für die bunte Fülle der bereits bekannten Einzelresultate begnügt. Br.

E. Th. Whittaker. On the dynamical nature of the molecular systems which emit spectra of the banded type. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 262-270.

Es wird ein Molekülmodell konstruiert, das aus zwei Atommodellen besteht, von denen jedes einen elektrischen Schwingungskreis darstellt, und untersucht, welche gegenseitige Einwirkung man den Atomschwingungskreisen zuschreiben muß, damit der resultierende Molekularschwingungskreis ein Reihenspektrum aussenden kann. Br.

W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik. (Mit Ausschluß der Kristalloptik.) Leipzig: B. G. Teubner. XVI + 964 S. 8°.

Eine aus Vorlesungen erwachsene, aber erheblich über den Anschauungskreis solcher hinausgehende zusammenfassende theoretische Darstellung der mechanischen, elastischen, molekularphysikalischen, thermischen, elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Kristalle sowie der vielen Erscheinungen, die, wie die Piëzoelektrizität, zugleich in mehrere dieser Gebiete überspielen. Das Buch ist sehr gründlich und vollständig in den Resultaten, darin fast an ein enzyklopädisches Werk heranreichend, behält dabei aber doch den Charakter eines wirklichen Lehrbuchs, das alle Resultate ableitet. Br.

C. Sommerfeldt. Die Kristallgruppen nebst ihren Beziehungen zu den Raumgittern. Dresden: Th. Steinkopff. VII + 79 S. 8°.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt in seiner detaillierten Spezialisierung, die auf alle möglichen Einzelheiten von Strukturformen eingeht. Br.

E. Grüneisen. Die Beziehungen zwischen Atomwärme, Ausdehnungskoeffizient und Kompressibilität fester Elemente. Verh. Deutsche Physik. Ges. **13**, 491-503.

Der Verf. zeigt, daß die thermische Ausdehnung und die Änderung der Kompressibilität mit der Temperatur sich im Gebiete tiefer Temperaturen auf die Eigenfrequenz und ihre Veränderlichkeit mit dem Volumen oder Druck zurückführen lassen. Lp.

E. Grüneisen. Zur Theorie einatomiger fester Körper. Verh. Deutsche Phys. Ges. **13**, 836-847; Physik. Zs. **12**, 1023-1028.

Die Grundhypothesen des Verf. sind folgende: Die anziehende Kraft zwischen den Atomen ist gleich der van der Waalsschen Kohäsionskraft, der von dieser Kraft herrührende Teil der inneren potentiellen Energie des Grammatoms beim absoluten Nullpunkte daher $V_{1_0} = -A/v_0$. Von der abstoßenden Kraft zwischen den Atomen wird vorausgesetzt, daß sie sich nach einer erheblich höheren Potenz m des reziproken Abstandes ändert, also analog dem vorigen $V_{2_0} = +B/v_0^m$. Durch Wirkung beider Kräfte werden die Atome beim absoluten Nullpunkte in bestimmten Gleichgewichtslagen gehalten, die sich bei höherer Temperatur entsprechend der Volumenausdehnung verschieben. Die gesamte Schwingungsenergie der bei höheren Temperaturen Sinusschwingungen ausführenden Atome soll durch $\int_0^T C_0 dT$ gegeben sein.

Von diesen Hypothesen aus werden zwei voneinander unabhängige Wege eingeschlagen. Der eine führt über den Clausiusschen Virialsatz zu einer angenäherten Zustandsgleichung fester Körper und lehrt damit, die thermisch-elastischen Eigenschaften der Substanz auf wenige charakteristische Größen zurückzuführen. Der andere Weg vermittelt die Kenntnis der Eigenfrequenz des Atoms und ihrer Beziehungen zu den thermisch-elastischen Eigenschaften.

In der Diskussion über diesen Vortrag bemerkte Nernst: „Sie haben wohl alle den Eindruck gewonnen, daß wir jetzt so weit sind, auch den festen Aggregatzustand molekulartheoretisch zu behandeln, und es ist zu hoffen, daß wir bald eine ähnliche vollständige Theorie auch für den festen Aggregatzustand bekommen werden, wie wir sie für die Gase seit langem besitzen.“ Lp.

F. Jüttner. Über die allgemeinen Integrale der gewöhnlichen chemischen Kinetik. Breslau: Trewendt u. Granier. 10 S. 8°.

Die Differentialgleichungen werden in Reihen nach Partialbrüchen zerlegt und serienweise integriert. Br.

A. S. Couper. Über eine neue chemische Theorie. Leipzig: W. Engelmann. 40 S. 8°.

Das Werk (1858 zuerst veröffentlicht: C. R. **46**, 1157-1160) erscheint, von R. Anschütz herausgegeben, als Nr. 183 von Ostwalds Klassikern der ex. Wiss. Br.

F. A. Lindemann. Über Beziehungen zwischen chemischer Affinität und Elektronenfrequenzen. Verh. Deutsche Phys. Ges. **13**, 1107-1116.

In einem Vortrage vor der Deutschen Chemischen Gesellschaft (27/11, 1911) hat Haber gezeigt, daß die chemische Verbindungswärme auf das Molekül nach der Größenordnung gleich ist der Summe der Energiequanten, die den selektiven Photoeffekten der Elemente oder der ultravioletten Eigenschwingung der Verbindungen entsprechen. In Anbetracht des durch diesen Vortrag wachgerufenen Interesses teilt der Verf. einige Betrachtungen mit, die zeigen, daß man, auch ohne das Plancksche Wirkungsquantum zu Hülfe zu nehmen, zu ganz analogen Ergebnissen gelangen kann. Lp.

W. Sutherland. On weak electrolytes and towards a dynamical theory of solutions. Phil. Mag. (6) **22**, 17-66.

Der Inhalt der Arbeit ist der Hauptsache nach spekulativer Art. Es wird eine große Anzahl physikalischer Größen aus den verschiedensten Disziplinen daraufhin diskutiert, ob und wie sie gegebenenfalls zum Gegenstand einer Theorie verdünnter Lösungen nach Art der Gastheorie gemacht werden könnten. Br.

P. Girard et V. Henri. Au sujet de nouvelles hypothèses sur l'état moléculaire des corps en solution. C. R. **153**, 946-948.

Nachweis, daß die Resultate von Colson und Fouard, bei ihren kryoskopischen und osmometrischen Versuchen, wonach sich nicht-elektrolytische Stoffe, wie Zucker, in wässriger Lösung polymerisieren sollen, den van t'Hoff-Arrheniusschen Theorien nicht widersprechen. Br.

U. Grassi. Su un problema e su alcune esperienze di diffusione. Nuovo Cimento (6) **1**, 120-122.

O. Scarpa. Su un problema e su alcune esperienze di diffusione. Ibid. (6) **1**, 431-436.

U. Grassi. Ancora su un problema e su alcune esperienze di diffusione. Ibid. (6) **2**, 229-233.

Der erste Artikel enthält Bemerkungen zu einer Arbeit von Scarpa (Nuovo Cimento (5) **20**, 212-225; F. d. M. **41**, 878, 1910), in der dieser bei

Gelegenheit der Besprechung einer Arbeit Vanzettis eine theoretische Lösung des Diffusionsproblems angegeben hatte. Die beiden anderen Artikel sind Entgegnungen. Br.

A. Garbasso. Sopra un particolare fenomeno di diffusione. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 197-201.

Gibt Konzentrationskurven zur Darstellung des Diffusionsvorganges, die ein Maximum besitzen. Br.

A. Campetti e C. Delgrosso. Sull' equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili. Torino Mem. (2) **61**, 187-197.

(a) „Wir haben die Kurven gegenseitiger Mischbarkeit und die kritische Temperatur und Konzentration für acht Substanzenpaare bestimmt; in fünf von den betrachteten acht Fällen waren die Komponenten auf strenge Weise chemisch definiert. Die acht Paare zeigten alle eine höhere kritische Temperatur. (b) Das Gesetz des geradlinigen Durchmessers wird mit hinreichender Genauigkeit bestätigt; unter analogen Bedingungen ist das Gesetz der korrespondierenden Zustände ebenfalls in erster Annäherung anwendbar.“ Lp.

A. Mazzuchelli. A proposito di uno studio recente su l'indice di rifrazione dei miscugli binari. Rom. Acc. L. Rend. **20**$_1$, 752-758.

Der Artikel enthält im wesentlichen eine Kritik der Arbeit von F. Schwers: „Nouvelles contributions à l'étude des solutions. I. Rapports entre la densité et l'indice de réfraction dans les mélanges binaires. II. Variations de la densité des mélanges binaires avec la température“ (Bull. Soc. chim. (4) **7**, 875-882, 937-940, 1910). Bei aller Anerkennung des verarbeiteten Materials sei die von Schwers behauptete Konstanz einer gewissen Größe A nicht aufrecht zu erhalten. „Ich meine, die Formeln von Schwers können jedenfalls als Interpolationsformeln dienen, um aus wenigen Brechungsexponenten einer Reihe von Gemischen, von der man alle Dichtigkeiten kennt, die übrigen Brechungsexponenten zu berechnen, oder auch umgekehrt aus den Brechungsexponenten und wenigen Dichtigkeiten die übrigen Dichtigkeiten.“ Lp.

W. C. Mc C. Lewis. Note on the internal pressure of a liquid. Phil. Mag. (6) **22**, 193-197.

Diskussion der verschiedenen Theorien über die Frage, ob der innere Druck einer Flüssigkeit von der Temperatur merklich abhängt oder nicht. Br.

H. Fletcher. Einige Beiträge zur Theorie der Brownschen Bewegung mit experimentellen Anwendungen. Physik. Zs. **12**, 202-208.

Für die Verschiebungsgröße erhält Verf. bis auf eine Konstante zunächst denselben Wert wie Einstein (Ann. der Phys. (4) **17**, 559; F. d. M. **36**, 975, 1905). Er berechnet dann die Wahrscheinlichkeit der Verschiebung und behandelt die Wirkung der Brownschen Bewegung auf Teilchen im Schwerefeld und „auf den scheinbaren Wert der von einem suspendierten Teilchen getragenen elektrischen Ladung“. Grb.

Weitere Literatur.

S. Arrhenius. L'énergie libre. Rev. générale des sc. **22**, 266-275.

J. Beckenkamp. Grundzüge einer kinetischen Kristalltheorie. Sitzungsber. phys.-med. Gesellsch. Würzburg 1911. 38 S. gr. 8⁰.

J. de Boissoudy. Le problème de la constitution de l'atome. Scientia **9**, 250-277.

H. E. Corbin and A. M. Stewart. A handbook of physics and chemistry. Fourth edition. London: J. and A. Churchill. VIII u. 519 S. [Nature **88**, 107.]

A. Daniell. A text-book of the principles of physics. New and revised edition. New York: The Macmillan Co., London: Macmillan and Co., Ltd., XXV u. 819 S. [Nature **88**, 510, 1912.]

R. De. An intermediate course of practical physics. Calcutta: The International Publishing Co. XII u. 284 S. [Nature **89**, 344, 1912.]

A. W. Duff and A. W. Ewell. Physical measurements. Second edition, revised and enlarged. London: J. and A. Churchill. X u. 258 S. [Nature **86**, 553.]

E. Edser. General physics for students: a text-book on the fundamental properties of matter. London: Macmillan and Co., Ltd. IX u. 632 S. [Nature **88**, 3-4.]

A. H. Fison. Notes on practical physics. London: Edward Arnold. VIII u. 144 S. [Nature **88**, 478-479, 1912.]

W. M. Hooton and A. Mathias. An introductory course of mechanics and physics for technical students. London: W. B. Clive, University Tutorial Press, Ltd. VII u. 148 S. [Nature **89**, 343, 1912.]

A. L. Kimball. A college text-book of physics. New York: Henry Holt and Co. IX u. 692 S. [Nature **87**, 548.]

P. Lenard. Über Äther und Materie. Vortrag. 2. ausführliche Auflage. Heidelberg: Winter. 51 S. gr. 8⁰.

W. F. Magie. Principles of physics: Designed for use as a text-book of general physics. London: G. Bell and Sons, Ltd. IX u. 570 S. [Nature **88**, 510-511, 1912.]

G. Mie. Moleküle, Atome, Weltäther. 3. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 74 S. 8⁰. (Aus Natur u. Geisteswelt 58.)

P. L. Narasu. Intermediate physics. Prepared in accordance with the new regulations of Indian Universities. Madras: Srinivasa Varadachari and Co., XII u. 637 S. [Nature 87, 547.]

F. W. Merchant and C. A. Chant. The Ontario High School laboratory manual in physics. Toronto: The Copp, Clark Company, Ltd., n. d. VIII u. 128 S. [Nature 89, 344, 1912.]

F. W. Merchant and C. A. Chant. The Ontario High School Physics. Toronto: The Copp, Clark Company, Ltd., n. d. VII u. 504 S. [Nature 89, 343-344, 1912.]

W. Nernst. Introduction to certain fundamental principles of modern physics. Journ. Franklin Inst. 171, 501-517.

Übersetzt aus Revue scient. 14, 513-520, 1910.

J. O. Reed and K. E. Guthe. College physics. New York: The Macmillan Co.; London: Macmillan and Co., Ltd. XXVIII u. 622 S. [Nature 88, 479, 1912.]

J. Sageret. La mesure du temps et des mouvements angulaires. Revue scient. 16, 583-589.

J. F. Spencer. An experimental course of physical chemistry. Part II. Dynamical experiments. London: G. Bell and Sons, Ltd. XVI u. 256 S. [Nature 89, 578, 1912.]

L. B. Spinney. A text-book of physics. New York: The Macmillan Co.; London: Macmillan and Co., Ltd. XII u. 605 S. [Nature 88, 510, 1912.]

Yorimoto-Tashi. L'énergie en douze leçons. Traduit du japonais, commenté par B. Dangennes. Tours: Arrault. 128 S. 8⁰.

A. E. H. Tutton. Crystallography and practical crystal measurement. London: Macmillan and Co., Ltd. XIV u. 946 S. [Nature 88, 439-440, 1912.]

A. E. H. Tutton. Crystals. (The integrational scientific series.) London: Kegan Paul, Trench, Trübner and Co., Ltd. X u. 301 S. [Nature 88, 440, 1912.]

N. Umow. Die Merkmale und Aufgaben des modernen naturwissenschaftlichen Denkens. Mendelejewkongr. 2, 1-21. (Russisch.)

J. Walker. Theories of solution. (Opening address.) Nature 87, 296-300.

B. Kapillarität.

R. D. Kleemann. An investigation of the determinations of the law of chemical attraction between atoms from physical data. Phil. Mag. (6) 21, 83-102.

Es wird der Einfluß diskutiert, den gewisse physikalische Bedingungen, wie Oberflächenspannung, Viskosität usw. in Form von Koeffizienten usw. auf die chemische Anziehung haben können. Konkrete Probleme werden nicht behandelt. Br.

R. D. Kleeman. Molecular attraction and the properties of liquids. Phil. Mag. (6) **22**, 566-586.

Eine Weiterführung der Arbeit, aus Phil. Mag. (6) **21**, 83-102, betreffend verschiedene Resultate über Größenbeziehungen aus der Kapillaritäts- oder Wärmetheorie, die sich ergeben, wenn man die dort erhaltenen verschiedenen Ausdrücke für die Oberflächenspannung oder die latente Wärme gleichsetzt.
Br.

G. Ter Gazarian. Sur une relation générale entre les propriétés physiques des corps: application à la viscosité, la capillarité, l'énergie superficielle, la chaleur de vaporisation, le diamètre rectiligne. C. R. **153**, 871-874, 1071-1074.

Enthält nur Beobachtungsresultate, die auf gewisse Gesetzmäßigkeiten der im Titel genannten Größen bei Kohlenwasserstoffen deuten. Br.

C. del Lungo. Le forze capillari e l'evaporazione. Nuovo Cimento (6) **2**, 425-430.

Die Arbeit bringt nur bekannte Formeln. Br.

P. Ronceray. Recherches sur l'écoulement dans les tubes capillaires. Ann. de Chim. et Phys. (8) **22**, 107-125.

Nach den Untersuchungen des Verf. existiert kein unregelmäßiger Zwischenzustand zwischen dem von Poiseuille erforschten Zustand und dem hydraulischen (turbulenten), wenn die verschiedenen störenden Ursachen korrigiert sind, sondern sie gehen unmerklich ineinander über. Danach ist es ferner möglich, daß der in der Torricellischen Formel gegebene Wert 0,62 nur ein mittlerer Wert ist, der mit dem Druck wachsen oder abnehmen kann.
Lp.

G. Bakker. Théorie de la couche capillaire des corps purs. Vol. I: Théorie de la couche capillaire plane des corps purs. Paris: Gauthier-Villars. 96 S. 8°.

J. Chaudier. Sur la mesure des tensions superficielles des liquides par la méthode des rides. Ann. Univ. Grenoble **23**, 659-671.

C. Elastizität.

M. Ensslin. Elastizitätslehre für Ingenieure. I.: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion, gekrümmte Träger. Leipzig: G. J. Göschen. 140 S. 12mo. Mit 60 Abbildungen (Samml. Göschen Nr. 519).

„Betriebserfahrung, wissenschaftliches Experiment, Näherungsrechnung und die mit den Methoden der Infinitesimalrechnung arbeitende Elastizitätslehre sind die Mittel, die dem Ingenieur zu Gebote stehen, der seine Konstruktionen den Forderungen der Festigkeit und Elastizität und der Materialersparnis entsprechend zu gestalten sucht. Eine Einführung in das zu geben, was die Elastizitätslehre hierzu beizutragen vermag, ist der Zweck der beiden Bändchen Elastizitätslehre, von denen der erste vorliegt. Während in der in der gleichen Sammlung erschienenen Festigkeitslehre von Hauber die einfacheren Beanspruchungsfälle stabförmiger Körper behandelt sind, werden hier zur Untersuchung von Zylindern und Platten und von schwierigeren statisch unbestimmten Konstruktionen höhere Methoden gebraucht. Die besondere Aufgabe für den Verf. lag darin, die Grundbegriffe und deren mathematische Formulierung vorzutragen, sodann zu zeigen, wie technische Aufgaben mit den Hülfsmitteln der Elastizitätslehre angefaßt und gelöst werden, und schließlich trotz des hierzu erforderlichen Raumes stofflich nicht zu wenig zu bieten und zu technisch verwertbaren Resultaten zu gelangen.“ Lp.

G. Herglotz. Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie. Ann. der Phys. (4) **36**, 493-533.

Die Annahme, von der die Betrachtungen ausgehen, ist in Verfolgung der von M. Planck in seinen Arbeiten (F. d. M. 38, 718, 1907) über das Prinzip der kleinsten Wirkung eingeschlagenen Richtung die, daß für die Bewegung des Körpers ein kinetisches Potential existiert, welches erstens den Lorentz-Transformationen gegenüber invariant (bei homogener Schreibweise) ist, und sich zweitens im Falle der Ruhe auf eine gegebene Funktion der Deformationen und der Entropie des einzelnen Volumenelementes reduziert; hierdurch ist sofort auch sein allgemeiner Ausdruck bestimmt (§ 5). Insbesondere erhellt, daß im Falle der Bewegung die Ruhedeformationen (§§ 1, 2) maßgebend sind, die jene Deformationen, welche das Volumenelement nach Rückgängigmachung der seiner Geschwindigkeit entsprechenden Lorentz-Kontraktion gegen seine Normalgestalt aufweist.

Aus der ersten Variation dieses kinetischen Potentials fließen sofort die Bewegungsgleichungen, zunächst in der Lagrangeschen (§ 6), dann in der Eulerschen Form (§ 7). In der letzteren sind sie formal mit jenem System identisch, das M. Abraham an die Spitze seiner Untersuchungen über die Elektrodynamik bewegter Körper gestellt hat; aus dieser Vergleichung ist die Bedeutung der in ihnen auftretenden 16-gliedrigen Matrix zu entnehmen. Die 10 Relationen (§ 7), die die Symmetrieeigenschaften jener Matrix und die Verknüpfung von Impuls, Energie und Spannung untereinander zum Ausdruck bringen, ergeben sich als das vollständige System partieller Differentialgleichun-

gen (§ 3), denen das kinetische Potential zufolge seiner durch die beiden obigen Annahmen bedingten Form genügen muß.

Der zehngliedrigen Gruppe von „Bewegungen" im (x, y, z, t)-Raum entsprechend, gelten für die Bewegung des ganzen Körpers 10 allgemeine Integrale (§ 9), und zwar den 4 Translationen entsprechend die 3 Impulssätze und der Energiesatz, den 6 Drehungen entsprechend aber einmal die 3 Flächensätze, und dann 3 weitere, diesen (zufolge der Gleichberechtigung von x, y, z, t) völlig analog gebildete Gleichungen, die mit den einmal integrierten Schwerpunktsätzen der klassischen Mechanik in Parallele zu setzen sind. Für kräftefrei adiabatische Bewegungen insbesondere folgt aus ihnen, daß sich der Energiemittelpunkt (der hier den Massenmittelpunkt vertritt) geradlinig gleichförmig bewegt, und daß seine mit der Gesamtenergie multiplizierte Geschwindigkeit den Gesamtimpuls liefert.

Hängt das Ruhepotential nur von Entropie und Volumen ab, so erhält man den Fall einer idealen Flüssigkeit mit allseitig gleichem Druck (§ 10), und aus der Weberschen Form der hydrodynamischen Gleichungen folgen die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen für die Hydrodynamik der Relativitätstheorie (§ 11).

Knüpfen die Betrachtungen des ersten Teiles an die erste Variation des kinetischen Potentials an, so sind die des zweiten über den Trägheitswiderstand und die Wellenmechanik von der zweiten Variation desselben abhängig. Für das einzelne Volumenelement hängen die Komponenten des Trägheitswiderstandes mit den Komponenten der ihn weckenden Beschleunigung durch eine lineare Transformation mit symmetrischer Determinante zusammen, deren 6 Koeffizienten als die Trägheitskoeffizienten oder Massendichten an der betreffenden Körperstelle bezeichnet werden können. Will man nun nicht in jeder Richtung der gewöhnlichen Auffassung völlig entgegengesetzte Verhältnisse finden, so muß dem Postulate positiver Massen in der klassischen Mechanik analog die Forderung gestellt werden, daß die mit den 6 Trägheitskoeffizienten gebildete quadratische Form Γ (die zweite Variation des kinetischen Potentials nach der Geschwindigkeit) definit positiv sein soll, oder daß, anschaulich ausgedrückt, der Trägheitswiderstand stets einen stumpfen Winkel mit der Beschleunigung bilden soll (§ 1).

Die Gesetze der Wellenmechanik werden (§ 4) durch eine andere quadratische Form W (die vollständige zweite Variation des kinetischen Potentials) geliefert, und es erweisen sich nun die beiden Formen Γ und W auf Grund ihrer Darstellungen (§§ 2, 3, 5) als wechselweise auseinander ableitbar. Hieraus folgt, daß die an den Trägheitswiderstand gestellte Forderung die Unmöglichkeit von Wellen mit Überlichtgeschwindigkeit nach sich zieht, hierzu aber auch wirklich notwendig ist (§ 6).

Reduzieren sich die 6 Trägheitskoeffizienten auf nur 2 (einen longitudinalen und einen transversalen), so sind in dem Körper nur Longitudinal- und Transversalwellen mit nach allen Richtungen gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit möglich, und umgekehrt (§ 7). Die beiden Trägheitskoeffizienten und die beiden Wellengeschwindigkeiten sind wechselweise auseinander ableitbar.

Diese speziellen Verhältnisse sind bei der idealen Flüssigkeit (bei der aber die Geschwindigkeit der Transversalwellen Null wird) und bei dem elastischen isotropen Körper (§ 9) für verschwindende Ruhedeformationen realisiert.

Bei letzterem ergibt die an den Trägheitswiderstand gestellte Forderung obere, durch die Ruhemassendichte gegebene Grenzen für die beiden Elastizitätskoeffizienten. Lp.

W. v. IGNATOWSKY. Zur Elastizitätstheorie vom Standpunkte des Relativitätsprinzips. Physik. Zs. **12**, 164-169.

Da nach einer Bemerkung von Ehrenfest (Physik. Zs. **11**, 1127-1129; F. d. M. **41**, 941, 1910) die Bornsche Bedingung der Starrheit versagt, läßt der Verf. den Begriff des starren Körpers im allgemeinen fallen und nimmt an, daß die Deformation als ein elastisches Problem aufzufassen ist. Von diesem Standpunkte aus sucht er in der vorliegenden Note Aufschluß über die Deformation bei bewegten Körpern zu erlangen. In der Berechnung der Spannungen eines bewegten Körpers folgt er dem Gedankengange von Minkowski bei der Ableitung der elektrodynamischen Gleichungen. Nach Aufstellung der allgemeinen Formeln folgt die Erläuterung an einigen Beispielen. Wegen der vielen zu erklärenden Bezeichnungen müssen wir auf ein eingehenderes Referat verzichten. Lp.

HANS WITTE. Über eine Erweiterung der Elastizitätstheorie. Ann. der Phys. (4) **34**, 543-546.

Prioritätsreklamation bezüglich der Arbeit von Somigliana: „Sopra un' estensione della teoria dell' elasticità" (F. d. M. **41**, 883, 1910). Die Arbeit des Verf.: „Weitere Untersuchungen über die Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen unter der Annahme eines kontinuierlichen Weltäthers" (F. d. M. **39**, 906, 1908) enthält die betreffende Herleitung und die Ergebnisse in dem Paragraphen 7: „Das allgemeine elastische Medium". Die Resultate gehen „in verschiedenen Richtungen über die von Somigliana angegebenen hinaus". Lp.

A. KORN. Sur certaines questions qui se rattachent au problème des efforts dans la théorie de l'élasticité. Ann. de Toulouse (3) **2**, 7-18 (1910).

Nachtrag zu der großen Abhandlung aus (2) **10**, 165-269, 1908, derselben Annalen (F. d. M. **39**, 853, 1908). Es werden einige Punkte der dort gegebenen Beweise präzisiert. Lp.

E. ALMANSI. Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi. Nota I. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 705-714.

Während in der Théorie des corps déformables von E. u. F. Cosserat (F. d. M. **40**, 862, 1909) die endlichen Deformationen eines beliebigen Körpers in größter Allgemeinheit behandelt sind, beschränkt sich der Verf. auf isotrope Körper und gelangt für sie zunächst zu den folgenden Sätzen: Für jeden Punkt P gibt es drei rechtwinklige Achsen (Hauptrichtungen) r_1, r_2, r_3, denen Nullverzerrungen μ entsprechen, oder drei Achsen, die auch vor der Deformation

rechtwinklig waren. Nennt man die Verlängerungen bezüglich dieser drei Achsen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (Hauptverlängerungen ε), so erhält man für zwei beliebige Richtungen r, r', deren Richtungskosinus in bezug auf r_1, r_2, r_3 mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ bezeichnet werden, $\varepsilon_{rr'} = \omega_1\omega_1'\varepsilon_1 + \omega_2\omega_2'\varepsilon_2 + \omega_3\omega_3'\varepsilon_3$ und beim Zusammenfallen beider Richtungen: $\varepsilon = \omega_1^2\varepsilon_1 + \omega_2^2\varepsilon_2 + \omega_3^2\varepsilon_3$. Jede isotrope Funktion der sechs Größen $\varepsilon_{xx}, \ldots, \varepsilon_{yz}, \ldots$ wird eine Funktion der drei Fundamentalinvarianten $\xi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\eta = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2$, $\zeta = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$. Ist θ die kubische Dilatation, während a_1, a_2, a_3 die Hauptverlängerungen der Einheit sind, so ist $1 + \theta = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)$. Man setze $\varphi = (1 + \theta)V$, wo V das elastische Potential ist, so gewinnt der Verf. zuletzt für die Hauptspannungen die Formeln:

$$\tau_1 = \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)}\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}, \quad \tau_2 = \frac{1}{(1+a_3)(1+a_1)}\frac{\partial\varphi}{\partial a_2},$$

$$\tau_3 = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\frac{\partial\varphi}{\partial a_3},$$

die er für neu hält. Lp.

E. Almansi. Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi. Nota II. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 89-95.

Die am Schlusse des vorstehenden Referates angegebenen Formeln für τ_1, τ_2, τ_3, welche, falls $\varphi(a_1, a_2, a_3)$ als bekannt vorausgesetzt wird, die drei Hauptspannungen mittels der drei Hauptverlängerungen ausdrücken, ermöglichen die Anstellung einer Betrachtung über den Zahlwert einer der Konstanten der Isotropie; dies geschieht in den ersten drei Paragraphen. Wenn, wie in der gewöhnlichen Theorie, die Normalspannungen in den Hauptrichtungen durch die Formeln $\tau_1 = A\{a_1 + k(a_2 + a_3)\}$ usw. angegeben werden, so folgt aus jenen obigen Formeln $k = \frac{1}{2}$ und die Poissonsche Konstante $\lambda = k/(k+1) = \frac{1}{3}$. Es werden aber auch noch andere Annahmen über die Funktion φ diskutiert. — Über die positive oder negative Verlängerung eines zylindrischen Stabes und die zugehörige seitliche Kontraktion oder Dilatation unter der Einwirkung von Spannungen auf die Endflächen in der Richtung der Zylinderachse sind zahlreiche Versuche angestellt worden. In § 4 der Arbeit wird die Form der Funktion φ so bestimmt, daß sie den Ergebnissen jener Versuche entspricht. Lp.

E. Almansi. Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi. Nota III. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 289-296.

Wenn ein isotroper elastischer Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte deformiert ist, so werden in einem beliebigen seiner Punkte die drei Hauptspannungen als Funktionen der drei Hauptverlängerungen a_1, a_2, a_3 durch die Formeln ausgedrückt:

$$(1) \qquad \tau_1 = \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)}\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}, \quad \text{usw.},$$

wo φ das Einheitspotential der Elastizität ausdrückt. Die speziellen Spannungskomponenten werden dann durch die Formeln gegeben:

$$(2) \quad \tau_{xx} = \alpha_1^2 \tau_1 + \alpha_2^2 \tau_2 + \alpha_3^2 \tau_3, \ldots, \tau_{yz} = \beta_1 \gamma_1 \tau_1 + \beta_2 \gamma_2 \tau_2 + \beta_3 \gamma_3 \tau_3, \ldots,$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Kosinus der Hauptrichtungen in bezug auf die Koordinatenachsen sind. Der Verf. transformiert die vorstehenden Gleichungen so, daß bei gegebener Deformation des Körpers und unter der Voraussetzung der Kenntnis der Funktion φ die Spannungen berechnet werden können, ohne daß man auf die Bestimmung der Hauptrichtungen zurückgreift. Allgemeiner: wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ die Kosinus zweier Richtungen r und r' sind, so untersucht er die Größe $\tau_{rr'} = \omega_1 \omega_1' \tau_1 + \omega_2 \omega_2' \tau_2 + \omega_3 \omega_3' \tau_3$, von der die $\tau_{xx}, \ldots, \tau_{yz}, \ldots$ nur spezielle Werte sind. Lp.

E. ALMANSI. Sul concetto di deformazione derivata applicato allo studio delle deformazioni dei solidi cilindrici. Nuovo Cimento (6) **1**, 269-262; **2**, 93-100.

Unter der abgeleiteten Deformation versteht der Verf. eine Deformation, deren sechs Komponenten die Abgeleiteten von den sechs Komponenten der vorgelegten Deformation nach einem bestimmten Parameter sind. Dieser Begriff erweist sich besonders zweckmäßig, wenn es sich um einen zylindrischen Körper handelt und deshalb eine Koordinate z, welche in die Achsenrichtung des Zylinders fällt, besonders ausgezeichnet ist; nach ihr wird dann die Ableitung genommen. Diese läßt sich speziell für die Bestimmung der Deformation verwerten, die eintritt, wenn nur die Endflächen des Zylinders, nicht aber seine Mantelfläche und sein Inneres von äußeren Kräften angegriffen werden. Eine allgemeine Lösung des Problems läßt sich nur angeben, wenn (wie es z. B. bei einem elastischen Draht oder Faden der Fall ist) die Querdimensionen sehr gering gegen die Längsdimensionen sind. Man findet dann eine angenäherte Lösung, indem man die Voraussetzung zugrunde legt, daß in Punkten, die weit genug von den Enden entfernt sind, der Deformationszustand des Zylinders nur von der Dyname des auf eine Endfläche wirkenden Kräftesystems abhängt. Tdg.

M. PANETTI. L'ellisse di elasticità delle verghe incurvate ad arco di cerchio e le sue applicazioni al calcolo dei regolatori Lentz. Torino Atti **46**, 988-1003.

In dem Aufsatze wird die Elastizitätsellipse eines kreisbogenförmigen Stabes von konstantem Querschnitt bestimmt und auf die Untersuchung der Wirkungsweise der Feder eines Lentzschen Regulators, die diese Form hat, angewendet. Tdg.

C. L. RICCI. L'ellisse di elasticità trasversale e le sue applicazioni nella scienza delle costruzioni. Torino Atti **46**, 203-205.

Nach dem an dieser Stelle von C. Guidi erstatteten Bericht über die Abhandlung von Ricci wird sie in den Memorie der Turiner Akademie erscheinen. Lp.

C. L. Ricci. Relazioni tra le forze e gli spostamenti per un sistema rigido soggetto a legami elastici. Torino Atti **46**, 789-823.

Wenn ein elastischer Körper in einen starren Körper eingespannt ist, so übt er auf diesen Kräfte aus, unter deren Einwirkung der starre Körper eine bestimmte Verschiebung erleidet; die Untersuchung des allgemeinen Zusammenhanges zwischen dieser Verschiebung und dem sie hervorrufenden Kräftesystem bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Die Untersuchung wird gegründet auf die Ballsche Schraubentheorie, in welcher die durch ein System von Momentankräften und der zugehörigen (unendlich kleinen) Verschiebung bestimmten Schrauben und ihre Abhängigkeit voneinander eine Hauptrolle spielen. Die benutzte Methode ist eine algebraisch geometrische, wobei u. a. zwei quadratische Strahlenkomplexe auftreten; der eine von diesen wird gebildet durch die Wirkungslinien derjenigen Kräfte, die eine bloße Drehung des starren Körpers hervorrufen, und der andere durch die Achsen dieser Drehungen. In besonderen Fällen werden diese beiden Komplexe tetraedrale. Im allgemeinen Falle lassen sich durch die Wahl eines besonderen Bezugssystems die Ausdrücke bedeutend vereinfachen. Die Arbeit schließt mit der Betrachtung einer „Kette" von elastischen Körpern, deren (starr gedachte) Endflächen paarweise zusammenfallen. Tdg.

U. Crudeli. Sopra le deformazioni finite. Le equazioni del De Saint-Venant. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_2$, 306-308.

U. Crudeli. Sulle equazioni del De Saint-Venant relative alle deformazioni finite. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_2$, 470.

Die Untersuchung der De Saint-Venantschen Relationen für endliche Deformationen wurde von O. Manville in der Abhandlung „Sur la déformation finie d'un milieu continu" durchgeführt (Mém. Soc. Bordeaux 1904, 83-162; F. d. M. **34**, 844-845, 1903). Marcolongo hat ihnen in der Arbeit „Le formule del Saint-Venant per le deformazioni finite" eine recht elegante Form gegeben (F. d. M. **36**, 855, 1905). Der Verf. der vorliegenden Note hält aber die Methoden seiner Vorgänger für zu künstlich und zu wenig aus der Natur des Gegenstandes geschöpft. Er gibt auf wenigen Seiten eine Herleitung, welche jene Relationen als einfachen Sonderfall in der Theorie der äquivalenten quadratischen Differentialformeln nachweist; diese Theorie verschafft den Gleichungen eine einfache und elegante Form. Lp.

U. Crudeli. Contributo allo studio delle tensioni elastiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 207-212, 394-400.

Der Artikel knüpft an die Arbeiten von Lauricella in Rom. Acc. L. Rend. (5) **15** an (F. d. M. **37**, 827, 1906), in denen die Verrückungen an der

Oberfläche gegeben waren. Ein ganz entsprechendes Verfahren versagt bei der Lösung des elastischen Gleichgewichts, wenn auf der Oberfläche die Spannungen statt der Verrückungen gegeben sind; dieses Problem müßte aber gewissermaßen einen Vergleich zulassen mit dem, eine harmonische Funktion zu konstruieren, welche auf dem Rande eine gegebene normale Derivierte hat. Hieraus ergibt sich die Wichtigkeit der Erkenntnis, ob sich ein System charakteristischer Spannungen konstruieren läßt, das auf σ irgendeine, sagen wir also, bedeutungsvolle Vergleichung zwischen der Komponente der Spannung nach einer gegebenen Richtung und der Derivierten von $1/r$ nach derselben Richtung gestattet. In der gegenwärtigen Arbeit wird nun wirklich in dem Körper, der den angenommenen Raum S einnimmt, ein System charakteristischer Spannungen konstruiert, welches auf der Oberfläche σ eine Spannung hervorruft, deren Komponente nach der Normale zu σ in dem Punkte (x, y, z) auf σ selbst für $x = \xi$, $y = \eta, z = \zeta$ unendlich von der ersten Ordnung wird in bezug auf $1/r$, und zwar unabhängig von dem konstruktiven Achsensystem. Die formelreichen Rechnungen dienen zur Verifikation der unter dem gekennzeichneten Gesichtspunkte aufgestellten Formeln. Als Anwendung des Systems von Spannungen, das auf diese Weise ermittelt ist, wird zuletzt die Aufgabe gelöst: In dem Raume S ein System charakteristischer Spannungen entsprechend einer angegebenen kubischen Dilatation θ zu konstruieren. Lp.

R. A. Houstoun. A relation between tension and torsion. Phil. Mag. (6) **22**, 740-741.

Ein Draht hänge vertikal; sein oberes Ende sei befestigt, und sein unteres Ende werde durch eine vertikal abwärts wirkende streckende Kraft F und durch ein Kräftepaar L angegriffen. Ist x seine Verlängerung und θ der Windungswinkel am unteren Ende, so besteht die Gleichung $\partial\theta/\partial F = \partial x/\partial L$, wie der Verf. beweist. Lp.

J. Le Roux. Étude géométrique de la torsion et de la flexion dans la déformation infinitésimale d'un milieu continu. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **28**, 523-579.

„Barré de Saint-Venant hat in seinen berühmten Abhandlungen über die Torsion und die Biegung besonders den Standpunkt der Statik festgehalten, als er die Deformationen aufsuchte, die aus gewissen Kräfteverteilungen folgen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist ein ganz anderes. Ich befasse mich allein mit dem geometrischen Studium der Deformationen ohne irgendwelche Rücksicht auf Statik oder Dynamik. Die Torsion und die Biegung existieren nicht bei der homogenen Deformation. Ihre analytische Darstellung in der Umgebung eines Punktes hängt von den zweiten Derivierten der Verrückungen ab. Differentialelemente zweiter Ordnung sind es also, deren Rolle vielleicht mit derjenigen der Krümmung in der Theorie der Oberflächen zu vergleichen ist. Die Dilatation und die mittlere Rotation sind dagegen Elemente erster Ordnung wie die Tangentialebene und das Linienelement in der Geometrie. Mich hat bedünkt, daß die Kenntnis der notwendigen Gesetze

in der Verteilung der Deformationen zweiter Ordnung eine ebenso nützliche Einleitung in das Studium der Mechanik der kontinuierlichen Medien sein dürfte wie die Kenntnis der Krümmungselemente für das Studium der Punktmechanik. Zum Überfluß hat sich herausgestellt, daß diese Theorie neben ihrem praktischen Nutzen ein eigenes Interesse in der einfachen Art besitzt, wie die Resultate sich gruppieren und beiordnen. Ich habe vornehmlich die infinitesimalen Deformationen im Auge gehabt; aber die meisten Rechnungen und Methoden lassen sich auch ohne große Wandlungen auf den Fall endlicher Deformationen anwenden."

I. Die Torsion. 1. Definition und Berechnung der Torsion. 2. Die Torsion bei den infinitesimalen Deformationen. 3. Ausdruck für die sechs Komponenten der Torsion. 4. Zerlegung der derivierten Rotation. 5. Indikatrix der Torsionen. 6. Zweite Definition. 7. Anwendung auf das de Saint-Venantsche Problem.

II. Verkrümmung und Biegung. 8. Verkrümmung der Fasern. 9. Die figürliche Rotation der Krümmung. 10. Zerlegung der Kurve. 11. Definition der Biegung. 12. Auf die Biegung bezügliche geometrische Elemente. 13. Zusammensetzung der Biegungen. 14. Abschweifung auf eine Transformation durch reziproke Radien für die Zusammensetzung der Vektoren. 15. Die Biegung, als Rotation einer Rotation betrachtet. 16. Erste Zerlegung. 17. Torsionsbiegung und zyklische Biegung. 18. Komponenten der zyklischen Biegung. 19. Die drei Grundformen. 20. Die drei unabhängigen Biegungen. 21. Bemerkung. 22. Neue Gestalt einiger Formeln.

III. Spezielle Eigenschaften der verschiedenen Biegungen. 23. Ermittlung der Torsionsbiegung. 24. Mittelpunktsfläche bei der Torsionsbiegung. 25. Die zyklische Biegung. 26. Biegung zweiter Dilatation. 27. Die sieben Inflexionslinien. 28. Mittlere Biegung. 29. Deformationen ohne Torsion. 30. Homogene zyklische Biegung. 31. Ebene Biegung des de Saint-Venantschen Problems.

IV. Verbiegung der Oberfläche. 32. Normale Biegung und geodätische Biegung. 33. Studien der normalen Biegung. 34. Komponenten der normalen Biegung. 35. Charakteristische Ebenen einer Faser. 36. Brennpunkte der Achsenkongruenz. 37. Totale Normalverkrümmung. 38. Geodätische Biegung. 39. Ebenen, für welche die geodätische Biegung durch Rotation Null ist. 40. Auf die Biegung durch Rotation bezügliche Inflexionslinien. 41. Anwendung auf ein Problem von Darboux und von Weingarten. Lp.

J. Le Roux. Sur les covariants fondamentaux du second ordre dans la déformation finie d'un milieu continu. C. R. **152**, 1002-1005.

Der Verf. führt gewisse Größen $a_{ij1}, a_{ij2}, a_{ij3}$ mit drei Indizes ein, deren 54 partielle Differentialquotienten 27 Gleichungen befriedigen, die sich aber vermöge einiger Identitäten auf 24 reduzieren. Dann wird gezeigt, wie man unter Verwendung jener Größen die endliche Deformation eines Körpers finden kann. Lp.

J. Le Roux. Sur l'incurvation et la flexion dans les déformations finies. C. R. **152**, 1655-1657.

In einer Note über die fundamentalen Kovarianten (Referat vorstehend) hat der Verf. die Koeffizienten und die algebraischen Formen definiert, die in dem Ausdrucke der Eigenschaften zweiter Ordnung bei den endlichen Deformationen auftreten. Jetzt wendet er dieselben Betrachtungen auf die Untersuchung der Verkrümmung (incurvation) an. Aus der Form der erhaltenen Ausdrücke ergibt sich unmittelbar, daß die gesamte Biegung (flexion) einer Elementarfaser sich in drei Biegungen zerlegt, die den drei fundamentalen Kovarianten zweiter Ordnung entsprechen. Zuletzt wird auch eine Gleichung mitgeteilt, welche in einfacher Gestalt die Ausdrücke für die verschiedenen Komponenten der Normalkrümmung auf der deformierten Oberfläche gibt.
Lp.

A. Emch. The differential equation of normal stresses in a plane. Arch. der Math. u. Phys. (3) 18, 316-322.

Die Spannungen um einen Punkt (x_1, y_1) eines ebenen Feldes herum sind bekannt, wenn die Spannungen, die zwei beliebige Schnitte durch den Punkt beanspruchen, bekannt sind. Die nähere Betrachtung führt auf das System orthogonaler Trajektorien, welche die Kurven normaler Spannungen darstellen. Zweck des vorliegenden Artikels ist, diejenigen dieser Kurven zu bestimmen, die, als vollkommen biegsam und von konstanter Länge betrachtet, unter der alleinigen Einwirkung der normalen Spannungen im Gleichgewicht bleiben. Die Differentialgleichung dieser Kurven wird aufgestellt und für das Feld gelöst, das durch die Druckkräfte einer Flüssigkeit gegen eine vertikale Ebene gebildet wird. Die Lösung führt auf elliptische Funktionen. Lp.

Coker. The effects of holes and semicircular notches on the distribution of stress in tension members. Phys. Soc. London, Nov. 10, 1911. [Nature 88, 164.]

Der Verf. berichtet über optische Untersuchungen an durchsichtigen Platten mit Ausschnitten, wenn durch äußere Kräfte Spannungen in den Platten erzeugt werden. Die ermittelten Werte wurden zum Teil mit Formeln verglichen, die in theoretischen Arbeiten aufgestellt sind, zum Teil wurden sie durch empirische Formeln dargestellt. Lp.

R. F. Gwyther. The conditions that the stresses in a heavy body should be purely elastic stresses. Manchester Mem. and Proc. 55, Nr. XX, 12 S.

Zuerst führt der Verf. statt der gebräuchlichen Zeichen der Elastizitätstheorie eine Reihe neuer Bezeichnungen ein. Der Zweck seiner Betrachtungen geht aus folgender Stelle der „allgemeinen Prinzipien“ hervor: „Die Elemente einer Spannung (stress) unterliegen drei statischen Bedingungen. Wenn die Spannung rein elastisch ist, so unterliegen ihre Elemente sechs weiteren Differentialbedingungen. Hieraus ist zu entnehmen, daß die Annahme, die

Spannung in einem schweren Körper sei rein elastisch, beträchtliche Annahmen in sich schließt, aber eine Abschätzung durch bekannte Formeln ermöglicht.“ Nach Untersuchung der Spannungen in einer sphärischen Schale und der Spannung in einem langen, schweren zylindrischen Kreisrohre, das horizontal unterstützt wird, kommt der Verf. zu dem Schlusse, daß die Spannungen in einem schweren Körper vernünftigerweise nicht als elastische Spannungen angenommen werden können, daß die erforderlichen Bedingungen für elastische Verhältnisse sehr scharf sind, und daß in den von ihm untersuchten Fällen die Spannungen diesen Bedingungen nicht genügen. In dem Falle der Erde, der großes Interesse bietet, machen es die Größen der Spannungen besonders dringlich, daß die Annahme, die Spannungen seien elastisch, nicht ohne eine sehr gründliche Prüfung zugelassen werden sollte. Lp.

R. F. Gwyther. On the stresses in a heavy spherical shell. Phil. Mag. (6) **22**, 191-193.

Der Artikel ist ein Teil der Abhandlung des Verf. aus Mem. and Proc. Manchester Soc. **55**, Nr. XX (Referat vorstehend).

„Kurz ausgedrückt, bezweckt die Abhandlung den Nachweis, daß die formelle Lösung des statischen Spannungszustandes in einem schweren Körper von vorgegebener Gestalt in gewissen Fällen bestimmbar ist; daß in einem solchen Körper die Bestimmung des statischen Spannungszustandes jeder Untersuchung der elastischen Spannung vorangehen muß, und daß, wenn der statische Spannungszustand nicht den Bedingungen für die Existenz eines rein elastischen genügt, die Bedingungen für den elastischen Zustand des Körpers zu modifizieren sind, so daß sie mit den statischen Bedingungen übereinkommen. — Hier soll nur die formelle Lösung bei einer schweren Kugelschale oder Kugel gegeben werden.“ Lp.

P. Fillunger. Die Spannungsverteilung im geraden Kreiskegel, hervorgerufen durch eine Einzelkraft von beliebiger Richtung und Lage. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 391-409.

Zunächst wird für den Spannungszustand eines Kreiskegels, in dessen Spitze allein eine Einzelkraft und ein Kräftepaar angreift, durch Ähnlichkeitsbetrachtungen nachgewiesen, daß alle durch die Einzelkraft entstandenen Spannungen umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung, durch das Kräftepaar entstanden, umgekehrt mit der dritten Potenz der Entfernung des betreffenden Flächenelementes von der Spitze abnehmen. Infolgedessen kann das Problem auf je eine partielle Differentialgleichung mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen zurückgeführt werden, deren Integration in sehr einfacher Form möglich ist. Die Ergebnisse werden zum Schluß angewendet auf die Spannungsverteilung im Querschnitt eines geraden Stabes von kreisförmigem Querschnitt, der als Kegel vom Öffnungswinkel 0 aufgefaßt wird. Voraussetzung

bei allen diesen Spannungszuständen sind jedoch ganz bestimmte Oberflächenspannungen in der festgehaltenen Basisfläche, ähnlich wie bei der St.-Venantschen semi-inversen Methode. Rr.

E. N. da C. Andrade. The distribution of slide in a right six-face subject to pure shear. London Roy. Soc. Proc. (A) 85, 448-461.

Mit Rücksicht auf die Frage der Schubwirkung des Wasserdrucks gegen Kanalwände hat der Verf. die Aufgabe für ein rechtwinkliges Parallelepiped experimentell und analytisch behandelt. Zwei parallele Gegenseiten desselben werden gleichmäßigen Beanspruchungen in ihren Ebenen, aber mit entgegengesetzten Richtungen unterworfen; die vier andern Seiten bleiben frei. Die Versuche wurden an Körpern aus Gallerte ausgeführt und messend verfolgt. Die Resultate werden am Schlusse wie folgt zusammengefaßt.

1. Die bisher angenommene parabolische Verteilung gibt nicht einmal eine angenähert korrekte Darstellung.

2. Sowohl experimentell, als auch theoretisch wird die Verteilung des Schubes durch ein Kurve gegeben, die zwei Maxima in etwa einem Sechstel Spannweite vom Ende hat und ein Minimum in der Mitte. Für praktische Zwecke kann ein Schub vom Zweifachen des Mittelschubes in ungefähr einem Sechstel und fünf Sechsteln der Breite am Mittelquerschnitt als die wahrscheinlich sichere Grenze für den Maximalschub gelten in dem Falle von Blöcken mit angenähert solchem Verhältnis von Länge und Breite wie bei dem vorliegenden.

3. Sekundäre Maxima sind sowohl experimentell, als auch analytisch angedeutet. Auf solche sekundären Maxima in dem Schub ist in dem Werke von Pearson und Pollard schon hingewiesen („An experimental study of the stresses in masonry dams". Drapers' Company Research Memoirs. II, IV).

4. Das Versagen der parabolischen Schubverteilung, welche die lineare Verteilung normaler Spannungen bedingt und von ihr bedingt wird, zeigt, wie unangemessen die gewöhnliche Ingenieurtheorie sowohl von Dämmen, als von Widerlagern ist, um den experimentellen sowie den theoretischen Forderungen der Elastizitätswissenschaft zu genügen.

5. Während Lösungen in Funktionen, die von den Wurzeln n der transzendenten Gleichung $\mathfrak{Sin}\, 2na = 2na$ abhängen, so gemacht werden können, daß sie Zahlergebnisse liefern, die in gewissem Grade mit dem Versuche stimmen, scheint es gegenwärtig zweifelhaft, ob sie geeignet sind, eine vollständige und befriedigende Lösung des Problems zu geben, wenn sowohl $\widehat{xx}$ als auch $\widehat{xy}$ bekannte Werte auf zwei Gegenflächen haben müssen. Lp.

L. F. Richardson. The approximate arithmetic solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. Lond. Phil. Trans. (A) **210**, 307-357.

Entwicklung einer speziellen Methode zur Berechnung des Druckes, der in jedem Flächenelement des Querschnittes eines Steindamms von dem angestauten Wasser ausgeübt wird, und ebenso in der Richtung senkrecht dazu.
Br.

L. Giuganino. Alcune formole analoghe a quelle del Volterra nella teoria delle distorsioni elastiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 909-914.

In seinen Abhandlungen der Rom. Acc. L. Rend. (F. d. M. **36**, 856 ff., 1905; **37**, 828, 1906) hat Volterra eine Formel gegeben, welche mit Hülfe von Quadraturen die Komponenten der Verrückungen eines isotropen elastischen Körpers ausdrückt, wenn die sechs Charakteristiken der Deformation bekannt sind, d. h. die drei linearen Dilatationen und die drei Verzerrungen. Auf Grund dieser Formel machte er die Bemerkung, daß in einem Körper mit vielfachem Zusammenhange jene Charakteristiken monodrome Funktionen der Koordinaten sein können (reguläre Deformation), während die Komponenten der Verrückung polydrom sind. Daraus leitete er beachtenswerte Eigenschaften des elastischen Gleichgewichtes der Körper mit vielfachem Zusammenhange ab.

In der vorliegenden Note stellt der Verf. in viel einfacherer Weise eine in gewissem Sinne analoge Formel auf; sie drückt die Komponenten der Verrückung mittels der Komponenten der elementaren Rotation und dreier harmonischen Funktionen aus, welche durch die Randbedingungen bestimmt sind. Diese sechs Funktionen, welche in den einfach zusammenhängenden Körpern notwendig monodrom sind, können in den mehrfach zusammenhängenden Körpern polydrom sein, ohne daß sie die Deformationskomponenten sind. Auf diese Weise erhält man Relationen, welche auf die elastischen Körper diejenigen ausdehnen, die in der theoretischen Mechanik die Verrückung eines starren Körpers als Funktion der Rotation und der Translation ausdrücken. Lp.

O. Tedone. Sulla torsione di un cilindro di rotazione. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 617-622.

Der homogen angenommene Zylinder habe die Länge h und den Basisradius R; als Koordinatenanfang sei das Zentrum der einen Basis gewählt, die in das Innere des Zylinders gerichtete Achse als z-Achse. Für x und y hat man dann in Zylinderkoordinaten $x = l\cos\psi$, $y = l\sin\psi$. Die behandelten Fragen beziehen sich auf das Gleichgewicht, wenn auf der Mantelfläche und auf den Grundflächen die Verrückungen oder die Spannungen unter den Formen gegeben sind:

$$(2) \qquad u = -u_\psi \sin\psi, \quad v = u_\psi \cos\psi, \quad w = 0;$$

$$(3) \qquad L = -T_\psi \sin\psi, \; M = T_\psi \cos\psi, \; N = 0.$$

Hierbei werden u_ψ und T_ψ als Funktionen von z allein auf dem Mantel, von l allein auf den beiden Grundflächen vorgenommen. Unter diesen Voraussetzungen haben die Verrückungen u, v, w die Form (2) auch in den inneren

Punkten des Zylinders, wo u_ψ eine passend zu bestimmende Funktion von l und z ist, und zwar findet der Verf. in den beiden betrachteten Fällen:

$$(8) \qquad u_\psi = \frac{A}{\mu} lz + R\Sigma_i \frac{A_i}{k_i} J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right) \frac{\mathfrak{Sin}\left(k_i \frac{z}{R}\right)}{\mathfrak{Cof}\left(k_i \frac{h}{R}\right)},$$

$$(8') \qquad u_\psi = R\Sigma_i \frac{A_i}{k_i} J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right) \frac{\mathfrak{Cof}\left(k_i \frac{z}{R}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(k_i \frac{h}{R}\right)},$$

wo $J_1(x)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung und erster Art ist, die A_i, k_i, μ gewisse Konstanten sind. Hieraus ergibt sich eine Verallgemeinerung der Coulombschen Formel. Lp.

U. Cisotti. Deformazione di una sfera elastica dovuta al suo moto in seno ad un liquido. Nuovo Cimento (6) 2, 375-386.

Eine elastische Kugel vom Radius R, die sich in einer Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit V geradlinig bewegt, erleidet eine Verkürzung in der Bewegungsrichtung und wird zu einem Drehellipsoid. Der Äquatorialradius erfährt eine Verlängerung, die für die Längeneinheit den Wert hat:

$$\varepsilon_e = \frac{9(7-5\sigma-8\sigma^2)V^2}{8(7+5\sigma)E},$$

der Polarradius eine Verkürzung für die Längeneinheit

$$\varepsilon_p = \frac{9(2+\sigma)V^2}{2(7+5\sigma)E},$$

wo E der Youngsche Modul, σ der Poissonsche Koeffizient $(-1 < \sigma \lesseqgtr \frac{1}{2})$ ist. Die Einheit des Volumens wird vergrößert um

$$\delta = \frac{9(1-2\sigma)V^2}{4E}.$$

Alle diese Ausdrücke, deren mathematische Herleitung gegeben wird, sind dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Der Fall der Starrheit $(E=\infty)$ gibt das mechanische Bild der Abrahamschen Elektrone. Für $\sigma = \frac{1}{2}$ (Unzusammendrückbarkeit) liefern die vorstehenden Ausdrücke:

$$\varepsilon_e = \frac{45}{152}\frac{V^2}{E}, \quad \varepsilon_p = \frac{45}{38}\frac{V^2}{E}.$$

Wie bei den Elektronen von Bucherer und Langevin folgt $\delta = 0$. Dagegen stimmen die Ergebnisse nicht für das mechanische Modell der Lo-

rentzschen Elektronen. Denn $\varepsilon_e = 0$ bedingt $8\sigma^2 + 5\sigma - 7 = 0$, und die Wurzeln dieser Gleichung für σ liegen nicht innerhalb der für σ geltenden Grenzen. Lp.

E. Daniele. Sul problema dell' equilibrio elastico nello spazio esterno ad un ellisoide per dati spostamenti in superficie. Nuovo Cimento (6) **1**, 211-229.

Die von dem Verf. benutzte Methode zur Lösung der Aufgabe ist vorgebildet in den Abhandlungen von Oberbeck ((J. für Math. **81**, 62-80; F. d. M. **7**, 582, 1875) und Stuart (Lond. Math. Soc. Proc. **33**, 342-360; F. d. M. **32**, 767, 1901). Die von diesen beiden Forschern eingeführten Potentialfunktionen sind nichts anderes als die beiden ersten Funktionen U_n, welche Morera bei seinen Arbeiten über die Attraktion der Ellipsoide eingeführt hat (vgl. F. d. M. **36**, 831, 1905). Hiernach war zu vermuten, daß die Lösung des Problems für den Außenraum des Ellipsoids bei Verrückungen an der Oberfläche, die durch Polynome beliebiger Ordnung in den Koordinaten dargestellt werden, sich durch jene U_n bewerkstelligen läßt. Das wird in der gegenwärtigen Arbeit für den Fall durchgeführt, daß die Komponenten der Verrückung an der Oberfläche als ganz beliebige lineare Polynome gegeben sind. Im § 1 werden die drei Komponenten u, v, w als konstant angenommen, im § 2 als homogene Polynome ersten Grades. Im § 3 wird angenommen, daß das Ellipsoid eine Torsion um die x-Achse erfährt, also $u = 0$, $v = -\omega xz$, $w = \omega xy$. Lp.

Th. Annycke. Contribution à l'étude thermomécanique des tiges et des plaques. Journ. de Math. (6) **7**, 241-315.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, unter dem thermomechanischen Gesichtspunkte das Studium der Stäbe und Platten wieder aufzunehmen, mit dem Boussinesq sich in zwei Abhandlungen desselben Journals beschäftigt hat (F. d. M. **3**, 503, 1871 u. **11**, 706, 1879). Damals wurden in aller Strenge die Prinzipien behandelt, welche die Ingenieure ihren Theorien über den Widerstand der Materialien zugrunde legen.

Die Schrift, die Thèse des Verf., umfaßt zwei Teile. In dem ersten, der sich mit den Stäben befaßt, wird zuerst die Heterogenität der Fasern berücksichtigt, die oft nahe bei der Achse anders beschaffen sind als in der Umgebung der Oberfläche; die einzige über ihre Beschaffenheit gemachte Hypothese ist die Symmetrie der Struktur in bezug auf die Querschnitte. Der Standpunkt ist also allgemeiner als bei L. Roy (F. d. M. **41**, 1003, 1910) und umfaßt beispielsweise auch das thermomechanische Studium der blätterigen Körper und der hölzernen Balken, die nicht in die Kategorie der homogenen und isotropen Körper eingestellt werden können. Ohne dann auf die Prinzipien der Energetik zurückzugreifen, aber unter der Annahme, daß bei allen betrachteten Temperaturen für jeden einzelnen Abschnitt des Stabes ein natürlicher Zustand existiert, wird übrigens ganz anschaulich bewiesen, daß man, abgesehen von gewissen Ausnahmebereichen, in erster Annäherung die Gleichförmigkeit der Temperatur in der ganzen Ausdehnung eines beliebigen Abschnittes annehmen kann und

daher auf ihn im Zeitpunkte t die gewöhnlichen Elastizitätsgleichungen anwenden darf, aber unter der Bedingung, daß die Verrückungen und Deformationen von dem zur Temperatur θ gehörigen natürlichen Zustande an gerechnet werden.

Nunmehr wird die Temperatur explizit in die Gleichungen eingeführt; hierbei wird als Vergleichsstand nicht mehr der auf eine beliebige Temperatur θ bezügliche natürliche Zustand gewählt, sondern derjenige, welcher der besonderen Temperatur $\theta = 0$ entspricht. Dann wird gezeigt, daß die Temperatur immer auf die Ausdehnungs- oder die Kompressionsarbeit Einfluß hat, daß die Biegungs- und Schubmomente von ihr nur in dem Falle abhängen, bei welchem die thermischen Eigenschaften der Längsfasern variabel sind, daß das Torsionskräftepaar unabhängig ist. Dementsprechend kommt die Untersuchung zu analogen Schlüssen in bezug auf die longitudinalen, transversalen und Torsionsschwingungen.

Der erste Teil schließt mit der Ermittlung der vibrierenden Längsverrückungen eines isotropen Stabes mit für die Wärme undurchlässigen Enden. Von seinen beiden Hälften wird die eine anfänglich erwärmt, die andere abgekühlt; dann setzen sie sich allmählich miteinander und mit der auf der Temperatur 0 gehaltenen umgebenden Luft in thermisches Gleichgewicht. Hierbei ergibt sich, daß eine einfache Differentiation der vom Verf. erhaltenen Resultate seines Problems es ermöglicht, die des entsprechenden Problems von L. Roy in seiner Thèse herzuleiten. Schließlich werden mit Hülfe geeigneter numerischer Anwendungen die Phasen der Abkühlungserscheinung diskutiert; die Betrachtung verweilt besonders bei den Bedingungen, die erforderlich sind, damit die Vibrationen kalorischen Ursprunges einen wahrnehmbaren Ton veranlassen.

In dem zweiten Teile wird die anschauliche Methode, die sich bei den Stäben als vorteilhaft erwiesen hat, auf die ebenen elastischen Platten angewandt, unter weiten Hypothesen der Heterotropie und Heterogenität des Materials nach den kleinen Dimensionen des Körpers, d. h. also hier nach der Dicke; aber auch hier wird wiederum die Existenz eines natürlichen Zustandes der Abschnitte bei allen Temperaturen angenommen. Vornehmlich werden hier als besondere Resultate sowohl für die tangentialen, wie auch für die transversalen Verrückungen Gesetze gefunden, die L. Roy selbst bei Beschränkung auf die homogenen und isotropen Platten durch Beanspruchung der Variationsrechnung erhalten hatte, sowie durch hypothetische, von Poisson herrührende und für sehr schnell konvergierend gehaltene Reihenentwicklungen, die sich aber wohl nicht leicht auf Platten von einer minder speziellen Struktur anwenden lassen würden. Lp.

R. v. Mises. Über die Stabilität rotierender Wellen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **22**, 33-52.

Im ersten Teile der Arbeit wird zunächst (§ 1) die Frage nach der Existenz der „kritischen Geschwindigkeiten" mit den Hülfsmitteln, welche die Theorie der Integralgleichungen liefert, allgemein erledigt. Die Formulierung des mechanischen Problems führt unmittelbar auf eine Integralgleichung, während der Differentialgleichungsansatz (§ 2) auf viel weniger anschaulichem Wege erreicht wird. In den Vordergrund wird das Interesse an der tatsächlichen

numerischen Berechnung der Eigenwerte gestellt. Von diesem Gesichtspunkte aus ist besonders der § 2 zu beurteilen, der in der Anwendung der Methode der unendlich vielen Variabeln über das durch Konvergenzbeweise unmittelbar gedeckte Gebiet hinausgeht. Schließlich bringt § 3 den Beweis für ein in der technischen Literatur eingebürgertes graphisches Ermittlungsverfahren, das sich als eine unmittelbare Folgerung aus der Picardschen Methode der sukzessiven Approximationen herausstellt.

Der zweite Teil untersucht die bisher noch wenig geklärte Frage nach der mechanischen Bedeutung der „kritischen Geschwindigkeiten". Indem nach einer kurzen kritischen Betrachtung (§ 4) zwei einfache Fälle auf Grund der vollständigen, durch elliptische Integrale zu lösenden Differentialgleichung behandelt werden, zeigt sich, daß keine der üblichen Auffassungen völlig im Rechte ist. Weder ist die kritische Geschwindigkeit die Stelle der größten Ausbiegungen, noch bedeutet sie in allen Fällen einen Übergang vom labilen in den stabilen Zustand. In dem praktisch wichtigsten Falle der an den Enden unverschiebbar gelagerten Welle kommt der Verf. zu dem Schlusse (§ 6), daß nahe unterhalb des kritischen Punktes ein Übergang aus einer Gleichgewichtslage in eine andere, von der ersten entfernte stattfinden muß, der mit Schwingungen und ähnlichem verbunden sein kann; ein eigentliches Gebiet labilen Gleichgewichts tritt jedoch nicht auf. Lp.

F. B. Pidduck. The stability of rotating shafts. Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 352-359.

Wenn die Umdrehungszeit der rotierenden Teile einer Maschine mit der natürlichen Schwingungsperiode dieser Teile zusammenfällt, so tritt die wohlbekannte Erscheinung des Schleuderns ein, und die zugehörige Umdrehungsgeschwindigkeit ist als die kritische Geschwindigkeit bekannt. Wegen der Einwände gegen die bei der mathematischen Behandlung benutzte Theorie der dünnen Stäbe ist es wünschenswert, eine stengere Bestätigung in dem einfachen Falle des nicht belasteten Wellbaumes mit kreisförmigem Querschnitt zu erhalten. Der Verf. untersucht die Schwingungen nach dem Vorgange der Abhandlung von Pochhammer im J. für Math. **81**, 325-336 (F. d. M. 8, 641, 1876) und faßt die Ergebnisse seiner Untersuchung wie folgt zusammen: „Die behandelten Fälle entsprechen wohldefinierten Vibrationsarten eines nicht rotierenden Stabes; ihre Bearbeitung ist hier bis zu derselben Größenordnung durchgeführt, welche durch die angenäherte Theorie dünner Stäbe erreicht werden würde. Für den zentrisch rotierenden Wellbaum hat die gewöhnliche kritische Geschwindigkeit hiernach keinen Einfluß bei der Verwandlung der Stabilität in Instabilität. Andrerseits ergibt die Analysis zwei andere kritische Geschwindigkeiten, die zahlenmäßig viel größer sind. Sie treten auf, wenn die Zeit stationärer Rotation mit den natürlichen Perioden der Torsionsschwingungen und der longitudinalen Schwingungen um die Ruhelage zusammenfällt, und die letztere Geschwindigkeit beeinflußt die Stabilität der quasiflexionalen, aber nicht der quasilongitudinalen Vibration." Lp.

Fr. Engesser. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Physik. Zs. **12**, 512.

Die richtige Lösung der Frage ist vom Verf. 1895 in der Schweizerischen Bauzeitung **2**, 24 veröffentlicht; danach 1896 im Zentralblatt der Bauverwaltung S. 492, endlich 1898 in der Zs. des Vereins deutscher Ingenieure S. 927. Diese Notizen berichtigen eine Angabe von Kármán in der Physik. Zs. **9**, 136 (F. d. M. **39**, 870, 1908), nach der eine hinfällige Schlußweise des Verf. vom Jahre 1889 unbemerkt geblieben sei. Lp.

R. Lorenz. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder. Physik. Zs. **12**, 241-260.

Unter Hinweisung auf einige bezügliche Arbeiten der jüngsten Zeit (Mallock, F. d. M. **39**, 860, 1908; Timoschenko, F. d. M. **41**, 903-905, 1910) stellt der Verf. die Theorie der nicht achsensymmetrischen Knickung eines dünnwandigen Hohlzylinders auf unter Benutzung der Theorie dünner Platten und Schalen in Loves Lehrbuch der Elastizität. Es werden die Grundgleichungen und die Ausdrücke für die Biegungsmomente abgeleitet; bezüglich der übrigen Entwicklungen wird auf das Love sche Werk verwiesen. Im Anfange werden die Verschiebungen u in Richtung der Achse als klein gegen die Verschiebungen v und w in Richtung des Umfanges und des Radius vernachlässigt; am Schlusse der Entwicklungen wird aber gezeigt, welches Resultat sich ergibt, wenn auf diese Vernachlässigungen verzichtet wird. Endlich ist die Wandstärke $2h$ stets als klein gegen den Durchmesser $2r$ anzusehen. Der Verf. gibt zuletzt selbst folgende Zusammenfassung seiner Untersuchung: „Im Anschluß an die Love sche Theorie dünner Platten und Schalen wurde die nicht achsensymmetrische Knickung dünner Hohlzylinder unter axialem und radialem äußeren Drucke untersucht. Hierbei wurde zunächst von der ersten Näherung der Love schen Theorie ausgegangen, und im Anschluß daran wurden beide Probleme auch in der zweiten Annäherung untersucht. In beiden Fällen ist hierbei die Annahme gemacht worden, daß das Quadrat der Wandstärke als klein gegenüber dem Quadrate des Radius vernachlässigt werden kann. Die Rechnungsergebnisse sind graphisch aufgetragen und im Falle der Rohre unter äußerem Druck mit den bisher vorliegenden Beobachtungswerten verglichen worden." Lp.

G. Colonnetti. I sistemi elastici continui trattati col metodo delle linee d'influenza. Torino Mem. (2) **61**, 177-185.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, das elastische Verhalten der kontinuierlichen Träger mit $n+1$ Stützen allein auf Grund von Seilpolygonen zu untersuchen. Die $n-1$ statisch unbestimmten Auflagerreaktionen erscheinen als die Wurzeln eines Systems von $n-1$ linearen Gleichungen. Die algebraische Auflösung dieser Gleichungen läßt sich durch graphische Methoden ersetzen, die auf der Verwendung der Einflußlinien beruhen, und deren allgemeine Auseinandersetzung den Gegenstand der Arbeit bildet. Tdg.

G. Colonnetti. Le linee d'influenza della trave continua solidale coi suoi piedretti. Torino Atti **46**, 229-242.

In der Abhandlung „I sistemi elastici trattati col metodo delle linee d'influenza" (Referat vorstehend) hat der Verf. stetige elastische Systeme behandelt, die an den Enden irgendwie gefesselt, aber auf Zwischenträgern in der Horizontale einfach gestützt sind. Er zeigte, wie die Untersuchung der Einflußlinie der vertikalen Verrückung eines beliebigen Querschnittes des Balkens oder die Untersuchung der Einflußlinie der Reaktion eines seiner Zwischenträger immer vermöge des Reziprozitätssatzes von Maxwell auf die Aufsuchung des deformierten Balkens hinausläuft, wenn er von passenden und wohlbestimmten Kräften angegriffen wird. Die deformierte Gestalt kann immer als Seilpolygon bestimmter elastischer Gewichte konstruiert werden, die in dem gewöhnlicheren Falle eines kontinuierlichen Balkens mit geradliniger Achse und mit einfach gestützten Enden nichts anderes sind als lineare Kombinationen gewisser elastischer Grundgewichte bezüglich auf denselben Balken, wenn er in passender Weise statisch bestimmt gemacht ist. Solche elastischen Grundgewichte können, ein für allemal berechnet, zur Lösung mannigfacher Probleme dienen, die bei der Bestimmung von hyperstatischen Größen oder von Deformationen entstehen, ohne daß eine weitere Analyse des elastischen Verhaltens vorkommt, entsprechend den mannigfachen Bedingungen der Belastung, denen man es bei der Lösung der besagten Probleme unterworfen denken kann.

Die gegenwärtigen Betrachtungen sollen zeigen, daß jene Resultate einer bemerkenswerten Verallgemeinerung fähig sind; so führt die Anwendung des genialen Theorems von Maxwell zu einer analogen Lösung, auch wenn die Zwischenträger, welche den Balken fesseln, elastisch nicht nur die vertikalen Abweichungen hemmen, sondern auch die Rotationen der im Zusammenhang damit stehenden Querschnitte. — Von dem oben definierten System wird zunächst das elastische Verhalten untersucht, indem auf die allgemeinste Art seine Deformationen bestimmt werden. Dann wird angegeben, wie vorgegangen werden muß, wenn das Problem in einer Untersuchung hyperstatischer Größen besteht. Lp.

G. Colonnetti. Sull' equilibrio elastico dei sistemi reticolari elastici piani. Torino Atti **46**, 450-460.

In früheren Arbeiten hat der Verf. die Erfahrung gemacht, daß sich die Culmannsche Methode in Verbindung mit einer verständigen Anwendung des Reziprozitätssatzes sehr vorteilhaft zur Berechnung der stetigen elastischen Systeme eignet; deshalb versucht er jetzt einen ähnlichen Gebrauch bei der Analyse des elastischen Verhaltens hyperstatischer Systeme, bei denen eine Überzahl von Streben oder von Fesseln vorhanden sind. Er gelangt so zu gewissen Systemen von leicht zu konstruierenden Kreisen, die nach Belieben als Diagramme des Einflusses von Deformationen oder als Diagramme des Einflusses hyperstatischer Größen angesehen werden können und sich zur direkten Berechnung der Werte solcher Größen eignen, die unter der Einwirkung eines Komplexes von willkürlich an den einzelnen Knoten des Systems angebrachten Kräften verschiedener Richtungen angenommen werden. Lp.

H. Keefer. Eine Aufgabe aus der Elastizitätslehre. Math. naturw. Mitt. (2) **13**, 10-28.

Gestalt eines rechteckigen, horizontalen, an dem einen Ende eingespannten, an dem anderen gebogenen Stabes. Das Hookesche Gesetz. Experimentelle Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Lp.

C. Schippers. Calcul des poutres sous charges mobiles verticales. Épure de poutre mobile. Avec Note de Keelhoff. Ann. Assoc. Ingén. Gand (5) **4**, 1-40.

Der Verf. verallgemeinert die von Keelhoff in früheren Aufsätzen erhaltenen Ergebnisse und dehnt sie auf besondere Balken und Bogen aus. Mn. (Lp.)

M. Pilgram. Die Berechnung von Vorholfedern mit Berücksichtigung der Massenbeschleunigungen und Eigenschwingungen. Artill. Monatsh. 1911, Nr. 56, 292-306.

Statt die in den Vorholfedern auftretenden Spannkräfte statisch, d. h. unter Voraussetzung ruhender Belastung, zu berechnen, berücksichtigt der Verf. bei seinen Berechnungen die im Titel angegebenen Umstände und gelangt zu folgenden Schlußworten:

„Die entwickelten Gleichungen ermöglichen es, für jeden Querschnitt und jeden Zeitpunkt des beschleunigten und verzögerten Rücklaufs die Spannkräfte einer Vorholfeder zu berechnen. Nun wird man für die praktische Vorausberechnung von Federn von diesen Untersuchungen, die immerhin ziemlich verwickelt und schwierig sind, kaum Gebrauch machen, zumal eine einwandfreie Methode, aus den Spannkräften nunmehr genau die Verteilung der Spannungen im Querschnitt der Feder und damit die eigentliche Materialbeanspruchung zu ermitteln, einstweilen nicht existiert. Immerhin wird die Methode, wie sie vorstehend entwickelt wurde, von Nutzen sein, wenn es sich darum handelt, besondere Vorkommnisse, d. h. Federbrüche, die mit den üblichen Rechnungsmethoden nicht nachgewiesen werden können, aufzuklären, zumal man in solchen Fällen leicht geneigt sein wird, hierfür die dynamischen Verhältnisse verantwortlich zu machen.“ Lp.

A. Mimey. Notes sur les essais de choc, la perforation par choc, la fragilité. Revue d'Artillerie **78**, 209-249.

Der Verf., ein Hauptmann der Artillerie und Lehrer für den höheren technischen Kursus der Artillerie, gibt in diesem Artikel sowohl theoretische Betrachtungen. als auch Daten über Versuchsergebnisse. Er leitet seinen Aufsatz mit den Sätzen ein: Die Versuche haben bis jetzt über die in dieser Abhandlung betrachteten Fragen nur unvollständige Resultate ergeben, und da die gestellten Aufgaben außerdem recht verwickelt sind, kann man zurzeit sich nicht anmaßen, strenge Lösungen zu geben. In den folgenden Überlegungen und Formeln muß man also nur angenäherte Angaben sehen, dazu bestimmt, eine

Vorstellung von dem Sinn und der Größenordnung der betrachteten Erscheinungen zu geben. Und der Schlußsatz lautet: Das angenäherte Zusammenfallen der Resultate der obigen Theorie mit den Verhältnissen der Wirklichkeit kann bis zu einem gewissen Punkte die dargelegten Überlegungen rechtfertigen. Lp.

L. Hartmann. Sur le mécanisme de la déformation permanente dans les métaux soumis à l'extension. C. R. **152**, 1005-1007.

Beschreibung von Versuchen an Stahlstäben (barrettes) von verhältnismäßig geringer Dicke. Zwei Perioden werden unterschieden. Bei der ersten Periode hebt sich die beim Härten gebildete Oxydschicht, wenn die Elastizitätsgrenze erreicht ist, in regelmäßiger Weise unter Bildung mikroskopischer vierseitiger Pyramiden ab, die ziemlich regelmäßig orientiert sind. Bei der zweiten Periode, die in der Nähe der Maximalbelastung eintritt, erscheinen Streifungen, welche die ganze Oberfläche des Stabes von einem Rande bis zum gegenüberliegenden durchkreuzen. Die Erscheinungen brauchen Zeit, um sich auszubilden, bezeugen also, daß die molekularen Verschiebungen, die durch eine Last von gegebenem Werte hervorgerufen werden, nicht sofort die dieser Last entsprechenden Gleichgewichtslagen erreichen. Lp.

A. Stephenson. On the maintenance of periodic motion by solid friction. Phil. Mag. (6) **21**, 161-165.

A. Stephenson. On a peculiar property of the asymmetric system. Ebenda, S. 166.

„Die Unterhaltung einer periodischen Bewegung durch Reibung fester Körper (wie bei der Schwingungserregung einer Saite durch den Violinbogen) beweist, daß eine derartige Reibung abnimmt, wenn die relative Geschwindigkeit zunimmt, wenigstens innerhalb eines kleinen Bereiches. Wie nun auch die Reibung variieren mag, so gibt es immer eine Gleichgewichtslage, und die kleine Bewegung um sie ist offenbar von dem Typus

$$\ddot{x} + (\varkappa - \lambda)\,\dot{x} + n^2 x = 0,$$

wo λ eine positive Größe ist, proportional der Geschwindigkeit des Wechsels der Reibungskraft bei dem Werte, welcher der relativen Geschwindigkeit, sagen wir v, beim Gleichgewicht entspricht." Die Betrachtung dieser Gleichung und der Folgerungen aus ihr in einzelnen besonderen Fällen für gestrichene Violinsaiten ist der Gegenstand der sehr knapp gehaltenen ersten Note.

Die zweite noch kürzere Notiz beschäftigt sich mit der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \varkappa n \dot{x} + n^2 (1 + x/a) x = b q^2 \cos qt.$$

Als eine Folgerung erscheint zunächst der Satz: „Wenn innerhalb des Moleküls asymmetrische Oszillationen existieren, so würde daraus die Möglichkeit monochromatischer Fluoreszenz mit einer Frequenz der Emission folgen, die halb so groß ist wie die der Inzidenz." Lp.

E. Laura. Sopra una classe generale di vibrazioni dei mezzi isotropi. Torino Atti **46**, 517-538.

Der Verf. sucht die allgemeinste Klasse der Vibrationen zu ermitteln, deren Komponenten vom Typus $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind:

$$u = \Sigma \alpha_i(t)\, u_i(x, y, z),\; v = \Sigma \alpha_i(t)\, v_i(x, y, z),\; w = \Sigma \alpha_i(t)\, w_i(x, y, z).$$

Er erhält dabei einen Typus von Vibrationen, die in einem isotropen Medium bestehen können, und deren Komponenten sind:

$$(1) \quad u = e^{-h^2 t} \cos kt\, (u_0 + u_1 t + \cdots + u_n t^n) + e^{-k^2 t} \sin kt\, (\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_1 t + \cdots + \mathfrak{u}_n t^n)$$

nebst den entsprechenden Formeln für v und w; in diesen Formeln sind die $u_0, u_1, \ldots, \mathfrak{u}_0, \ldots$ Funktionen des Ortes. Die einfachen Vibrationen, aus deren Zusammensetzung jene hervorgehen, sind von den Komponenten $(u_i, v_i, w_i)\, t^i e^{-h^2 t} \cos kt$ und können im allgemeinen für sich nicht bestehen. Sie werden in einem isotropen Medium von Massenkräften und von Oberflächenspannungen erzeugt, die von der Zeit in ähnlicher Weise abhängen wie u, v, w. Die $u_i, v_i, w_i, \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i, \mathfrak{w}_i$ in (1) sind die Lösungen eines Systems von $3(n + 1)$ Gleichungen mit x, y, z als einzigen Veränderlichen.

Das Interesse der Einführung solcher Vibrationen liegt noch in der Tatsache, daß die Lösung des hierauf bezüglichen allgemeinen Problems der Dynamik und also die Bestimmung des Vibrationszustandes eines von Oberflächenspannungen des besagten Typus angegriffenen elastischen Körpers, wenn die Anfangsbedingungen der Verrückung und Geschwindigkeit bekannt sind, sich in zwei zerlegt: a) Bestimmung der Vibrationen des Typus (1), die ausschließlich von den gegebenen Oberflächenspannungen erzeugt werden, b) Bestimmung der mit jenen zugleich auftretenden freien Vibrationen, welche es ermöglichen, die gegebenen Anfangsbedingungen zu befriedigen.

Bei Benutzung der in der vorliegenden Arbeit angewandten Methode hat das Problem Ähnlichkeit mit dem statischen elastischen Problem, besonders zufolge der Tatsache, daß die Gleichungen, von denen die $u_i, v_i, w_i, \ldots$ abhängen, die Zeit nicht enthalten. Dies hat, wie zu beachten ist, ein mechanisches Interesse. Wenn man nämlich annimmt, daß auf einen Punkt eines von einer Oberfläche σ begrenzten elastischen Mediums S eine Kraft von der Form $t^n e^{-h^2 t} \cos kt$ einwirkt, welche eine ziemlich allgemeine Störung vom Dämpfungstypus in einem Punkte darstellen kann, so geschieht die Bestimmung des dadurch in S erzeugten Vibrationszustandes, unter der Annahme einer Nullspannung auf σ, durch Berechnung der Spannungen auf σ mittels der Stokesschen Formeln und mithin einer regelmäßigen Vibration in S, welche auf σ die eben berechneten Spannungen ergibt. Diese sind, wie eine einfache Rechnung zeigt, von dem betrachteten Typus (1), und somit ist das zu lösende Problem vom Typus a).

In der gegenwärtigen Arbeit werden zuerst einige Betrachtungen bezüglich der hier eingeführten Vibrationen und ihres Verhaltens vorausgeschickt, und dann wird summarisch gezeigt, wie durch Einführung des Algorithmus der Komplexe und der Substitution bei den Komplexen Schnelligkeit in den Berechnungen und Eleganz in den Formeln zu erzielen ist. Hauptsäch-

lich werden einige Resultate über die longitudinalen Vibrationen mitgeteilt; eine vollständige Entwicklung wird für eine spätere Veröffentlichung versprochen. Lp.

L. Roy. Sur les équations des tiges droites. Toulouse Ann. (3) **2**, 19-32 (1910).

Der Verf. knüpft an die Behandlung der Bewegungsgleichungen isotroper homogener Stäbe mit Kreisquerschnitt bei E. Mathieu an (Théorie de l'élasticité des corps solides, chap. VII), gibt ihr aber eine größere Allgemeinheit. Zunächst setzt er nicht von vornherein die longitudinale Verrückung auf der Achse gleich Null. Sodann nimmt er nicht an, daß die Temperatur des Stabes mäßig und konstant ist, wie man es gewöhnlich in der Elastizitätstheorie tut; er berücksichtigt also auch die thermischen Deformationen. Statt der Arbeit der elastischen Kräfte, welche Mathieu betrachtete, befaßt er sich mit dem inneren thermodynamischen Potential des Stabes, dessen Ausdruck er zuerst aufsucht. Daraus leitet er die Bewegungsgleichungen ab mittels der Fundamentalgleichung der Energetik, die das d'Alembertsche Theorem verallgemeinert.

Diese Analyse führt zu dem Ergebnis, daß die Gleichungen der Transversalbewegung, und zwar sowohl der unbestimmten, als auch derer an den Grenzen, von der Temperatur unabhängig sind. Diese Gleichungen fallen nun mit den früher von Kirchhoff gegebenen zusammen. Die Temperatur spielt nur bei den Gleichungen der longitudinalen Bewegung eine Rolle; diese lassen sich übrigens schneller nach einer anderen Methode ableiten, wie der Verf. in der Abhandlung gezeigt hat: „Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides" (Journ. de Math. (6) **6**, 201-269; F. d. M. **41**, 1003, 1910), ohne daß man eine so besondere Hypothese über die Gestalt und die Struktur des Stabes macht.

Schließlich werden die komplementaren Temperaturgleichungen aus der Theorie der Leitung gefolgert. Diese Gleichungen, verbunden mit den schon erhaltenen, ermöglichen es, die beiden untrennbaren Probleme der Bewegung und der Temperaturverteilung in ganzer Allgemeinheit zu behandeln. Lp.

J. B. Ritchie. The dissipation of energy in torsionally oscillating wires of brass and other materials, with the effects produced on the law of torsional oscillation by change of temperature, etc. Edinb. Roy. Soc. Proc. **31**, 424-439.

J. B. Ritchie. An apparatus for inducing fatigue in wires by means of repeated extensional and rotational strains, with the effects produced by such fatigue in the laws of torsional oscillation. Ebenda, 440-470.

Peddie (Phil. Mag. (5) **38**, 36-55; F. d. M. **25**, 1584, 1894) hat gezeigt, daß bei der Bestimmung des Gesetzes der Abnahme von Torsionsschwingungen eines Eisendrahtes, wenn die Schwingungsweite groß ist im Vergleich zu den

wahrnehmbaren Grenzen der Elastizität, eine Gleichung von der Form $y^n(x+a)=b$ eine recht gute Darstellung der Ergebnisse liefert. Hierin bezeichnet y die Schwingungsweite, x die Anzahl der Schwingungen seit dem Beginn des Versuches; n, a und b sind Größen, die für jedweden Versuch konstant sind und von den Anfangsbedingungen des Versuches und der vorangehenden Behandlung des Drahtes abhängen.

Ritchie hat experimentelle Forschungen geleitet, um zu ermitteln, ob diese Gleichung mit gleicher Genauigkeit auf den Fall von Drähten aus Messing und anderen Metallen anwendbar ist, und um die Wirkung zu finden, welche eine Änderung der Anfangsbedingungen der Drähte hervorruft durch einen Wechsel der Temperatur oder durch Ermüdung mittels wiederholter Längsdehnungen oder Drehzerrungen. Es wurde bemerkt, daß die Anwendung einer großen Drehkraft in manchen Fällen eine große Wirkung hatte.

Der zweite Artikel beschäftigt sich mit der Wirkung, die eine wiederholte Anwendung einer Dehnkraft ausübt, oder eine wiederholte Anwendung einer Drehung an dem einen Ende des Drahtes, während das andere Ende festgehalten wird und somit eine Ermüdung in den Drähten eintritt; die Vermutung spricht dafür, daß eine solche Behandlung eine Wirkung auf die Schwingungsart haben dürfte, wenn die Prüfung unmittelbar nachher geschieht. J. (Lp.)

Lord Rayleigh. Note on Bessel's functions as applied to the vibrations of a circular membrane. Phil. Mag. (6) **21**, 53-58.

In der Theory of Sound (§§ 205, 207) ist gezeigt, daß eine typische einfache Schwingung einer längs den Radien $\theta=0$ und $\theta=\beta$ sowie längs dem Kreisbogen $r=1$ befestigten Membran durch die Formel

$$w = J_n\left(z_n^{(s)} r\right) \cdot \sin n\theta \cdot \cos\left(z_n^{(s)} t\right)$$

ausgedrückt wird, wo $z_n^{(s)}$ eine endliche Wurzel der Besselschen Funktion $J_n(z)=0$, $n=\pi/\beta$ ist. Zur erfolgreichen Anwendung auf vorgelegte Beispiele, überhaupt zur Diskussion jener Formel bedarf man genauerer Kenntnisse der Wurzeln von $J_n(z)=0$. Der Verf. sucht einiges zur Erforschung jener Wurzeln beizutragen. Wir führen an: Die Wurzeln von J_{n+1} trennen die von J_n. Alle endlichen Wurzeln von $J_n'(z)=0$ wachsen stetig mit n. Wenigstens eine Wurzel von $J_{n+1}'(z)=0$ muß zwischen zwei Folgewurzeln von $J_n'(z)=0$ liegen. Wenn, was wahrscheinlich scheint, eine Wurzel einer Besselschen Funktion nicht eine algebraische Gleichung befriedigen kann, so haben keine zwei Besselschen Funktionen eine gemeinschaftliche Wurzel.
Lp.

J. R. Airey. The vibrations of circular plates and their relation to Bessel functions. Proc. Phys. Soc. London **23**, 225-232.

Die Verhältnisse der Radien der Knotenkreise zu dem Radius einer schwingenden Kreisplatte sind durch Rechnungen erhalten worden, welche die

Wurzeln von Gleichungen zu bestimmen verlangten, die Besselsche Funktionen mit reellen und imaginären Argumenten enthalten. Die angewandte Methode scheint die Regula falsi gewesen zu sein oder ein Interpolationsverfahren nach Tafeln für jene Funktionen. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Angabe einer allgemeinen Methode zur Lösung dieser Gleichungen, nämlich der Gleichung für eine Kreisplatte mit befestigtem Rande und der Gleichung für eine freie Kreisplatte. Aus den so berechneten Wurzeln werden die Radien der Knotenkreise und die Schwingungszeiten jeder gegebenen Art unschwer gefunden und mit den von anderen früher berechneten Werten verglichen.

Lp.

St. Timoschenko. Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 163-203.

Die Aufgaben über erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe haben nicht nur eine theoretische, sondern auch eine große praktische Bedeutung. Trotzdem finden die allgemeinen Methoden zur Untersuchung kleiner Schwingungen, die vor allem in der Akustik ausgearbeitet worden sind, in der Technik geringe Anwendungen. Dies erklärt sich zum Teil dadurch, daß in den Büchern über die Theorie des Schalls das Hauptaugenmerk sich auf freie Schwingungen richtet, während den erzwungenen Schwingungen nur geringe Beachtung geschenkt wird. Im vorliegenden Aufsatze wird die Frage über die erzwungenen Schwingungen prismatischer Stäbe unter Benutzung des allgemeinen Verfahrens untersucht (Rayleigh, Theory of sound, 2nd edition, § 101); die Betrachtung stützt sich auf die Anwendung der zweiten Form der Lagrangeschen Gleichungen für Systeme mit einer unendlichen Zahl von Freiheitsgraden.

Der Aufsatz zerfällt in folgende Teile: 1. Erläuterung des allgemeinen Verfahrens. 2. Längsschwingungen prismatischer Stäbe. Als Beispiel werden die Schwingungen eines Indikators behandelt. 3. Torsionsschwingungen. Hier wird das allgemeine Verfahren zur Untersuchung der Schwingungen einer Welle mit zwei an den Enden aufgesetzten Riemenscheiben benutzt. 4. Querschwingungen prismatischer Stäbe. 5. Schwingungen von Brücken unter der Wirkung einer beweglichen Last.

„Die angeführten Beispiele genügen, um die Anwendbarkeit des allgemeinen Verfahrens, gestützt auf die Benutzung der Normalkoordinaten, für die Lösung einer ganzen Reihe wichtiger technischer Aufgaben zu zeigen. Im Falle der Wirkung von Einzelkräften ist dieses Verfahren einfacher als das Verfahren, das sich auf die Integration der entsprechenden Differentialgleichungen stützt."

Lp.

W. Stekloff et J. Tamarkine. Problème des vibrations transversales d'une verge élastique encastrée. Palermo Rend. **31**, 341-362.

Ein an seinen Enden eingeklemmter elastischer Stab erstrecke sich auf der x-Achse von a bis $b\,(b > a)$. Das Problem der transversalen Schwingungen eines solchen Stabes hängt von der Lösung der beiden folgenden Probleme ab:

(A) Eine Folge von Funktionen $V_k(x)\,(k = 0, 1, 2, \ldots)$ zu bestimmen, die den Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2 V_k(x)}{dx^2}\right] = \lambda_k p(x) V_k(x)$$

genügen, sowie den Grenzbedingungen

$$(2) \qquad V_k(a) = V_k(b) = \frac{dV_k(a)}{dx} = \frac{dV_k(b)}{dx} = 0,$$

wo $r(x), p(x)$ in dem Intervalle (a, b) gegebene Funktionen sind und die λ_k Konstanten.

(B) Die Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlich gegebenen Funktion ($f(x)$ innerhalb des Intervalles (a, b) in eine konvergente Reihe von der Form zu beweisen:

$$(3) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k \int_a^b p(x) V_k^2(x)\, dx = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx.$$

Tamarkine hat diese Aufgaben unter gewissen ziemlich allgemeinen Bedingungen mittels der Stekloffschen Methoden in der Arbeit gelöst: Anwendung der Methode der fundamentalen Funktionen auf das Studium der Differentialgleichungen der schwingenden elastischen Stäbe (Charkow Math. Ges. **12**, 19-46, 1910). Er hat gezeigt, daß jede Funktion $f(x)$, welche Derivierte der beiden ersten Ordnungen hat und die Bedingungen $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$ befriedigt, in eine Reihe von der Form (3) entwickelbar ist, die in (a, b) gleichmäßig konvergiert.

In der gegenwärtigen Arbeit behandeln die Verf. einen besonderen Fall des allgemeinen Problems, nämlich das Problem der transversalen Schwingungen eines homogenen elastischen Stabes unter der Annahme, daß die Funktionen $r(x)$ und $p(x)$ in (1) sich auf positive Konstanten reduzieren. In diesem Falle erhalten sie die Lösung des Problems (B) in demselben Grade der Allgemeinheit wie in dem klassischen Fall der Fourierschen Reihen mittels gewisser asymptotischer Ausdrücke für die Funktionen $V_k(x)$ und durch Anwendung der von Stekloff angegebenen allgemeinen Methode (Charkow Math. Ges. **10**, 97-201, 1907; F. d. M. **38**, 436-437, 1907). Lp.

L. Zoretti. Sur l'intégration des équations du mouvement intérieur d'un solide élastique isotrope de révolution. S. M. F. Bull. **39**, 52-57.

„Die Gleichung der schwingenden Saiten, zu der die Rechnung führt, tritt bekanntlich in der rohen, aber praktisch guten und besonders sehr einfachen Lösung auf, die Allievi dem Problem der Widderstöße gegeben hat. Die vorliegende Rechnung, welche eine gewisse Anzahl willkürlicher Funktionen einführt, ermöglicht vielleicht das Studium der Enveloppe, wenn man die Lösung von Allievi so ansieht, daß sie Bedingungen an den Grenzen für dieses letztere Problem liefert.“ Lp.

J. E. Ives. An approximate theory of an elastic string vibrating, in its fundamental mode, in a viscous medium. Phil. Mag. (6) **21**, 742-744.

Es sei R die Kraft, welche zur Überwindung der inneren und äußeren Reibung der ganzen Sehne erforderlich wäre, wenn jeder ihrer Punkte mit Einheitsgeschwindigkeit sich bewegte, M die Masse der Sehne, q die Verrückung ihres Mittelpunktes, l die Länge, τ die Spannung. Nach einigen vereinfachenden Annahmen ergibt sich für die Grundschwingung die Differentialgleichung:

$$M \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{\pi^2 \tau}{l} q = 0,$$

woraus in bekannter Weise (q_m = Maximalverrückung):

$$q = q_m e^{-Rt/2M} \cos(2\pi t/T)$$

folgt und die Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2}{\left\{ \frac{\tau}{Ml} - \frac{R^2}{4\pi^2 M^2} \right\}^{1/2}}.$$

Ist $R \geqq 2\pi \sqrt{M\tau/l}$, so kann keine oszillatorische Bewegung stattfinden.

Lp.

L. Roy. Sur la propagation des discontinuités dans le mouvement des fils flexibles. C. R. **152**, 581-583.

Die Formeln für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Erschütterungen bei den Bewegungen der Saiten werden im allgemeinen nur in dem Falle einer sehr wenig deformierten schwingenden Saite von unveränderlicher Temperatur aufgestellt. Man kann sich aber von diesen Beschränkungen befreien und eine Diskontinuität von einer beliebigen Ordnung $n > 1$ betrachten. In der Note werden die bezüglichen Formeln kurz angegeben und einige Analogien mit der Hydrodynamik und der Aerodynamik hergeleitet.

Lp.

L. Roy. De la viscosité dans le mouvement des fils flexibles. C. R. **152**, 1228-1231.

Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über die Berücksichtigung der Viskosität bei der Bewegung biegsamer Drähte geht der Verf. näher ein auf die kleinen Bewegungen eines gespannten Drahtes von der Länge l, der keiner äußeren Kraft unterworfen und dessen eines Ende fest ist, während das andere eine gegebene Bewegung ausführt. Die Viskosität kommt nur bei der longitudinalen Verrückung ξ in Betracht. Für sie gilt die Differentialgleichung ($\varDelta$ = Koeffizient der Viskosität):

$$(4) \qquad \varDelta \frac{\partial^3 \xi}{\partial \omega^2 \partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\text{für } \omega = (0, l) : \xi = [0, F(t)]; \text{ für } t = 0 : \xi = f(\omega), \frac{\partial \xi}{\partial t} = g(\omega)\right).$$

Die Resultate der Integration für die beiden Annahmen: 1. Das zweite Ende ist auch fest $(F(t) = 0)$, 2. $F(t) = \varepsilon \sin(2\pi t/T)$ werden kurz angegeben. — Im allgemeinen ist die Bewegung des Drahtes die Superposition einer erzwungenen Bewegung und einer anderen, die allmählich erlischt. Lp.

L. Roy. Les discontinuités du premier ordre dans le mouvement des fils flexibles. C. R. **152**, 1743-1746.

Für die betrachteten Unstetigkeiten befolgt der Verf. denselben Weg wie Duhem in den Recherches sur l'hydrodynamique, Partie II, Chap. I, und behandelt die beiden Fälle eines vollkommenen Fadens und eines zähen Fadens gesondert. In dem ersteren Falle erhält er je nach dem Werte einer Konstante $k = +1$ oder $k = -1$ Formeln, die bei $k = +1$ den von Jouguet und von Duhem in der Hydrodynamik gegebenen analog sind, während bei $k = -1$ andere entstehen, weil der Unstetigkeitspunkt ein Rückkehrpunkt wird. Im Falle der Zähigkeit wird bei $k = +1$ die Unstetigkeit von höherer Ordnung; bei $k = -1$ gewinnt man das Resultat leicht aus dem ersten Falle. Lp.

E. Jouguet. La loi adiabatique dynamique dans le mouvement des fils. C. R. **153**, 761-764.

In der vorstehend besprochenen Note hat Roy die Formeln bekannt gemacht, welche die Fortpflanzung der Unstetigkeiten erster Ordnung (Stoßwellen) beherrschen. Der Verf. der vorliegenden Note vervollständigt diese Formeln durch die Untersuchung der Frage, was in diesem Problem das für die Gase unter dem Namen des dynamischen adiabatischen Gesetzes von Hugoniot bekannte Gesetz wird. Er findet zwei zu unterscheidende Fälle. In dem ersten Fall ergibt sich dasselbe Gesetz wie für die Gase. Man könnte durch Hinzunahme des Carnotschen Prinzips aus ihm dieselben Folgerungen wie für die Gase ziehen betreffs der Geschwindigkeit der Stoßwellen im Vergleich zu derjenigen der Beschleunigungswellen sowie der Natur der fortpflanzungsfähigen Stoßwellen. In dem zweiten Falle erhält man ein Gesetz von anderer Form als bei den Gasen, und der Verf. geht daher den Folgerungen nach, die sich hier aus dem Carnotschen Prinzip ergeben. Lp.

E. Jouguet. Sur l'accélération des ondes de choc dans les fils. C. R. **153**, 933-936.

Die Note dehnt auf die Stoßwellen in elastischen Fäden einige Resultate aus, die der Verf. für die Stoßwellen der Gase in C. R. **142**, 831-833 u. 1034-1036 bewiesen hat (F. d. M. **37**, 778, 1906). Unter Anwendung der Bezeichnungen von Roy und seiner eigenen Studie in den vorstehend angezeigten Noten beschäftigt er sich mit der Beschleunigung des Stoßwelle in bezug auf den als homogen angenommenen Anfangszustand, und zwar stellt er die Formeln nur für die Stoßwellen erster Art auf. Er zieht aus ihnen den Schluß: „Wenn un-

mittelbar hinter der Wellenfront die Dichte eines Elementes in demselben Sinne variiert wie bei dem Durchgang der Welle, so tritt die fortgepflanzte Unstetigkeit stärker hervor, und die Geschwindigkeit wird beschleunigt; umgekehrt im entgegengesetzten Falle. Lp.

E. JOUGUET. Sur la vitesse et l'accélération des ondes de choc de seconde et de troisième espèce. C. R. **153**, 1062-1064.

Als Fortsetzung der vorjährigen Noten leitet der Verf. folgende Sätze ab: Falls die Unstetigkeit nicht zu stark ist, bleibt die Schnelligkeit (célérité) einer Stoßwelle zweiter Art unterhalb der Schnelligkeit der transversalen Beschleunigungswellen in dem Medium, das ihr folgt, und oberhalb der Schnelligkeit der transversalen Beschleunigungswellen in dem Medium, das ihr voraufgeht. — Wenn unmittelbar hinter der Vorderseite einer Welle, deren Unstetigkeit nicht zu stark ist, die Dichte eines Elementes in demselben Sinne sich ändert, wie beim Durchgang durch die Welle, so prägt sich die von der Welle fortgepflanzte Unstetigkeit schärfer aus, und ihre Schnelligkeit vergrößert sich. Im entgegengesetzten Falle tritt das Umgekehrte ein. Lp.

E. TERRADAS. Del moviment pertorbat d'una corda. Arxius de l'Institut de Ciencias, Barcelona **1**, 71-96.

Von den allgemeinen Gleichungen ausgehend, die Floquet in der Note „Sur le mouvement d'un fil dans l'espace" gegeben hat (C. R. **115**, 499-502; F. d. M. **24**, 894, 1892), nimmt der Verf. an, es trete zu den vorhandenen, stetig wirkenden Kräften eine störende Kraft hinzu, aber von solcher Kleinheit, daß man die Quadrate und Produkte der Störungen vernachlässigen könne, und entwickelt unter diesem Gesichtspunkte die Zusatzglieder zu den Floquetschen Gleichungen. Danach wendet er diese neuen Gleichungen auf mehrere, genau durchgeführte Fälle an (vgl. S. 746 dieses Bandes). Lp.

L. ROY. De la viscosité dans le mouvement des membranes flexibles. C. R. **153**, 1132-1134.

Gemäß der approximativen und der Lord Rayleighschen Hypothese existiert eine „Zerstreuungsfunktion" $\mathfrak{D}$, welche in den der Flächentheorie entlehnten Größen E', F', G' homogen und vom zweiten Grade ist:

$$2\mathfrak{D} = \mathfrak{E}E' - 2\mathfrak{F}F' + \mathfrak{G}G';$$

hieraus ergibt sich, daß für die Aktionen der Zähigkeit die Beziehungen

$$\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial E'}, \quad -2\mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial F'} \quad \mathfrak{G} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial G'}$$

bestehen. Der Verf. zeigt, daß daraus für eine reelle Modifikation folgt:

$$2\mathfrak{T} = \Lambda H^2\theta^2 + M(E'G' - F'^2),$$

wo Λ und M die Koeffizienten der Zähigkeit sind, θdt die wirkliche Oberflächenausdehnung ist. Daher ist denn:

$$2\mathfrak{E} = \Lambda G\theta + MG',\ 2\mathfrak{F} = \Lambda F\theta + MF',\ 2\mathfrak{G} = \Lambda E\theta + ME'.$$

Lp.

A. FRANCKE. Der hyperbolische Kosinusbogenträger (Kettenlinienträger). Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 113-136.

Es werden für die Auflagerkräfte und Verschiebungen eines Bogens von konstantem Trägheitsmoment des Querschnitts geschlossene Formeln für den Fall, daß er nach einer Kettenlinie geformt ist, abgeleitet. Es zeigt sich, daß dieser Fall mathematisch einfacher ist als der des Kreisbogens und der Parabel, und daß die Formeln auch numerisch gut zu behandeln sind. Rr.

W. BEHRENS. Ein mechanisches Problem aus der Theorie der Laval-Turbine, behandelt mit Methoden der Himmelsmechanik. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 337-390.

Die dynamischen Probleme des Maschinenbaus haben mit den Problemen der Himmelsmechanik gemeinsam, daß in ihnen periodische Koeffizienten auftreten. Die letzteren Probleme sind nun mathematisch viel weiter entwickelt worden, weil es sich bei so reinen Verhältnissen eher lohnt, weitläufige und genaue Rechnungen auszubilden, als in der Technik mit ihren unzähligen dynamischen Nebeneinflüssen. Immerhin ist es wichtig, einmal zu untersuchen, was die so entwickelten mathematischen Methoden für die Technik in einem besonderen Falle leisten.

Das Problem war bisher von Stodola nach der Methode der kleinen Schwingungen, von Föppl und Lecornu durch Entwicklung nach fallenden Potenzen des Trägheitsradius der Turbinenscheibe behandelt worden; aber gerade der kritische Zustand des Schleuderns der Welle bei einer gewissen Umlaufzahl kann durch diese Darstellungen nicht gefaßt werden.

Der Verf. nun führt als Parameter den kleinen Abstand μ des Schwerpunkts der rotierenden auf der elastischen Welle sitzenden Scheibe von dieser Welle ein, integriert die Differentialgleichung der Bewegung zunächst für $\mu = 0$ in bekannter Weise und faßt die Integrationskonstanten als Funktionen der Zeit und des Parameters auf, die er nach Potenzen dieses Parameters entwickelt, so daß Anfangsbedingungen und Bewegungsgleichungen bis zu einer Ordnung erfüllt sind, die wie bei fast allen asymptotischen Entwicklungen sehr niedrig sein darf.

Zu diesem Zwecke bringt er die Differentialgleichungen zunächst auf eine Poincarésche Normalform durch Einführung neuer Variabeln, in der die Energie an der Stelle $\mu = 0$ nach ganzen positiven Potenzen von μ entwickelbar ist, das von μ freie Glied die Veränderlichen nicht enthält und eine gleichperiodische Funktion in allen Veränderlichen ist. Die neuen Variabeln werden gewonnen durch die Bestimmungsstücke der tangierenden Ellipse der Bewegung im Falle $\mu = 0$.

Auf diese Form der Differentialgleichungen werden nun die asymptotischen Integrationsmethoden von Lindstedt und Bohlin angewendet, letztere insbesondere in dem kritischen Falle. Dagegen versagen die Methoden in dem Falle der von Stodola und anderen behandelten stationären Bewegungen.

Die Ergebnisse sind schon bei Beschränkung auf zweite Ordnung recht komplizierte Ausdrücke, die allerdings hierfür schon genügend genau sind.

Es zeigt sich, daß sowohl bei der kritischen als auch bei der nicht kritischen Umlaufzahl die Scheibe sich um ihren Schwerpunkt mit konstanter Umlaufzahl dreht und der Schwerpunkt sich auf einer um ihren Mittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Ellipse mit nahezu konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt. Über diesen Bewegungszustand überlagern sich dann einfache Schwingungen.

Das Kennzeichnende der kritischen Geschwindigkeit ist nun die millionenmal größere Drehgeschwindigkeit der Ellipse und Amplitude der überlagerten Schwingungen. Ferner ändert sich der Charakter der Bewegung außerordentlich schnell und stark hin und her in einem gewissen Intervall der Umlaufzahl, dem kritischen Intervall. Rr.

Th. v. Kármán. Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Zs. d. Ver. Deutscher Ing. 1911, 1749-1758.

Die Druckversuche können nicht entscheiden, ob die Voraussetzung der Theorie von Mohr, die Festigkeit sei von der mittleren Hauptspannung unabhängig, zutrifft oder nicht. Einige neuere Zugversuche, die fortgesetzt werden sollen, haben jedoch gezeigt, daß bei ihnen jene Unabhängigkeit nicht stattfindet. Lp.

Weitere Literatur.

H. Adams. Reinforced concrete construction in theory and practice: an elementary manual for students and others. XIV u. 316 S. 8°.

H. Adams. The mechanics of building construction. With 590 diagrams. XI u. 240 S. 8°. London: Longmans, Green and Co.

C. Bach. Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und ihre erfahrungsgemäße Grundlage. 6. verm. Aufl. Unter Mitwirkung von R. Baumann. Berlin: Springer. XXIV u. 642 S., 20 Taf., gr. 8°.

E. Barré. I: Sur une classe de solutions des équations indéfinies de l'équilibre de l'élasticité. II: Applications de la géométrie cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable (Thèse). Nancy: Berger-Levrault. 78 S. 4°.

J. E. Boyd. Strength of materials. New York: McGraw-Hill. XII u. 295 S. 8°.

E. M. Bragg. Marine engine design, including the design of turning and reversing engines. London: Constable and Co., Ltd. 172 S. [Nature 88, 4.]

A. Emch. The differential equation of curves of normal stresses in a plane field. Amer. Math. Soc. Bull. (2) 17, 515-516.

M. Fischer. Statik und Festigkeitslehre. II. Bd. 1. Teil. Berechnung von statisch bestimmten Fachwerkskonstruktionen. 2. Aufl. Berlin: Meusser. XI u. 671 S. Lex. 8⁰.

L. Freytag. Gesetzmäßigkeiten in der Statik des Vierendeel-Trägers nebst Verfahren zur unmittelbaren Gewinnung der Einflußlinien durch Reihenbildung. München: Oldenbourg. 29 S. Lex. 8⁰.

R. Gaston. La théorie de l'aviation. Son application à l'aéroplane. Paris: Vivien. 31 S. 8⁰.

C. S. Graf. Sammlung von Festigkeitsaufgaben aus dem Maschinenbau, mit Resultaten und kurzer Angabe der Auflösungen. 2. Aufl. Wien: Perles. VI u. 100 S. gr. 8⁰.

C. W. Hudson. Deflections and statically indeterminate stresses. New York: Wiley. XIII u. 258 S. 4⁰.

J. Husband. Structural engineering. With 337 diagrams. London: Longmans, Green and Co. XII u. 396 S. 8⁰.

J. Jedlička. Festigkeitslehre. Wien: F. Deuticke. VII u. 177 S. Lex. 8⁰.

W. R. King. The elements of the mechanics of materials and of power transmission. New York: John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall, Ltd. 226 S. [Math. Gaz. **6**, 300-302.]

M. Koenen. Grundzüge für die statische Berechnung der Beton- und Eisenbetonbauten. 4. Aufl. Berlin: W. Ernst. IV u. 45 S. Lex. 8⁰.

C. Kriemler. Einführung in die energetische Baustatik. Einiges über die physikalischen Grundlagen der energetischen Festigkeitslehre. Berlin: J. Springer. III u. 77 S., 18 Fig., gr. 8⁰.

R. Lauenstein. Die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch. 11. Aufl. Bearbeitet von C. Ahrens. Leipzig: Kröner. VIII u. 253 S. 8⁰.

S. Liepe. Die Verwendung der Brinellischen Kugeldruckprobe zu Kraft- und Schlagarbeitsmessungen. Diss. Aachen. 52 S. 4⁰.

E. Marburg. Frame structures and girders. Vol. I: Stresses. Part I. New York: Mc Graw-Hill. 540 S. 8⁰.

L. A. Martin jun. Text-book of mechanics. Vol. III: Mechanics of materials. New York: John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall, Ltd., XIII u. 229 S. [Nature **88**, 276.]

H. E. Murdoch. Strength of materials. New York: John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall, Ltd. XIV u. 308 S.

A. Nádai. Untersuchungen der Festigkeitslehre mit Hülfe des thermoelektrischen Temperaturmeßverfahrens. Berlin: Ebering. 51 S. 8⁰.

O. Pomini. Costruzione di macchine. I: Elasticità e resistenza dei materiali. Milano: Hoepli. XIX u. 509 S. 8⁰. (Biblioteca tecnica.)

A. C. Pugnali. Algunas consideraciones sobre las relaciones entre las leyes de Guest y Hooke. Anales Soc. cient. Argent. **71**, 126-139.

E. Reinstein. Untersuchungen über Transversalschwingungen der gleichförmigen elliptisch oder kreisförmig begrenzten Vollmembran und Kreisringmembran sowie von Vollkreis- und Kreisringmembranen mit nach speziellen Gesetzen variierter ungleichförmiger Spannung. Diss. Göttingen.

J. Röthlisberger. Moments sur les appuis des poutres continues dont le moment d'inertie est constant et dont les travées intermédiaires ont la même portée. Torino: Unione tipografico-editrice. VII u. 112 S. 8°.

R. Saliger. Der Eisenbeton in Theorie und Konstruktion. 3. Aufl. Leipzig: Kröner. 3. Aufl. VIII u. 290 S. gr. 8°.

R. Schöler. Einführung in den Brückenbau. Leipzig: Voigt. VIII u. 109 S. 8°.

R. Schönhöfer. Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken nach den Grundsätzen der Elastizitätstheorie. Zweite, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin: Ernst.

S. E. Slocum. A general formula for the shearing deflection of beams of arbitrary cross section, either variable or constant. Journ. Franklin Inst. **171**, 365-389.

S. E. Slocum and E. L. Hancock. Textbook on the strength of materials. Revised edition. Boston: Ginn. XXXVI u. 372 S. 8°.

A. Smith. Stresses in simple framed structures. A textbook to accompany exercises in the computation of the axial stresses in the members of load bearing frames. West Lafayette, Ind.: Smith. 190 S. 8°.

C. A. M. Smith. A handbook of testing materials. London: Constable and Co., Ltd. XII u. 284 S. [Nature 88, 208.]

F. N. Taylor. A manual of civil engineering practice: Specially arranged for the use of municipal and county engineers. London: C. Griffin and Co., Ltd., 1911. XII u. 809 S.

Enthält drei Kapitel über Elastizitätstheorie. Vgl. Nature 88, 240-241.

A. G. Webster. Solid viscosity versus elastic hysteresis in the transverse vibration of an elastic bar. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 63.

D. Akustik.

H. v. Hoesslin. Die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Verteilung der molekularen Geschwindigkeiten. München: G. Franz. IV u. 70 S. 8°.

Verf. glaubt in der gewöhnlichen Theorie der Ableitung der Schallgeschwindigkeit in Gasen oder Flüssigkeiten einige Fehler nachweisen und sie berichtigen zu können. Für die Nachweise von Fehlern in seiner Ableitung setzt er Preise aus. Br.

S. Fujiwhara. On the anomalous propagation of sound-rays in the atmosphere. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 132-142.

Veranlaßt durch die merkwürdigen Erscheinungen der Ruhezone, hat der Verf. unter ähnlichen Voraussetzungen wie G. v. d. Borne (Physik. Zs. **11**, 483-488; F. d. M. **41**, 911, 1910) theoretische Betrachtungen über die Ausbreitung des Schalles gegen die Erdatmosphäre angestellt. Er nimmt die hydrodynamischen Grundgleichungen als Ausgang für seine Studien, bestimmt Zeit, Geschwindigkeit usf. und zeigt die Übereinstimmung mit bekannten Beobachtungen. Grb.

G. Jaeger. Zur Theorie des Nachhalls. Wien. Ber. **120**, 613-634.

Unter bestimmten Annahmen ergibt sich die Energiedichte des Schalles zu $E - E_0 e^{-ant}$, wobei $a < 1$ der Absorptionskoeffizient und n die Anzahl der Ablenkungen in der Sekunde ist; ebenso bestimmt sich der Nachhall. Dieses n läßt sich aus physikalisch leicht bestimmbaren Größen ableiten. Das gewonnene Resultat ist sowohl für den Schallimpuls als auch für den Ton bekannter Dauer gegeben. Es ergeben sich Sätze über die Stärke des Tones, und hieraus lassen sich bekannte Tatsachen erklären. Die Variabilität der von der Tonhöhe abhängenden Größe a wird für zwei spezielle Fälle berücksichtigt: 1. dünne Wände, 2. Polsterungen. Grb.

C. J. T. Sewell. The extinction of sound in a viscous atmosphere by small obstacles of cylindrical and spherical form. Lond. Phil. Trans. (A) **210**, 239-270.

Die Arbeit lehnt sich an die Methoden an, die von Lord Rayleigh für den Einfluß sphärischer oder zylindrischer Körper auf die Fortpflanzung von Wellen in nicht viskoser Luft und von Lamb für das gleiche Problem in einem den hydrodynamischen Gesetzen gehorchenden Medium aufgestellt sind, führt aber den Energieverlust durch innere Reibung neu ein. Seine Berücksichtigung führt zu recht komplizierten Ergebnissen. Es wird eine Reihe von Spezialfällen durchgerechnet. Br.

C. R. Dines. The harmonics of a stretched spring vibrating in a resisting medium. Annals of Math. (2) **12**, 153-169.

Es werden die Obertöne einer an den beiden Enden befestigten Saite betrachtet, die transversal mit kleinem Ausschlag in einem widerstehenden Medium schwingt; die Schwingung wird durch die Spannung in der Saite und durch eine Kraft unterhalten, die eine lineare Funktion der transversalen Geschwindigkeit und des Abstandes jedes Punktes der Saite von seiner Gleichgewichtslage ist.

Wenn eine Saite in einem nicht widerstehenden Medium schwingt, so sind bekanntlich die Obertöne in vollkommener Harmonie mit dem Grundton der Saite; in dem Medium aber, das hier in Betracht kommt, ist dies nicht immer der Fall. In § 2 wird jedoch gezeigt, daß durch eine passende Wahl der linearen Funktion zwei beliebige Töne harmonisch gemacht werden können. In den §§ 3—5 werden die harmonischen Obertöne verschiedener relativen Grundtöne für jene lineare Funktion betrachtet; es zeigt sich, daß manche Noten eine un-

begrenzte Anzahl harmonischer Obertöne haben, andere nur eine begrenzte Zahl, und daß für gewisse Werte der linearen Funktion eine Note vorhanden ist, die keine solchen Obertöne hat. Aus diesen Ergebnissen wird im § 6 die Kurve gefolgert, nach der die Saite anfänglich abzulenken ist, damit nur harmonische Obertöne für eine gewisse Note erhalten werden; es wird bewiesen, daß in manchen Fällen die Gleichung dieser Kurve eine unendliche trigonometrische Reihe ist, in andern eine endliche, und daß in gewissen Fällen die Aufgabe keine Lösung hat.

Die Aufgabe kommt auf eine andere zurück in der Darstellung von Zahlen durch eine binäre quadratische Form, deren Typus einer der drei ist: parabolisch, elliptisch, hyperbolisch. Abgesehen von der inneren Bedeutung der Aufgabe, ist sie somit auch deshalb von Interesse, weil sie eine Anwendung der Zahlentheorie auf die mathematische Physik im Gefolge hat. Das bestbekannte Beispiel dieser Art ist das schwingende Trommelfell; hier muß jedoch die quadratische Form elliptisch sein, während in dem jetzt betrachteten Falle auch der hyperbolische oder der parabolische Typus auftreten kann. Lp.

Lord Rayleigh. On the calculation of Chladni's figures for a square plate. Phil. Mag. (6) **22**, 225-229.

Behandelt einen Fall, in dem die Platte in spezieller Weise eingeklemmt ist. Br.

E. Reinstein. Untersuchung der Schwingungen gleichförmig gespannter elliptisch begrenzter Membranen. Ann. der Phys. (4) **35**, 109-144.

Auszug aus der Göttinger Dissertation des Verf. Die Integration der Differentialgleichung ist nach der Methode von Ritz durchgeführt (vgl. F. d. M. **39**, 449, 1908 u. **40**, 881, 1909) und bis zur zahlenmäßigen Berechnung der Töne und der zugehörigen Knotenlinien getrieben in zwei besonderen Hauptfällen, die zwei Typen der Vibrationsbewegung darstellen: den antisymmetrischen, bei dem die große Achse nicht eine Knotenlinie ist, und den symmetrischen, bei dem die große Achse eine Knotenlinie ist; die beiden Fälle spalten sich in zwei andere, je nachdem die kleine Achse eine Knotenlinie ist oder nicht. Die Rechnungsergebnisse sind an 34 Tönen geprüft worden, und es hat sich dabei eine befriedigende Übereinstimmung zwischen der Theorie und dem Experiment ergeben. Lp.

A. Lechner. Die Fresnelschen Prinzipien und die Wellenbewegung in Gasen. Wien. Ber. **120**, 1401-1407.

Unter Zuhülfenahme des Prinzipes der Kontinuität der Verschiebung und des Prinzipes der Kontinuität der Spannung wird die Differentialgleichung der Schwingung von Stäben behandelt und die Bedeutung der positiven Konstanten für Gase gegeben. Grb.

Lord Rayleigh. On a physical interpretation of Schlömilch's theorem in Bessel's functions. Phil. Mag. (6) **21**, 567-571.

Das Schlömilchsche Theorem, das gemeint ist, ist die Entwicklung einer Funktion in eine Reihe von Besselschen Funktionen. Verf. führt aus, daß derartige Entwicklungen an Stelle der üblichen Entwicklungen nach Fourierschen Reihen für die Analyse von Luftschwingungen vorteilhaft sein können. Br.

F. A. Schulze. Zur Theorie der Kombinationstöne. Ann. der Phys. (4) **34**, 817-822.

Der Helmholtzsche Ansatz für eine schwingende Membran $x'' + n_0^2 x + bx^2 = a \cos pt + d \cos qt$, in den das Glied bx^2 zur Erklärung des Zustandekommens von Kombinationstönen eingefügt ist ($x =$ Entfernung der Membran aus der Gleichgewichtslage), unterliegt dem Bedenken, daß er eine unsymmetrische Schwingung der Membran ergibt. Um diese Folge zu beseitigen, schlägt Verf. vor, b nicht als Konstante, sondern als eine Funktion zu betrachten, die beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage jäh das Vorzeichen wechselt. Br.

E. Waetzmann. Über mögliche Erweiterungen der Helmholtzschen Theorie der Kombinationstöne. Ann. der Phys. (4) **35**, 378-380.

Vorläufige Mitteilung über spezielle Formen, die man dem Helmholtzschen quadratischen Glied in der Differentialgleichung für die Schwingung des Trommelfells oder der Labyrinthflüssigkeit geben kann, um die Erscheinung des Hörbarwerdens von Kombinationstönen besser zu erklären. Versuche sollen darüber entscheiden, ob die gewählten Formen richtig sind oder nicht. Br.

E. Waetzmann. Über den Zusammenklang zweier einfachen Töne. Physik. Zs. **12**, 231-238.

Verf. leitet „die Hauptmerkmale der Resultierenden für zwei der einfacheren, wichtigsten Fälle, nämlich gleiche Amplituden oder gleiche lebendige Kräfte der Primärtöne, exakt ab“ und erörtert die aus der Form der Resultierenden sich ergebenden Folgerungen „besonders in bezug auf Schwebungen und Kombinationstöne“. Grb.

J. W. N. Le Heux. Lissajoussche Stimmgabelkurven in stereoskopischer Darstellung. Leipzig: J. A. Barth. 18 Tafeln mit 8 S. Text. 8°.

Die stereoskopischen Bilder genannter Figuren werden bekanntlich erhalten durch Zeichnung zweier Kurven von geringer Phasendifferenz. Eine und mehrere Schwingungen von den Schwingungsverhältnissen 1 : 1, 1 : 2, 2 : 3, 3 : 5, 4 : 5 sind aufgezeichnet. Grb.

H. Benndorf und R. Pöch. XXIV. Mitteilung der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Zur Darstellung phonographisch aufgenommener Wellen. Wien. Ber. **120**, 1811-1832. 1 Tafel, 4 Fig.

Geometrische Untersuchungen der Umbildung von Phonographenkurven durch die Hebelübertragungen, Stiftformen u. ä. Grb.

S. Lifchitz. La reproduction sonore d'une courbe périodique. C. R. **152**, 401-404.

Während Terquem die vibrierenden Bewegungen, die durch einseitige Erschütterungen entstehen, wenn die Störungen durch $F(t)$ gegeben sind, wobei $F(t)$ eine Sinuskurve ist, untersucht hat, nimmt der Verf. $F(t)$ von der Form

$$F(t) = N + \sum_1^k \left[\beta_m \cos\left(2\pi \frac{mt}{T} + \varphi_m\right)\right]$$

an. Grb.

S. Lifchitz. La photographie et la reproduction d'une courbe sonore. Journ. de Phys. (5) **1**, 565-575.

Ausführlichere Darstellung der Versuche und ihrer theoretischen Verwertung als in der vorstehend angezeigten Note. Lp.

Kapitel 2.
Optik.

A. Theoretische Optik.

A. Dittrich. Die Maxwellschen Gleichungen im Lobatschefskijschen Raume. Časopis **40**, 34-44, 184-194. (Böhmisch.)

Es werden zuerst die elektromagnetischen Gleichungen von Maxwell für den hyperbolischen Raum abgeleitet und dann in dem einfachsten Falle (der ebenen Wellen) integriert. Der Verf. interpretiert das Resultat in folgenden zwei Sätzen:

1. Im Lobatschefskijschen Raume ist eine Wellenbewegung mit parallelen Strahlen möglich, welche mit einer von der Wellenlänge unabhängigen Geschwindigkeit fortschreitet.

2. Hat der Raum die Eigenschaften des Lobatschefskijschen Raumes, so absorbiert er das Licht. Pe.

L. GIUGANINO. Action de la translation terrestre sur les phénomènes lumineux. C. R. **152**, 1829-1831.

G. SAGNAC. La translation de la Terre et les phénomènes optiques dans un système purement terrestre. C. R. **152**, 310-313, 1835-1838.

G. SAGNAC. Quelques paradoxes au sujet des actions optiques du premier ordre de la translation de la Terre. C. R. **153**, 243-245.

Die beiden Noten von Sagnac wenden sich gegen die obengenannte Veröffentlichung von Giuganino, in welcher dieser die Existenz eines Effektes erster Ordnung der Erdbewegung folgerte. Es gelingt Sagnac, auf verschiedene Weise die Unrichtigkeit der Überlegungen Giuganinos nachzuweisen. Se.

M. LAUE. Über einen Versuch zur Optik der bewegten Körper. Münch. Ber. **41**, 405-412.

Der Verf. zeigt, daß ein von Michelson im Jahre 1904 vorgeschlagener Interferenzversuch [bei dem die tägliche Drehung der Erde eine ähnliche Rolle spielt wie ihre translatorische (jährliche) Bewegung in dem bekannten, nach Michelson benannten Versuch] keine Entscheidung liefern kann zwischen den verschiedenen Theorien bewegter Körper. Se.

E. RIECKE. Zur Theorie des Interferenzversuches von Michelson. Gött. Nachr. 1911, 271-277.

Der Verf. weist nach, daß der Michelson-Versuch kein eindeutiger Beweis für die Existenz der von H. A. Lorentz zu seiner Erklärung vorgeschlagenen Kontraktion bewegter Körper in der Bewegungsrichtung ist. Es gibt noch unendlich viele andere Möglichkeiten, welche die Beobachtungen Michelsons erklären können, wenn man auch eine Kontraktion senkrecht zur Bewegungsrichtung annimmt. Se.

J. ISHIWARA. Nachtrag zu meiner Untersuchung: Zur Optik der bewegten ponderablen Medien. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 2-8.

Der Nachtrag enthält in zwei getrennten Abschnitten relativ-theoretische Betrachtungen und eine Berichtigung über den Strahlungsdruck auf einen im Vakuum bewegten Körper, die veranlaßt wird durch die Benutzung eines anderen Ausdruckes für die elektromagnetische Bewegungsgröße an Stelle des in der oben genannten Arbeit benutzten. Se.

E. BUDDE. Zur Theorie des Michelsonschen Versuches. Physik. Zs. **12**, 979-991.

Gegen die übliche Deutung des Michelsonschen Versuches werden verschiedene Einwände erhoben. 1. Wenn man die wirkliche Bewegung der Erde im Äther haben will, so muß man die gänzlich unbekannte mittlere Bewegung derjenigen Gestirne gegen den Äther berücksichtigen, welche für die Positionsbeobachtungen benutzt worden sind. 2. Fehler, von denen jeder einzelne eine Wirkung haben kann, die von gleicher Ordnung ist wie das bisher errechnete Resultat. a) Statt der absoluten Längen der Lichtwege sind nach dem Dopplerschen Prinzip geänderte Längen in die Rechnung einzustellen. b) Die Dicke der durchsichtigen Glasspiegel darf nicht gleich Null gesetzt werden.

Der Verf. gibt eine Theorie des Michelsonschen Versuches unter Berücksichtigung dieser Umstände und schlägt dann vor, den Versuch in der Form zu wiederholen, daß in den Weg des einfallenden Lichtbündels zwei feine Spalte gebracht werden, deren Abstand voneinander b ist; dann müssen die für die Einzelstrahlen errechneten Ergebnisse mit großer Annäherung anwendbar werden. Die Erwägungen „geben das Mittel an, den Versuch konklusiv zu gestalten". Lp.

E. Budde. Das Dopplersche Prinzip für bewegte Spiegel und ein Versuch von Klinkerfues. Physik. Zs. 12, 725-729.

Der Verf. behandelt zunächst das Dopplersche Prinzip und wendet das Ergebnis dann auf einen von Klinkerfues erdachten Versuch an, der angestellt wurde, um zu prüfen, ob sich eine Bewegung der Erde im ruhenden Äther nachweisen läßt. Es ergibt sich, daß jener Versuch keinen Aufschluß über diese Frage liefern kann. Da aber Klinkerfues selbst eine kleine Abweichung im Sinne seiner Theorie beobachtet zu haben glaubte, wird ein abgeändertes Experiment beschrieben, das eine sehr einfache und scharfe Beobachtung gestattet; auch dieses liefert das von der Theorie vorausgesehene Ergebnis Null. Lp.

S. Pokrowsky. Über das Dopplersche Prinzip. Physik. Zs. 12, 1115-1119.

Diese Arbeit ist 1909 im Petersburger Physikerverein vorgetragen, 1910 im 42. Bande des Journ. Russ. Phys. Chem. Ges. erschienen und enthält im Anschluß an die Michelsonsche Arbeit über das gleiche Thema eine theoretische Studie, in der auch gezeigt wird, daß jede Drehung der Polarisationsebene eine Längenveränderung der Lichtwellen hervorruft. Grb.

A. Eichenwald. Über die Bewegung der Energie bei Totalreflexion. Ann. der Phys. (4) 35, 1037-1040.

Nach der Anschauung des Verf. findet für den Fall der Totalreflexion in beiden Medien (und nicht nur im zweiten) eine Energieströmung parallel der Grenzfläche statt; in beiden Medien kommen stehende Wellen zur Ausbildung,

deren Amplitude im ersten Medium eine periodische Funktion des Ortes, im zweiten eine mit zunehmendem Abstand von der Grenzfläche rasch abnehmende ist. Se.

P. P. Koch. Zahl der Zentren von Lichtemission und Intensitätsverhältnis verschiedener Interferenzordnungen. Physik. Zs. **12**, 12-14.

In der Abhandlung „Zahl der Zentren von Lichtemission und Intensitätsverhältnisse verschiedener Interferenzordnungen" (Wien. Ber. **119**, 779-797, 1910) hat Stark eine Reihe von Resultaten veröffentlicht, die er bei Beobachtungen an einem Beugungsgitter gefunden hat, und die, falls sie sich bewahrheiten sollten, geeignet wären, die derzeitigen Anschauungen von den Grundlagen der Optik umzustürzen. Der Verf. zeigt jedoch, daß jene Resultate mit einiger Wahrscheinlichkeit nicht bedingt sind durch die Eigenschaften des benutzten Gitters und der damit untersuchten Strahlung, sondern durch das von Stark angewandte photographisch-photometrische Meßverfahren. Lp.

C. Raveau. Franges d'interférence d'une source linéaire. C. R. **152**, 1155-1158.

Auf Grund eines allgemeinen, vom Verf. früher aufgestellten Theorems (Précis d'optique d'après Drude I, 215) untersucht der Verf. die Interferenzerscheinungen, die durch spezielle Konfigurationen von linearen Lichtquellen erzeugt werden. Die Betrachtungen basieren im wesentlichen auf der Methode der „rayons moyens" von Macé de Lépinay und Fabry. Se.

C. Raveau. Calcul de la différence de marche introduite par une lame mince isotrope. Journ. de Phys. (5) **1**, 127-128.

„Die Autoren, welche die Strenge mit der nötigen Sorgfalt wahren, beweisen die Gültigkeit der Relation $\delta = 2ne\cos r$ in ihrer Ausdehnung auf den Newtonschen Apparat oder eine prismatische Platte, während man den Beweis sonst gewöhnlich nur für eine planparallele Platte erbringt. In diesem letzteren Falle zeigen sie gleichfalls, daß eine dicke Platte die Gültigkeit jener Formel nicht hinfällig macht. Die folgende Schlußweise umfaßt unmittelbar alle möglichen Fälle." Lp.

H. Schulz. Über eine neue Interferenzerscheinung im parallelen Licht. Physik. Zs. **12**, 306-310.

Parallel zur Grundseite eines gleichschenkligen Prismas im bestimmten Abstand von der Kante befindet sich ein Spiegel. Ein auf die Seitenfläche des Prismas auffallender Strahl dringt teilweise ein, und der das Prisma verlassende

Strahl interferiert mit dem an der ersten Fläche und dann am Spiegel reflektierten Strahl, der die zweite Prismafläche trifft. Die hierauf bezüglichen Gleichungen werden aufgestellt und diskutiert. Grb.

F. Reiche. Die Berechnung einer einfachen Brechungserscheinung mittels des Huygensschen Prinzips. Ann. der Phys. (4) **34**, 177-181.

Es handelt sich um die Berechnung der Brechung einer ebenen Welle an der zylindrischen, beiderseits parallel der Achse durch Schirme begrenzten Grenzfläche zweier (durchsichtigen) Medien, die mit Hülfe des Huygensschen Prinzips erledigt wird. Da der Verf. sich jedoch auf den Fall beschränkt, daß die freie Zylinderfläche klein ist und ferner auf Aufpunkte nahe der Brennachse, erhält er dasselbe Resultat, das die bekannte rein geometrisch-optische Näherungsmethode ergibt. Se.

Cl. Schaefer und F. Reiche. Zur Theorie des Beugungsgitters. Ann. der Phys. (4) **35**, 817-859.

Die Arbeit bezweckt, den Einfluß des Gittermaterials zu untersuchen; man kann zu diesem Zweck nicht mehr das (rein geometrisch-optische) Fresnel-Huygenssche Prinzip zur Grundlage der Untersuchung wählen, sondern muß von den allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes ausgehen. Die Verf. führen die Rechnungen durch für ein frei im Raume stehendes und ein in die Öffnung eines undurchsichtigen Schirmes eingebettetes Gitter aus zylindrischen Stäben von gegebener Leitfähigkeit und Diëlektrizitätskonstante. Die reichen Resultate der Untersuchung sind am Schluß übersichtlich zusammengestellt. Se.

F. Biske. Die Krümmung der Spektrallinien beim Plangitter. Ann. der Phys. (4) **34**, 971-978.

Der Verf. stellt sich die besonders für die meßtechnische Praxis wichtige Frage, ob auch beim Plangitter ähnlich wie beim Prisma eine Krümmung der Spektrallinien vorhanden ist. Durch elementare Rechnung findet er die Existenz einer schwachen derartigen Krümmung, die mit dem Ablenkungswinkel zunimmt, und kann seine theoretischen Resultate experimentell bestätigen. Se.

M. Wolfke. Über die Abbildung eines Gitters bei künstlicher Begrenzung. (Auszug aus der Dissert. Breslau.) Ann. der Phys. (4) **34**, 277-310.

Die Arbeit gibt die Anwendung der Abbeschen Abbildungstheorie auf den speziellen Fall der Abbildung eines Gitters, von dem einzelne Teile systematisch abgeblendet sind. Besonders eingehend untersucht wird die Entstehung unähnlicher Abbildung. Se.

W. Voigt. Beiträge zu Lord Rayleighs Theorie der Gitterbeugung. Gött. Nachr. 1911, 41-57.

Die Ausführungen Voigts sind insofern eine Verallgemeinerung der Theorie von Rayleigh, als sie sich auf eine Gittersubstanz von beliebigem Absorptionsvermögen beziehen, während Rayleigh sich auf den Fall beschränkt, daß die (nicht zu tiefen) Gitterfurchen in die Oberfläche einer vollkommen reflektierenden oder vollkommen durchsichtigen Substanz eingeritzt sind. Die mathematische Durchführung beruht im wesentlichen auf einer Darstellung des Gitterprofils durch eine Fouriersche Reihe und in einer Integration der elektromagnetischen Differentialgleichungen mit den nötigen Grenzbedingungen durch eine Superposition ebener Wellen. Die Intensität der einzelnen Wellen bestimmt sich aus den Grenzbedingungen, die in Form von Potenzreihen nach der Furchentiefe dargestellt werden. Se.

F. Hopfner. Über ein Bestrahlungsproblem. Wien. Ber. **120**, 1473-1483.

Der Verf. behandelt in rein geometrisch-optischer Weise das Problem, die Zustrahlung einer rotierenden Kugel von seiten eines konzentrischen, gegen die Rotationsachse beliebig geneigten Kreisringes zu finden. Unter der Annahme, daß sowohl die Dicke des Ringes, wie der Radius der Kugel klein sind gegen den Radius des Ringes, läßt sich die Lösung auf Quadraturen zurückführen. Se.

P. Selényi. Über Lichtzerstreuung im Raume Wienerscher Interferenzen und neue, diesen reziproke Interferenzerscheinungen. Ann. der Phys. (4) 35, 444-460.

Der Verf. bezeichnet als Wienersche Interferenzen die vor einer reflektierenden Fläche durch Interferenz der einfallenden und der reflektierten Welle zustande kommenden Erscheinungen; er weist sie dadurch nach, daß er ähnlich wie Wiener in den Raum vor der reflektierenden Fläche einen Indikator auf den Lichtweg bringt, und zwar benutzt er im Gegensatze zu den bisherigen Anordnungen nicht eine fluoreszierende oder chemisch reagierende Substanz, sondern eine Schicht lichtzerstreuender Teilchen (z. B. Schwefelblume auf einer Glasfläche). Besonders interessant ist eine neue Art von Interferenzen, die dadurch zustande kommt, daß das direkt von einem Teilchen zerstreute Licht mit dem von einer planen Fläche reflektierten, primär ebenfalls von demselben Teilchen zerstreuten Licht interferiert, d. h. also, daß zwei Strahlen sich in der Interferenzerscheinung superponieren, die unter Winkel von über 90^0 von derselben Quelle (dem zerstreuenden Teilchen) ausgegangen sind. Diese Art von Interferenzen (und ebenso die analogen für den Fall einer fluoreszierenden Substanz an Stelle einer zerstreuenden erhaltenen) sind wichtig besonders im Hinblick auf die Rayleighsche Theorie der Beugung von kleinsten dielektrischen Teilchen. Se.

E. Waetzmann und O. Lummer. Neue Interferenzkurven gleicher Neigung. Ann. der Phys. (4) **36**, 383-394.

Die von dem Verf. beschriebenen Interferenzkurven sind Kurven gleicher Neigung und stellen sich als ein Spezialfall einer allgemeinen Klasse von Interferenzerscheinungen dar, die Michelson beschrieben hat. Man vgl. das ausführliche Referat in Fortschritte d. Phys. $\mathbf{67}_2$, 378. Se.

G. Meslin. Étude sur la structure des raies spectrales à l'aide d'appareils à grande dispersion. Ann. de Chim. et Phys. (8) **24**, 87-133.

„Da ich beim Studium des Baues der Spektrallinien dazu geführt wurde, stark zerstreuende Apparate zu benutzen, die, wie das Stufengitter von Michelson oder die Platte von Lummer und Gehrcke, in Frankreich wenig verbreitet sind, so will ich hier die Beobachtungen zusammenstellen, die ich mit diesen Interferenzapparaten angestellt habe und gleichzeitig einige interessante Punkte ihrer Theorie scharf fassen oder einige Zweifel beheben, die bei ihrer Anwendung sich einstellen.“ Lp.

C. A. Skinner und L. B. Tuckermann jr. Halbschatteninterferometer (Half shade interferometers). Physik. Zs. **12**, 620-626.

Beide Verf. beschäftigten sich zwei Jahre mit dem Entwurf und der Herstellung eines Interferometers, das im Typus den Instrumenten von Pokrowski und Cotton ähnelt. In dem vorliegenden Artikel erörtern sie die Vorzüge der einzelnen vorgeschlagenen Instrumente und ihre theoretische Empfindlichkeit. Ferner fassen sie kurz die Ergebnisse zusammen, die sie mit ihrer Instrumentform bisher erzielt haben. Lp.

H. Vigneron. Répartition des raies spectrales dans des spectres d'émission. Théorie de Ritz. Journ. de Phys. (5) **1**, 294-301, 381-388.

„Die Theorie der Elektronen bemüht sich bis jetzt vergebens, die Gesamtheit der Tatsachen zu begreifen; die Ritzsche Theorie, welche infolge des vorzeitigen Todes ihres Begründers in einem embryonalen Zustande geblieben ist, verdient es vermöge ihrer Einfachheit, daß sie in Betracht gezogen wird. Damit sie aber Annahme finde, ist es nötig, daß sie die Gesamtheit der Beobachtungen deutet, sie mit anderen Gebieten in Verbindung setzt, vor den anderen Erklärungsarten den Vorzug der Ökonomie des Denkens bietet. Wie dem auch sei, sie scheint zurzeit der Aufmerksamkeit mit derselben Berechtigung wert zu sein wie die Lorentzschen Theorien; daher haben wir gemeint, sie etwas eingehender darlegen zu sollen.“ Lp.

P. Weiss. Une idée de Walter Ritz sur les spectres des bandes. C. R. 152, 585-588.

In Analogie zu seiner Theorie der Serienspektren hat W. Ritz einen Entwurf einer Theorie der Bandenspektren gegeben. Im wesentlichen denkt sich Ritz als Träger der Bandenspektren eine Kette von Elementarmagneten, die unter dem Einfluß einer Spannung und eines äußeren magnetischen Feldes schwingt. Für die Schwingungszahlen der einzelnen Teilchen ergibt sich ein Gesetz (in Gestalt einer Potenzreihe nach einem Parameter), das in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen ist. Se.

T. Krawetz. Über einen möglichen Unterschied zwischen Emissions- und Absorptionsspektren. Physik. Zs. 12, 510-511.

Durch eine theoretische Betrachtung gelangt der Verf. zu dem Ergebnis, daß im Absorptionsspektrum eine Linie fehlt, die im Emissionsspektrum vorhanden war. Eine allgemeine Überlegung soll dies verständlich machen (vgl. das folgende Referat). Lp.

U. Meyer. Über einen möglichen Unterschied zwischen Emissions- und Absorptionsspektrum. Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Krawetz. Physik. Zs. 12, 869-870.

In der Ableitung von Krawetz sind zu Unrecht die Schwingungen eines Systems den Schwingungen der ausgesandten Strahlungen gleichgesetzt. Führt man die Rechnungen unter Berücksichtigung dieser Tatsache durch, so kommt man auch hier zu einer vollen Übereinstimmung zwischen Emission und Absorption. Lp.

W. H. Julius. Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmassa's. Amst. Ak. Versl. 19, 1007-1022; Physik. Zs. 12, 329-338.

Der Verf. diskutiert die Natur des in der Schwingungsgleichung eines quasielastisch im Atom gebundenen Elektrons auftretenden und in der Theorie der Dispersion zunächst rein formal eingeführten Dämpfungsgliedes und denkt sich dieses aus zwei Teilen zusammengesetzt. Der eine Teil repräsentiert die von Planck vorgeschlagene Strahlungsdämpfung, der zweite Teil die kinetische Dämpfung von H. A. Lorentz. Aus der Hypothese, daß in der Nähe der Eigenschwingung des Elektrons in erster Linie die kinetische, in größerer Entfernung davon die Strahlungsdämpfung in Betracht kommt, kann er einige merkwürdige Erscheinungen an den Absorptionslinien in der Sonne erklären, die durch Absorption und Zerstreuung in sehr dicken Gasschichten zustande kommen. Se.

W. Voigt. Allgemeines über Emission und Absorption in Zusammenhang mit der Frage der Intensitätsmessungen beim Zeeman-Effekt. Nach Beobachtungen von C. Försterling. Mit einem Zusatz von H. A. Lorentz. Gött. Nachr. 1911, 71-97.

Die Arbeit stellt in der Hauptsache eine Untersuchung der Emissions- und Absorptionsverhältnisse in einer leuchtenden Flamme dar, die unter der Annahme reiner Temperaturstrahlung (strenger, d. h. Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes) durchgeführt wird. Im weiteren wird gezeigt, inwiefern die obigen Betrachtungen von Wichtigkeit sind als Grundlage für Intensitätsmessungen von Spektrallinien, und endlich werden einige Beobachtungen von Försterling über die Polarisationsverhältnisse im Zeeman-Effekt angeführt. H. A. Lorentz gibt in einem Zusatz eine Behandlung derselben Fragen von anderen Gesichtspunkten aus. Se.

W. Voigt. Zur Theorie der komplizierteren Zeeman-Effekte. Ann. der Phys. (4) **36**, 873-906.

Nach einer eingehenden Kritik des von Ritz vorgeschlagenen Atommodelles, das zu Folgerungen führt, die teilweise nicht mit der Erfahrung übereinstimmen, gibt der Verf. eine ausführliche und erweiterte Darstellung seiner eigenen Theorie, die er selbst als eine Modifikation der H. A. Lorentzschen Koppelungstheorie bezeichnet. Se.

W. Voigt. Zur Frage der Dissymmetrie der Zeemanschen Triplets. Ann. der Phys. (4) **35**, 101-108.

P. P. Koch. Zur Frage der Dissymmetrie der Zeemanschen Triplets. Bemerkung zu einer Veröffentlichung des Herrn Voigt. Ann. der Phys. (4) **35**, 1034-1036.

W. Voigt. Zwei Antworten. Ann. der Phys. (4) **36**, 866-870.

W. Voigt zieht die Beobachtungen von P. P. Koch über die Intensitätsverteilung in Spektrallinien zur Bestätigung seiner Theorie über dissymmetrische Triplets heran. Dem gegenüber bezweifelt Koch die Beweiskraft seiner Resultate in dieser Richtung. In der zweiten Antwort geht Voigt auf die Untersuchungen von Eichenwald sowie von Schaefer und Groß ein und nimmt zu deren Resultaten kritisch Stellung. Se.

C. Zakrzewski. Über die optischen Eigenschaften der Metalle. (Zweite Mitteilung.) Krak. Anz. 1911, 314-329.

Die in der Lorentzschen Theorie eine Rolle spielende Verteilungsfunktion für die Lagen und Geschwindigkeitskoordinaten der Elektronen im Metall, die auch unter der Einwirkung einer äußeren Kraft sich nur wenig von der Maxwellschen unterscheidet, sucht der Verf. auch für den Fall des nicht

stationären Zustandes zu bestimmen, insbesondere für den in der Optik in Betracht kommenden Fall, daß die äußere Kraft periodisch mit der Zeit sich ändert und daß die Dauer der Periode vergleichbar ist mit der Dauer der mittleren freien Weglänge. Mit dieser Verteilungsfunktion als Grundlage gibt der Verf. dann Betrachtungen über die Optik der Metalle, insbesondere über strahlungstheoretische Probleme. Se.

N. Salli und K. Försterling. Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das optische Verhalten dünnster Metallschichten. Gött. Nachr. 1911, 58-70.

Die Verf. stellten sich Metallschichten von möglichst geringer Dicke auf einem durchsichtigen Material her (z. B. Silberniederschlag, durch Formaldehyd aus einer Silberlösung auf einer Glasplatte niedergeschlagen) und untersuchten sowohl das von dieser Schicht reflektierte (mit Fueßschem Polarisationsspektrometer) wie das durchgegangene Licht (Spektralphotometer von Martens und Grünbaum). Die Beobachtung der Polarisationszustände und der Absorptionsverhältnisse ergab sich qualitativ und quantitativ in befriedigender Übereinstimmung mit der im ersten Teil der Arbeit entwickelten Theorie. Se.

K. Försterling. Formeln zur Berechnung der optischen Konstanten einer Metallschicht von beliebiger Dicke aus den Polarisationszuständen des reflektierten und des durchgegangenen Lichtes. Gött. Nachr. 1911, 449-454.

Die Arbeit bringt eine Erweiterung der in einer früheren Arbeit gegebenen Formeln (vgl. vorhergehendes Referat) für den Fall, daß die Dicke der Metallschicht beliebig und nicht mehr der Beschränkung $4\pi n_1 c_1 l/\lambda$ klein neben 1 unterworfen ist. Anschließend werden einige Beobachtungsresultate an Silber- und Platinschichten mitgeteilt und mit der Theorie verglichen; es ergibt sich befriedigende Übereinstimmung. Se.

A. Signorini. Sulle vibrazioni luminose di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 555-562.

Der Artikel ist ein Auszug aus der Habilitationsschrift des Verf., die 1912 in Pisa Ann. **12** erschienen ist: Sulla teoria analitica dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici". Weder die Formeln, die Lamé für die Lösung der Aufgabe gegeben hat, noch die von Grünwald in Wien. Ber. **111**, 411-485 (F. d. M. **33**, 854, 1902) entwickelten genügen den Ansprüchen der Strenge. Der Verf. gelangt zu seiner Lösung durch eine Methode, die derjenigen analog ist, welche Kirchhoff in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der Lichtstrahlen" benutzt hat (Berl. Ber. 1882, 641-669; F. d. M. **14**, 829).

Seine Rechnungen ergeben die Schwingungskomponenten als aus vier Teilen bestehend. Zwei von ihnen breiten sich als sphärische und als ellipsoidische Wellen aus; die beiden anderen haben nicht den Charakter einfacher fort-

schreitender Wellen, sondern werden von dauernden Schwingungen des von den beiden ersteren Wellen durchzogenen Raumes veranlaßt. Unmerklich werden diese Anteile bei periodischen Schwingungen mit sehr kurzer Schwingungsdauer oder bei großer Entfernung der Lichtquelle. Die Abweichung, welche die strenge Theorie von der in üblicher Weise angenommenen Fortpflanzung einer ordentlichen sphärischen und einer außerordentlichen ellipsoidischen Welle ergibt, kommt daher für optische Beobachtungen nicht in Betracht.
Lp.

J. Boussinesq. Calcul de l'absorption dans les cristaux translucides, pour les systèmes d'ondes planes latéralement indéfinies. C. R. **152**, 1808-1813.

J. Boussinesq. Calcul de l'absorption dans les cristaux translucides, pour un pinceau de lumière parallèle. C. R. **153**, 16-21.

J. Boussinesq. Construction simple (en recourant seulement aux deux ellipsoïdes inverse et direct) de la vibration, du rayon lumineux et de la vitesse de ce rayon, pour chacun des deux systèmes d'ondes planes de direction donnée propagés dans un cristal transparent. C. R. **152**, 1721-1726.

J. Boussinesq. Contribution à l'optique cristalline. Journ. de Math. (6) **7**, 317-348.

Eine Reihe zum Teil allgemein optischer, zum Teil kristalloptischer Arbeiten, die alle auf dem Boden der Elastizitätstheorie des Äthers als des Mediums der Lichtausbreitung stehen.
Se.

Fr. Schwietring. Über den Polarisationswinkel der durchsichtigen inaktiven Kristalle. Berl. Ber. 1911, 423-435.

Die von F. Neumann gegebene Theorie über den Polarisationswinkel der durchsichtigen aktiven Kristalle, die den Vorzug großer Allgemeinheit hat, und die Betrachtungsweise von McCullagh, die rein geometrisch und deshalb von größerer Anschaulichkeit ist, werden in der vorliegenden Arbeit verschmolzen zu einer Darstellung, welche die Vorzüge der beiden Methoden vereinen soll. Es gelingt dies im wesentlichen durch die Tansformation der Neumannschen Rechnungen auf die uniradialen Polarisationsrichtungen, und auf diesem Wege ergibt sich eine anschauliche geometrische Interpretation der allgemeinen Neumannschen Resultate.
Se.

U. Lala et É. Turrière. Importance physique des ellipsoïdes à plans cycliques orthogonaux. Assoc. Franç. Toulouse **39**, 223-227.

Ein auf seine Hauptachsen bezogenes Ellipsoid $(E) x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ hat eine gleichseitige Fokalhyperbel, wenn $(a > b > c)$ $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$. In diesem Falle hat das in bezug auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ polarreziproke

Ellipsoid $(E') a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$ orthogonale Kreisebenen. Die Ellipsoide (E') mit orthogonalen Kreisebenen treten in der Elektrooptik als solche Ellipsoide der Indizes auf, bei denen die optischen Achsen oder die Achsen innerer konischer Brechung senkrecht zueinander sind. Da die optischen Achsen die Normalen zu den Kreisebenen des Ellipsoides (E) sind, so bilden sie mit der x-Achse Winkel i, für welche

$$\sin i = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad \operatorname{tang} i = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}, \quad \cos 2i = \frac{a^2 + c^2 - 2b^2}{a^2 - c^2}$$

ist. Der Ausdruck für $\cos 2i$ zeigt, daß die Achsen der inneren konischen Brechung einen stumpfen, rechten, spitzen Winkel bilden, je nachdem $a^2 + c^2 - 2b^2$ negativ, Null, positiv ist. Demgemäß wird der betrachtete Körper negativ oder positiv genannt. Die gegenwärtige Note bezweckt den Nachweis der Möglichkeit, daß ein und derselbe Körper negativ für gewisse Strahlen, positiv für andere sein kann. Wegen der Stetigkeit des Brechungsindex n als Funktion der Wellenlänge gibt es dann einen Strahl, und zwar nur einen, für den (E') das Ellipsoid der Indizes ist. Lp.

A. B. Basset. The connection between the singularities of surfaces and double refraction. Quart. J. **42**, 171-176.

Der Verf. hat die Eigenschaften der Flächen bereits früher in verschiedenen Abhandlungen und in einem größeren Werke behandelt und wendet sich nun den optischen Erscheinungen zu, die durch die besonderen Eigentümlichkeiten der Flächen bedingt sind. Die Ergebnisse, die sich auf diesem Wege erzielen lassen, liefern einen strengen Wahrheitsbeweis für die Richtigkeit der Fresnelschen Theorie der Doppelbrechung. Pz.

J. Schmutzer. Over de oriënteering van kristaldoorsneden. Amst. Ak. Versl. **19**, 1161-1165.

Die Arbeit behandelt die kristallographische Orientierung eines Schliffes und gründet sich auf die Beobachtung der Richtungen der Spuren dreier ungleichartigen Kristallflächen. Pz.

J. Schmutzer. Over de vaststelling van de richting van een onbekend vlak uit zijne traces in twee georiënteerde kristalsneden. Amst. Ak. Versl. **19**, 1176-1177.

Es handelt sich um die Feststellung der Richtung einer unbekannten Fläche aus ihren Spuren in zwei orientierten Kristalldurchschnitten. Pz.

J. Schmutzer. Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoovingshoek ten opziehte van de trace van een willekeurige kristalsnede. Amst. Ak. Versl. **19**, 1165-1175.

Der Verf. beschäftigt sich mit der Berechnung des optischen Achsenwinkels aus dem Auslöschungswinkel bezüglich der Spur einer beliebigen Fläche in einem willkürlich gelegten Kristalldurchschnitt. Pz.

J. Schmutzer. Over de oriënteering van kristaldoorsneden met behulp van de traces van twee vlakken en de optische uitdooving. Amst. Ak. Versl. **20**, 35-38.

Die Arbeit behandelt die Orientierung von Kristalldurchschnitten mit Hülfe der Spuren zweier Flächen und der optischen Auslöschung. Pz.

G. Meslin. Sur les vitesses des circulaires inverses dans la polarisation rotatoire. C. R. **152**, 1841-1843.

Es handelt sich um die Geschwindigkeiten S und D der beiden zirkular polarisierten Wellen, die sich parallel der Achse eines Quarzkristalles fortpflanzen. Cornu hat zwischen diesen die Beziehung angegeben $S+D=2w$, worin w die Geschwindigkeit des regulären Strahles (senkrecht zur Achse) ist, und hat bereits zwei Methoden der experimentellen Prüfung dieser Beziehung vorgeschlagen. Die eine von diesen beruht auf einem Interferenzverfahren unter Verwendung einer Quarzdoppelplatte mit gekreuzten Achsen, und G. Meslin zeigt nun durch eine einfache Rechnung, wie die von Cornu angegebenen Interferenzen sich allgemein deuten lassen. Er findet, daß beim Durchgang durch die Quarzplatte sowohl der ordinäre, wie der extraordinäre Strahl in zwei Teile gespalten, daß außerdem der extraordinäre seitlich verschoben wird. Se.

G. Meslin. Sur le pouvoir dispersif des combinaisons de prismes. Application aux spectroscopes. Journ. de Phys. (5) **1**, 88-104, 208-213.

„Viele Spektroskope sind so eingerichtet, daß man eine veränderliche Zerstreuung erhält, je nach der Anzahl von Prismen, die man auf dem Wege des Lichtbündels einschaltet, und bei einer großen Anzahl dieser Apparate verdoppelt man das Zerstreuungsvermögen, indem man die Anzahl der eingeschobenen Elemente verdoppelt. Aber diese Proportionalität ist durchaus nicht eine feststehende Regel; wir werden sehen, daß sie nur unter ganz besonderen Symmetriebedingungen verwirklicht ist oder in dem Falle des Minimums der Ablenkung für das zwischengeschobene Element. In dem allgemeinsten Falle, bei dem nicht jedes Element in zwei symmetrische und symmetrisch durchlaufene Hälften zerlegbar ist, besteht die in Rede stehende Eigenschaft nicht mehr; sie wird durch eine verwickeltere Beziehung ersetzt, deren Folgen auf den ersten Blick seltsam erscheinen, besonders wenn man gleichzeitig zusieht, was

geschieht, wenn nach Umkehrung jedes Elementes von dem einen Ende bis zum anderen das System im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird.“ Diese Aussagen werden durch die rechnerische Behandlung der zahlenmäßigen Prüfung unterworfen. Lp.

A. SOMMERFELD. Über die Struktur der γ-Strahlen. Münch. Ber. 1911, 1-60.

Der Verf. nimmt an, daß ein γ-Strahl der bei der Aussendung, d. h. plötzlichen Beschleunigung eines β-Teilchens entstehende Impuls sei, und gründet auf diese Annahme eine Theorie der γ-Strahlen, die seiner bekannten „Bremstheorie“ der Röntgenstrahlen ganz analog ist. Die weitere Ausführung ergibt eine Reihe wichtiger und interessanter Zusammenhänge zwischen der Richtung und Energie der β-Teilchen und den entsprechenden Größen der γ-Strahlen. Es sei hier nur hervorgehoben, daß nach Sommerfelds Theorie die maximale Intensität des γ-Strahles fast mit der Bewegungsrichtung des β-Teilchens zusammenfällt, so daß die γ-Strahlen, trotzdem sie Ätherimpulse sind, die lokalisierte Struktur einer Korpuskularstrahlung haben. Se.

P. EHRENFEST. Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle? Ann. der Phys. (4) **36**, 91-118.

Die drei Strahlungsgesetze von Jeans, Planck und Wien zielen darauf hinaus, im Wienschen Verschiebungsgesetz

$$\varrho(\nu T)\,d\nu = \nu^3 f\left(\beta\frac{\nu}{T}\right)d\nu$$

die Funktion f zu bestimmen. Der Verf. stellt nun an die Spitze seiner Betrachtungen zwei Forderungen, d. h. Bedingungen für f, die zu einem Anschluß an die Erfahrung notwendig sind, nämlich 1. die „Rotforderung“ $\lim\limits_{\sigma=1}\{\sigma f(\sigma)\}=1$, 2. die „Violettforderung“ $\lim\limits_{\sigma=\infty}\{\sigma^4 f(\sigma)\}=0$. Dazu kann man noch weiter verlangen („verstärkte Violettforderung“), daß

$$\lim_{\sigma=\infty}\frac{f(\sigma)}{e^{-L\sigma}} = \text{const} \neq \sigma.$$

Im folgenden leitet dann der Verf. gewisse Bedingungen ab, an welche ein Ansatz für die Wahrscheinlichkeit $\gamma(\nu E)\,dE$ dafür, daß ein Freiheitsgrad ν eine Energie zwischen E und $E + dE$ besitzt, gebunden ist, wenn die obigen drei Forderungen erfüllt sein sollen. Se.

L. NATANSON. On the statistical theory of radiation. Krakauer Anz. (A) 1911, 134-148; Physik. Zs. **12**, 659-666.

Bei der Ableitung des Strahlungsgesetzes handelt es sich in letzter Linie um einen Ansatz für die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Verteilung von n

Energieelementen ($h\nu$) auf N Resonatoren. Um zu einem solchen Ansatz zu gelangen, schlägt der Verf. den von Planck beschriebenen Weg ein, indem er annimmt, daß zwar die Resonatoren, nicht aber die Energieelemente voneinander bei allen möglichen gleichwahrscheinlichen Verteilungen zu unterscheiden sind, d. h. daß die Verteilung nach dem Schema erfolgt:

1. Resonator erhält n_1 Energieelemente,
2. Resonator erhält n_2 Energieelemente,

. .

. .

N. Resonator erhält n_N Energieelemente.

Aus der Bedingung, der die Zahlen N_i genügen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{N!}{\sum\limits_{i=0}^{i=p} N_i!}$$

ein Maximum wird, ergibt sich eine Herleitung des Planckschen oder des Jeansschen Strahlungsgesetzes, je nachdem die Zahl der Energieelemente groß oder klein ist gegen die Zahl der Resonatoren. Se.

M. Planck. Zur Hypothese der Quantenemission. Berl. Ber. 1911, 723-731.

Bei der ersten Ableitung des Strahlungsgesetzes ging der Verf. bekanntlich von der Annahme eines diskontinuierlichen, stets nur nach ganzen Vielfachen des Energieelements $\varepsilon = h\nu$ erfolgenden Emission und Absorption aus. Für die Absorption wird nun diese Annahme fallen gelassen und nur für die Emission beibehalten. Dabei soll Emission nur dann eintreten können, wenn der Energieinhalt des betreffenden Resonators gerade ein ganzes Vielfaches $n\varepsilon$ von ε ist, dann aber soll stets die ganze vorhandene Energie emittiert werden. Se.

A. Weber. Geschwindigkeitsänderung eines bewegten Hohlraums infolge von Kompression. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 311-312.

Aus den bekannten Formeln von Planck für die Bewegungsgröße leitet der Verf. ab, wie die Geschwindigkeit eines bewegten Hohlraumes verlangsamt wird bei einer Kompression senkrecht zur Bewegungsrichtung. Se.

A. Weber. Die Transformation von Energie und Bewegungsgröße. Zs. f. Math. u. Phys. **59**, 313-314.

Der Verf. gibt eine Ableitung der Gleichungen zur Transformation der Energie und der Bewegungsgröße einer Hohlraumstrahlung auf ein bewegtes System. Se.

S. Pokrowsky. Anwendung des Prinzips virtueller Verschiebungen auf die in eine Strahlung versenkten Systeme. Physik. Zs. **12**, 1118-1125.

Für die ponderomotorische Kraft F der Strahlung, welche auf irgendeinen die Lage eines Systems hinsichtlich des Stroms charakterisierenden Parameter φ einwirkt, leitet der Verf. die Formel ab:

$$F = \varepsilon\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}. \tag{2}$$

Hierin ist ε die Volumendichte der die gesuchte Wirkung bedingenden Energie. Es genügt also, die Volumendichte der auf die Wellenlänge bezogenen Strahlungsenergie, d. h. $\varepsilon\lambda$, mit $\partial\alpha/\partial\varphi$ zu multiplizieren, wo $\partial\alpha/\partial\varphi$ die Derivierte der in die Strahlung durch dieses System hineingebrachten Phasenveränderung nach dem gegebenen Parameter φ ist.

Die Gleichung (2) zeigt, daß das Dopplersche Prinzip nur die notwendige Folge des Bestehens ponderomotorischer Strahlungskräfte und des Prinzips der Energieerhaltung ist. In jeder Strahlung sind dem äußeren Einfluß nur zwei den Strom charakterisierende Parameter unterworfen, nämlich die Phasen und die Amplituden der zum Bestande des Stromes gehörenden Lichtschwingungen. Auf Grund solcher Erwägungen schließen wir, daß die Arbeit beliebiger ponderomotorischer Strahlungskräfte nur auf Rechnung der entsprechenden Veränderungen der Strahlenphasen, nicht aber der Strahlenamplituden vor sich gehen kann. Daher sind alle rein mechanischen Wechselwirkungen der Strahlung mit beliebigen Systemen nur auf Rechnung der Phasenveränderungen, die thermischen nur auf Rechnung der Amplitudenveränderungen zu schreiben. Erstere Wechselwirkungen sind umkehrbar, die letzteren aber nicht, da sie stets nur nach einer Seite hin, nämlich nach der der Amplitudenverkleinerung (Absorption) möglich sind. Nach Gleichung (2) werden alle Verschiebungen der Systeme, die in einem gewissen Zusammenhange mit der Arbeit ponderomotorischer Strahlungskräfte stehen, von einer Phasenveränderung der Strahlen, d. h. von der Dopplerschen Erscheinung begleitet.

Die Formel (2) wird dann auf einige spezielle Fälle angewandt: 1. Idealer Spiegel. 2. Absorbierende Fläche. 3. Planparallele Platte. Lp.

A. Blondel et J. Rey. Sur la perception des lumières brèves à la limite de leur portée. Journ. de Phys. (5) **1**, 530-550; C. R. **153**, 54-56.

A. Blondel et J. Rey. Application aux signaux de la loi de perception des lumières brèves à la limite de leur portée. Journ. de Phys. (5) **1**, 643-655.

Zusammenfassung und Folgerungen: „Wir haben gezeigt, wie man kraft theoretischer Betrachtungen die wahrscheinlichste Form des Gesetzes im voraus ermitteln kann, um die Beziehung zwischen der Intensität und der Dauer eines kurzen Lichtes zu bestimmen, die das Minimum eines wahrnehmbaren Sinneseindrucks hervorruft. . . . Wenn man eine große Zahl von Messungen vergleicht, die von zahlreichen Experimentatoren angestellt sind, und vermöge der Berech-

nung der geometrischen Mittel die auseinandergehenden Ergebnisse ausgleicht, so erhält man eine Bestätigung, die man als recht befriedigend ansehen kann, für das Gesetz, das wir zwischen den Beleuchtungen und den Dauerzeiten ihrer Wirkung auf die Pupille gesucht haben. In dem Falle des Gebrauches gleichmäßiger Helligkeit läßt sich das Gesetz in der einfachen Form $(E - E_0)\,t = aE_0$ ausdrücken, wo E_0 die kleinste wahrnehmbare Helligkeit ist, a eine Zeitkonstante, ungefähr 0,21 Sekunden. Danach haben wir gezeigt, wie man durch eine einfache Integration hieraus das Gesetz für nicht gleichförmige Helligkeiten ableiten kann, ebenso ihre Tragweite und die Intensität konstanten Lichtes von gleicher Tragweite. Endlich haben wir durch die Anwendung des erwähnten Gesetzes und durch die Betrachtung der Wahrnehmungskurven von Broca und Sulzer festgestellt, daß die maximale Ausnutzung einer Lichtquelle kurzes Aufleuchten verlangen muß, ohne daß man sich um eine untere Dauergrenze des Aufleuchtens zu kümmern braucht, abgesehen von dem Falle, wenn es sich um Fernsignale handelt." Lp.

L. P. Wheeler. An experimental investigation on the reflexion of light at certain metal-liquid surfaces. Phil. Mag. (6) 22, 229-245.

Es wird untersucht, ob eine Zwischenschicht auf der Oberfläche metallisch glänzender Flüssigkeiten, insbesondere eine gasförmige, für die Anomalien bei den Beobachtungen der Reflexion an flüssigen Metallflächen verantwortlich zu machen ist. Die Theorie, soweit sie überhaupt eine Rolle spielt, lehnt sich eng an Drude an. Br.

A. Stephenson. On absorption and dispersion. Phil. Mag. (6) 22, 303-305.

Grundzüge zu einer Theorie des Verlustes an optischer Energie, der durch die Reaktionsfähigkeit eines Mediums für verschiedene Wellenlängen für das durchfallende Licht einer bestimmten Wellenlänge verursacht wird. Br.

R. B. Sangster. Some consequences of Fresnel's reflexion of light theory, with formulae for determining the angle of incidence in order to reflect $1/n^{\text{th}}$ the incident light. Phil. Mag. (6) 22, 305-322.

Das Thema der Arbeit geht aus dem Titel hinreichend hervor. Die Folgen, an sich ohne rechten Zusammenhang, betreffen in der Hauptsache den Fall streifender Inzidenz, aber auch den der wiederholten Reflexion zwischen planparallelen Platten. Br.

Carl Barus. Interferometry with the aid of a grating. Phil. Mag. (6) 21, 411-434.

Bei der Michelsonschen Anordnung wird an Stelle des schrägen Spiegels, der die Strahlen den Kollimatorspiegeln zuwirft, ein Gitter angebracht, und dessen Wirkung rechnerisch diskutiert. Br.

Carl Barus. Elliptic and other interference with reflecting gratings. Phil. Mag. (6) **22**, 118-129.

Verf. beschreibt und diskutiert verschiedene Arten der Anordnung von Spiegelgittern beim Michelsonschen Interferometer. Br.

A. E. Oxley. On apparatus for the production of circularly polarized light. Phil. Mag. (6) **21**, 517-532.

Diskussion über den Einfluß, den der Einfallswinkel des Strahles auf die Güte der Zirkularpolarisation hat. Br.

Lord Rayleigh. Aberration in a dispersive medium. Phil. Mag. (6) **22**, 130-132.

Für die astronomischen Methoden der Aberrationsbestimmung wird in einem dispergierenden Medium der Einfluß bestimmt, den der Unterschied von Wellengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit auf das Resultat haben kann. Br.

T. H. Havelock. Optical dispersion: an analysis of its actual dependence upon physical conditions. Lond. R. S. Proc. (A) **84**, 493-523.

Die Analysis bleibt zum größten Teil in den Anfängen stecken. Es werden in der Hauptsache die plausibelsten Formeln entwickelt, die die Variabilität der Dispersion mit Temperatur, Druck usw. ergeben. Auch die wärmetheoretischen Größen werden als änderungsbestimmend in Betracht gezogen. Br.

T. H. Havelock. Optical dispersion: a comparison of the maxima of absorption and selective reflection for certain substances. Lond. R. S. Proc. (A) **86**, 1-14.

Geht auf die im Titel angegebene Spezialfrage der Stellen größter Absorption im anomalen Spektrum etwas näher ein, um den Vergleich der entwickelten Formeln mit Beobachtungsdaten zu ermöglichen. Br.

E. T. Whittaker. On the dynamical nature of the molecular systems which emit spectra of the banded type. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 262-270.

Es wird ein schematisches Molekülmodell konstruiert, dessen Energie sich aus den einzelnen Atomenergien und deren Bewegungsenergien zusammensetzt, die aus den Bewegungen der Atome umeinander resultieren. Die Ansätze für diese Energieformen werden in mathematischen Bezugszeichen ausgedrückt, und ebenso werden die speziellen Formen angegeben, die diese Ausdrücke annehmen müssen, wenn man sie als Darstellungen von Bandenspektren auffassen können soll. Br.

Weitere Literatur.

C. Barus. The production of elliptic interferences in relation to interferometry. Washington: Carnegie Inst. VI u. 77 S. 8°.

G. F. Becker. Some new mechanical quadratures. Amer. J. of science **31**, 117-126.

L. Bloch. Récentes hypothèses sur la structure de la lumière. Revue scient. **15**, 330-336.

G. Castelnuovo. Il principio di relatività e i fenomeni ottici. Scientia **17**, 64-86.

R. S. Clay. Treatise on practical light. London: Macmillan and Co., Ltd. XV u. 519 S. [Nature 88, 511, 1912.]

A. Cotton. Une théorie du phénomène de Zeeman: la théorie de Ritz. Rev. générale des sc. **22**, 597-602.

P. Drude. Précis d'optique publié d'après l'ouvrage de P. Drude, refondu et complété par M. Boll. Tome I: Optique géométrique, optique ondulatoire. Paris: Gauthier-Villars. X u. 376 S. 8°.

R. T. Glazebrook. Heat and light: an elementary textbook, theoretical and practical. New York: Putnam. 434 S. 12mo (1910). [Cambridge physical series.]

G. Green. Illustration of the modus operandi of the prism. Edinb. Roy. Soc. Proc. **31**, 290-295.

Illustration der Wirkung des Prismas durch Vergleich mit einem bestimmten Wellenbilde (wave-pattern). J.

H. Lüdtke. Beiträge zur Behandlung der elektromagnetischen Lichttheorie. Abhdl. zur Didaktik der Naturw. 2, 5. Heft. 120 S. (Berlin: Springer.)

F. W. McNair. Note on a method in teaching optical mineralogy. Amer. J. of science **31**, 292-296.

S. Pokrowsky. Über das spektrophotometrische Verschiebungsgesetz. (Vorläufige Mitteilung.) Physik. Zs. **12**, 549-550.

H. Sechovsky. Über Interferenz des Lichtes in einer dünnen Glasplatte und über Lummers Methode zur Trennung der Spektrallinien. Progr. Gymn. Mährisch-Ostrau. 13 S. (Böhmisch.)

W. H. Topham. Elementary light, theoretical and practical. London: Arnold. 220 S. 8°.

A. P. Trotter. Illumination, its distribution and measurement. London: Macmillan and Co., Ltd. XVII u. 292 S. [Nature 88, 72-73.]

J. Trowbridge. A new emission theory of light. Amer. J. of science 31, 51-54.

R. W. Wood. Physical optics. Revised and enlarged edition. New York: Macmillan. XVI u. 705 S. 8°.

F. E. Wright. Transmission of light through transparent inactive crystal plates, with special reference to observations in convergent polarized light. Amer. J. of science 31, 157-211.

P. Zeeman. Le cas général de la décomposition magnétique des raies spectrales et son application en astrophysique. Journ. de Phys. (5) 1, 442-460.
Zusammenfassender Vortrag vor der Société française de Physique.

B. Geometrische Optik.

W. Hinrichs. Einführung in die geometrische Optik. Leipzig: G. J. Göschen. 114 S. 8°. 55 Fig. (Samml. Göschen Nr. 532.)

Das vorliegende Büchlein behandelt in elementarer und klarer Form die Gesetze der geometrischen Optik, allerdings ohne auf die Aberration und Dispersion einzugehen. Überflüssig ist es wohl, zu erwähnen, daß natürlich, wie es bei einer „Einführung" auch richtig ist, nur ein parachsiales Bündel verfolgt wurde. Zu einem praktischen Werte gelangt die Schrift durch die verhältnismäßig große Anzahl von Aufgaben, die den einzelnen Kapiteln angefügt sind. Die Behandlung der Konvergenz- und Dioptrierechnung ist neben der Durchführung der älteren Methode sicherlich von Vorteil. Pz.

A. Sommerfeld und J. Runge. Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik. Ann. der Phys. (4) 35, 277-298.

Die Abhandlung macht den Leser mit einer Methode bekannt, die von Sommerfeld in einer Münchener Vorlesung entwickelt und von J. Runge insbesondere für das Gebiet der krummlinigen Lichtstrahlen weitergeführt wurde. Diese Methode besteht darin, daß in Richtung der Lichtstrahlen in jedem Punkt ein Einheitsvektor abgetragen wird, so daß die Vektorrechnung auf das Gebiet der geometrischen Optik fruchtbringend anwendbar ist. Die Arbeit hat vier Hauptteile: I. Geradlinige Lichtstrahlen, II. Strahlen im inhomogenen Medium, III. Allgemeine Sätze der geometrischen Optik, IV. Zwei Beispiele speziellerer Anwendungen, nämlich der Sinussatz und die Brechung an einer Kugelfläche.

Die angewandte Methode zeigt sich tatsächlich recht anregend und fruchtbar für die geometrische Optik, sowohl wie die Abschnitte I—III zeigen, für die Behandlung allgemeiner Sätze, als auch, wie IV zeigt, für spezielle Fragen. Pz.

M. v. Rohr. Die optischen Instrumente. 2. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 140 S. 8°. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 88.)

Das vorliegende Buch erscheint hiermit in zweiter Auflage, und es kommen somit hauptsächlich die Veränderungen in Betracht. Von wesentlicher Bedeutung ist die Verwertung der Alvar Gullstrandschen Auffassung der Bildvermittlung durch optische Instrumente. Auch der Arbeiten Gullstrands über die Optik des Auges ist in dem trefflichen Büchlein gedacht worden. Pz.

O. Lummer und F. Reiche. Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop von Ernst Abbe. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. XII + 108 S. 8°. (1910).

Das Werk verdankt seine Entstehung der Teilnahme Lummers an der Vorlesung Abbes, die dieser 1887 gehalten hat. Es ist eine wirkliche Dankbarkeit, die wir den Herausgebern des vorliegenden Werkes gegenüber haben müssen, daß die Theorie der Abbeschen Bilderzeugung hier in dieser geschlossenen Form den Lesern gegeben wird.

Das Buch beginnt mit der Darstellung der notwendigen geometrisch-optischen Abbildungsgesetze. Abbe leitete die Lichterregung im Bilde selbstleuchtender Objekte aus dem Fresnel-Huygensschen Prinzip her, wobei er die Sinusbedingung und das Lambertsche Kosinusgesetz heranzog. Diese Herleitung Abbes ist von den Verf. ergänzt worden auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie und des von Kirchhoff aufgestellten Prinzipes. Bei der weiteren Behandlung, die sich im wesentlichen streng an Abbe anschließt, wird zunächst das Beugungsbild der Blendenöffnung unter Zugrundelegung eines Flächenelementes betrachtet und dann durch Integration zum Gesamtbilde übergegangen. Hierauf folgt die Herleitung der Leistungsfähigkeitsgrenze des Mikroskops.

In dem Werke sind auch einige Beispiele behandelt, so die Betrachtung für zwei feine parallele Spalte, einen Spalt endlicher Breite, und zwar bei senkrechtem und schiefem Lichteinfall. Ferner wird ein Spalt betrachtet, dessen Hälften konstante Phasendifferenz haben, außerdem die Abbildung eines Gitters bei teilweiser Abblendung seiner primären Beugungsspektren (vgl. F. d. M. **41**, 931, 1910). Pz.

O. Lummer und F. Reiche. Die Abbildung nicht selbstleuchtender Objekte (Bildentstehung im Mikroskop). Arch. der Math. u. Phys. (3) **17**, 301-333.

Die Entwicklung der Bildentstehung im Mikroskop, die hier gegeben wird, ist im wesentlichen dieselbe, die die Verf. in den Abbeschen Vorlesungen niedergelegt haben. Pz.

L. Mandelstam. Zur Abbeschen Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung. Ann. der Phys. (4) **35**, 881-897.

Der Verf. behandelt in der Arbeit die Abbildung von Selbstleuchtern und Nichtselbstleuchtern gleichartig, eine Möglichkeit, auf die Lord Rayleigh schon hingewiesen hatte, der Abbes Behandlungsweise als die nicht nur allein mögliche erkannte. Beim Nichtselbstleuchter wird die Wirkung des Diaphragmas dadurch berücksichtigt, daß an Stelle jedes Punktes der Abbildung ein Beugungsscheibchen tritt. Diese Scheibchen sind hier untereinander kohärent. Die verschiedene Abbildung von Nichtselbstleuchtern und Selbstleuchtern hat seine Ursache darin, daß in den betreffenden Fällen diese Kohärenz für das Bild bedeutungsvoll ist.

Bei nicht zu feinen Strukturen verhält sich ein Selbstleuchter so wie ein Nichtselbstleuchter, der gleichmäßig überall beleuchtet wird.

Im übrigen besteht zwischen der vorgetragenen Auffassungsweise und der Abbeschen Theorie kein Gegensatz, sondern sie unterscheiden sich nur in den einzelnen Fällen durch die Bequemlichkeit der Anwendung. Pz.

R. Boulouch. Quelques définitions d'optique géométrique. Bordeaux Procès-Verb. 1910/11, 60-61.

Der Verf. weist auf die Verschiedenheiten hin, die bezüglich der Definition einiger Grundbegriffe der geometrischen Optik bestehen, und führt als Beispiel an, daß der Aplanatismus bald als streng punktförmige Zuordnung, bald als angenäherte Zuordnung zweier Flächenelemente definiert wird, die normal zur Achse liegen und teils zu Ebenen, teils zu beliebigen Flächen gehören. Die nun folgenden Definitionen, wie sie B. vorschlägt, sind bereits in der Abhandlung des Verf. über die Sinusbedingung angegeben worden. Pz.

R. Boulouch. Nouvelle exposition de la théorie élémentaire des systèmes optiques centrés. Bordeaux Procès-Verb. 1910/11, 68-74.

Der Verf. geht hier von Abbildungsbeziehungen aus, wie sie in der Dioptrik geschichteter konzentrischer Medien häufig gebraucht werden, und untersucht sie für den Fall zentrierter optischer Systeme. Es ergeben sich dabei die bekannten dioptrischen Gesetze. Pz.

R. Boulouch. La relation des sinus de Abbe est une condition de stigmatisme. Condition de l'aplanétisme vrai. C. R. **133**, 99-102.

Der Verf. spricht zunächst von den verschiedenen Arten der punktförmigen Abbildung. Von „streng punktförmiger Abbildung" spricht er in dem Falle, wo die Brennfläche eines Bildpunktes degeneriert zu einem Punkte und das System ein konisches Bündel beliebiger Öffnung wieder als konisches Bündel austreten läßt. „Quasi-punktförmige Abbildung" findet statt, falls die letzterwähnte Bedingung nur für Bündel mit geringer Öffnung gilt, die beiden Brennpunkte des Objektpunktes auf der Achse des austretenden Bündels liegen. Hat das Objekt räumliche Ausdehnung, und besteht für alle Punktmengen der Oberfläche von Objekt und Bild ein streng punktförmiger Zusammenhang, so herrscht

„völliger Aplanatismus“. Von „Quasi-aplanatismus“ spricht man dann, wenn eine quasipunktförmige Beziehung zwischen den Punkten der Flächen besteht. „Wahrer elementarer Aplanatismus“ ist vorhanden, falls streng punktförmige Abbildung eines Flächenelementes stattfindet, das normal zur Achse liegt. Ist für einen Achsenpunkt die streng punktförmige Beziehung vorhanden, hat dagegen ein unendlich wenig entfernter Punkt zwei Brennpunkte mit von der zweiten Ordnung unendlich geringer Entfernung, so ist „Pseudo-aplanatismus“ vorhanden. Nachdem B. bewiesen hat, daß es unmöglich ist, daß, falls für zwei Achsenpunkte eines zentrierten Systems punktförmige Zuordnung herrscht, diese auch für Achsenpunkte besteht, die den ersten benachbart sind, kommt er zu folgendem Schluß: Wenn ein zentriertes System mit punktförmiger Zuordnung in A und A' außerdem aplanatisch ist in diesen Punkten, so existieren notwendigerweise zwei quasi-aplanatische Flächen bezüglich dieser Punkte, welche die Achse in den zu A, A' inversen Punkten treffen. Pz.

R. Boulouch. I. La relation des sinus dite de Abbe est une condition de stigmatisme. II. Condition d'aplanétisme. Bordeaux Procès-Verb. 1910/11, 52-57.

Die Arbeit will beweisen, daß die bekannte Sinusbedingung:

$$\sin u : \sin u' = \text{const.}$$

die Bedingung für punktförmige Abbildung ist. Die Ausführungen decken sich zum großen Teile mit der Abhandlung des Verf. über dieses Thema in den C. R. (Referat vorstehend). Pz.

Foix. Construction des rayons marginaux dans les systèmes centrés aplanétiques. Journ. de Phys. (5) 1, 896-900.

Es seien zwei konjugierte Ebenen eines zentrierten optischen Systemes gegeben, so daß für jedes ihrer entsprechenden Punktepaare streng Aplanatismus besteht; ferner ein einfallender Strahl AB, der mit der Hauptachse des Systems einen beliebig großen Winkel einschließt. Der Verf. konstruiert den austretenden Strahl $A'B'$, der dem Strahl AB entspricht. Lp.

J. Blein. Aberrations dans le miroir parabolique. Journ. de Phys. (5) 1, 996-1003.

„Ich habe mir die Aufgabe gestellt, die Lage der Brennlinien auf einem vor der Spiegelung parallelstrahligen Bündel, dessen Hauptstrahl sich in einer Meridianebene fortpflanzt, zu ermitteln. Das Ergebnis ist merkwürdig einfach. Danach bestimme ich die Gestalt des Aberrationsflecks in der Brennebene, wenn das einfallende parallelstrahlige Bündel geringe Neigung gegen die Achse hat. Unter diesen Bedingungen werden ja die parabolischen Spiegel in den Teleskopen, Instrumenten mit recht beschränktem Felde, benutzt.“ Lp.

G. Ugolini. Sui punti di luce nelle superficie liscie e delle linee di luce nelle superficie le cui generatrici sono cilindri o tori di raggio piccolissimo. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **29**, 233-250.

Der Verf. behandelt in analytischer Form die Abbildungsbeziehungen, die sich bei der einfachen Reflexion an bestimmten Flächen ergeben. Nach der Behandlung in allgemeiner Form geht der Verf. zu bestimmten Flächen über. Pz.

E. Padova. Il fotometro Zöllner-Wolfer applicato allo studio del cuneo del fotometro registratore Müller. Ven. Ist. Atti **70** [(8) **13**], 675-691.

Die Arbeit behandelt die photometrischen Apparate von Zöllner-Wolfer und Müller, die für die Photometrie der Gestirne in Anwendung kommen. Pz.

O. W. Griffith. Note on the measurement of the refractive index of liquids. Phil. Mag. (6) **21**, 301-309.

Es handelt sich um die Bestimmung des Brechungsindex aus der Brechung in einer Schusterkugel. Die Fehler werden diskutiert. Br.

C. Beck. The pupil of an optical system with regard to perspective. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 462-470.

Verf. plädiert für eine stärkere Berücksichtigung der Ein- und Austrittspupille von Objektiven an Stelle der Hauptebenen. Die Arbeit bringt für einen Deutschen nichts theoretisch Neues. Br.

Weitere Literatur.

F. Dobe. Astigmatismus bei der astronomischen Strahlenbrechung. Diss. Rostock. 44 S. 8°.

A. Gleichen. Die Theorie der modernen optischen Instrumente. Hülfs- und Übungsbuch für Physiker und Konstrukteure. Stuttgart: Enke. XII u. 332 S. Lex. 8°.

A. Gleichen. Die Optik in der Photographie. In gemeinverständlicher Darstellung. Stuttgart: F. Enke. XII u. 223 S. gr. 8°.

W. Jaeckel. Mathematische Untersuchung über die scheinbare Hebung eines unter Wasser befindlichen Punktes. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 34-35.

H. Wieleitner. Über das virtuelle Bild eines unter Wasser befindlichen Punktes. Unterrichtsbl. f. Math. **17**, 132-133.

Chr. von Hofe. Fernoptik. Leipzig: J. A. Barth. VI u. 158 S. gr. 8°. (Wissen u. Können Bd. 21.)

H. F. MacNeish. The path of light in a medium homogeneous in concentric spherical layers. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 300-301.

C. Pulfrich. Stereoskopisches Sehen und Messen. (Mit einem Literaturverzeichnis seit 1900.) Jena: G. Fischer. 40 S. Lex.-8°.

W. A. Roth und F. Eisenlöhr. Refraktometrisches Hülfsbuch. Leipzig: Veit u. Co. VIII u. 146 + 27 S. gr. 8°.

L. U. H. C. Werndly. Gedaante van het golfoppervlak en schijnbare plaats van een voorwerp, bij vlakke spiegeling en breking. Wiskundig Tijdsskr. 7, 147-152.

Kapitel 3.
Elektrizität und Magnetismus.

H. Witte. Über den behaupteten inversen Zusammenhang zwischen Elektro- und Hydrodynamik. Physik. Zs. **12**, 347-360.

Die Abhandlung setzt die Arbeit „Nachträge zur Ätherfrage" fort, über welche F. d. M. **41**, 938, 1910, berichtet ist.

„Gerade heutzutage, wo man in den mechanischen Analogien nicht mehr Wesenserklärungen, sondern nur noch unvollkommene Bilder sehen kann, hat die Sonderfrage ein erhöhtes Interesse, wie weit diese der Natur der Sache nach unvollkommenen Bilder denn wenigstens in denjenigen Punkten getreu sind, welche für didaktisch verwendbare Modelle zu Demonstrationszwecken usw. in erster Linie in Betracht kommen."

„Indessen ist ein derartiger Erfolg den mechanischen Bildern nur in sehr geringem Maße beschieden gewesen; praktisch verwendbare, hydrodynamische usw. Modelle, welche die gewünschten, den Maxwell-Lorentzschen direkt analogen ponderomotorischen Kräfte mit Sicherheit zu demonstrieren gestatten, sind überhaupt noch nicht aufgefunden worden. Dagegen hat nun neuerdings, hauptsächlich gestützt auf die bekannten Theorien und Versuche von C. A. Bjerknes, eine gänzlich andersartige, auf den ersten Blick höchst überraschende Behauptung bezüglich des Zusammenhanges zwischen den ponderomotorischen Kräften in den elektrodynamischen und den entsprechenden hydrodynamischen Feldern die Aufmerksamkeit der Physiker auf sich gezogen. Die Behauptung lautet in der weitestgehenden Form: daß lückenlos ein inverser Zusammenhang bestehe; d. h. es sollen die allgemeinsten, in der Hydrodynamik usw. auf eingebettete Körper wirkenden ponderomotorischen Kräfte Glied für Glied entgegengesetzt gleich denen sein, die nach der Maxwellschen Elektrizitätstheorie in den entsprechenden allgemeinsten elektromagnetischen Feldern auftreten müssen. Über den gegenwärtigen Stand dieses letztgenannten Spezialproblems einen orientierenden Überblick zu geben, beabsichtigen die folgenden Zeilen. Nach Erledigung der Überschau werde ich in möglichster Kürze den endgültigen Abschluß einer Diskussion anfügen, die zwischen Herrn V. Bjerknes und mir über eine Teilfrage aus dem Bereiche dieses Problems geführt worden ist." Lp.

A. Korn. L'état hélicoïdal de la matière électrique; hypothèses nouvelles pour expliquer mécaniquement les phénomènes électromagnétiques. C. R. **152**, 306-309.

Um die elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch zu erklären, werden drei Hypothesen eingeführt:

„I. Hypothese der elektromagnetischen Schwingungen. Die mechanischen Geschwindigkeiten eines elektromagnetischen Feldes haben die Form:

$$u = u_0 + \hat{u}, \ldots, \quad \hat{u} = u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \ldots,$$

wo T eine sehr kleine Zeitdauer ist, $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die Bedingungen erfüllen, daß die Ausdrücke

$$T \frac{du_0}{dt}, \quad T \frac{du_1}{dt}, \quad T \frac{du_2}{dt}, \ldots,$$

im Vergleich zu $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sehr klein sind.

II. Die Formel des d'Alembertschen Prinzips für die elektrische Materie (als unecht kontinuierlich angesehen) ist zu schreiben:

$$\int \left[\left(\mu \frac{du}{dt} d\tau + 2 \int_{\Omega} \mu u \hat{u}_\nu d\omega - 2u_0 \int_{\Omega} \mu \hat{u}_\nu d\omega \right) \delta x + \cdots \right] = 0,$$

wo mit Ω die Oberfläche eines Elementes $d\tau$ und mit $\hat{u}_\nu$ der Ausdruck:

$$\hat{u}_\nu = \hat{u} \cos(\nu x) + \hat{v} \cos(\nu y) + \hat{w} \cos(\nu z)$$

bezeichnet wird, wenn die ν die inneren Normalen von Ω darstellen.

III. Hypothese des universellen Dralles. Die Geschwindigkeiten eines elektromagnetischen Feldes haben immer die folgende Form:

$$u = U + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \ldots, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt} = 0,$$

d. h. sie setzen sich zusammen aus konstanten Geschwindigkeiten, aus Geschwindigkeiten, die Ableitungen eines Potentials sind, und aus Geschwindigkeiten, die den molekularen Rotationsgeschwindigkeiten proportional sind; a ist eine sehr kleine Konstante.“ Sa.

A. Korn. Weiterführung eines mechanischen Bildes der elektromagnetischen Erscheinungen. Verhdl. D. Physik. Ges. **13**, 249-256.

Verf. hat mehrere Aufsätze im Anschluß an Bjerknes' Arbeiten über die Wirkung pulsierender und oszillierender Teilchen veröffentlicht. Die Erscheinungen des Gravitationsfeldes lassen sich daraus erklären. Für die elektrischen Erscheinungen kam man wegen des Auftretens des entgegengesetzten Vorzeichens zu keinem Resultat. K. stellt sich nun die Frage: „Welche mechanische Anschauung hat man sich über die elektrischen Teilchen zu bilden?“ Eine energetische Betrachtung führt ihn zu dem Satz: Die gravitierenden Teilchen sind in ihrer gravitierenden Masse veränderlich, die elektrischen Teilchen haben unveränderliche Elektrizitätsmengen.“ Das Bild ergibt dann, die Elek-

trizität ist „unecht" kontinuierlich verteilt; um das d'Alembertsche Prinzip anwenden zu können, müssen wir es in eine erweiterte Form mit Zusatzgliedern bringen; diese verschwinden im bestimmten Grenzfall. Eine weitere Hypothese führt dann zu den elektrischen Feldgleichungen. Grb.

A. Szarvassi. Das Prinzip der Erhaltung der Energie und die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern. (2. Teil.) Wien. Ber. **120**, 337-382.

Die im ersten Teil (Wien. Ber. **119**, 281-236; F. d. M. **41**, 950, 1910) gezeigte Unverträglichkeit der Lorentzschen Feldgleichungen mit dem Energieprinzip in Gliedern erster Ordnung des Verhältnisses Körpergeschwindigkeit zu Lichtgeschwindigkeit wird hier auf ein spezielles Beispiel angewandt; es wird ein Perpetuum mobile angegeben. Die Aufgabe ist ein „Randwertproblem einer partiellen Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ, welche mit Hülfe der Riemannschen Integrationsmethode gelöst wird". Es wurde, entsprechend der Größe des vorausgesagten Fehlers, nur bis zu den Gliedern erster Ordnung gerechnet. Durch die Picardsche Approximationsmethode wurde dann nachgewiesen, daß die Vernachlässigungen statthaft sind. Grb.

E. Lohr. Das Problem der Grenzbedingungen in G. Jaumanns elektromagnetischer Theorie. Wien. Ber. **120**, 1503-1567.

Der erste prinzipielle Teil beweist, daß sich für das Gleichungssystem Jaumanns (elektromagnetische, dielektrische, metaelektrische Gleichungen) in sich widerspruchsfreie Grenzbedingungen derart angeben lassen, daß ein physikalisches Problem durch sie eindeutig bestimmt ist. Im zweiten Teil wird das Jaumannsche Gleichungssystem integriert und eine vollständige Durchrechnung der Strahlungserscheinungen in homogenen, nicht kristallinischen und optisch nichtaktiven Medien gegeben. Im dritten Teil wird eine Reihe von Spezialfällen durchgerechnet; für diese werden die im ersten Teil aufgestellten Grenzbedingungen erfüllt. Es zeigt sich, daß die durch das Bestehen der Grenzbedingungen sich ergebenden Gesetze mit der Erfahrung verträglich sind; insbesondere ergibt die Theorie auch die „Erregung" von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht, den Einfluß eines transversalen Magnetfeldes auf die photoelektrische Entladung usw. Zö.

H. Bateman. The transformation of a particular type of electromagnetic field and its physical interpretation. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, 7-14.

H. Bateman. On certain vectors associated with an electromagnetic field and the reflection of a disturbance at the surface of a perfect conductor. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, 96-115.

Die hier besprochene Transformation gehört zu der Klasse der Lond. M. S. Proc. (2) 8, 469 (F. d. M. **40**, 942, 943, 1910) aufgestellten; sie wird mathematisch

eingehender behandelt, und am Schluß wird ihre Verallgemeinerungsmöglichkeit gezeigt. In der zweiten Abhandlung ergibt sich nun eine Interpretation dieser verallgemeinerten Transformation, aus der folgt, daß das elektrische und magnetische Feld mit der einfachen Singularität (x_1, y_1, z_1, t_1) transformiert werden kann in ein solches mit der Singularität (x_2, y_2, z_2, t_2), wenn $x_1, \ldots, z_2$ komplexe Punkte sind. Dann wendet sich Verf. der Behandlung der Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

zu; wenn diese für die Vektoren u, v, w, x erfüllt ist mit noch vier anderen, so ist bei Erfüllung einer bestimmten Gleichung das Feld bestimmt. Zum Schluß folgt die Anwendung auf die Reflexion an fester Oberfläche. Grb.

Ph. Frank. Das Verhalten der elektromagnetischen Feldgleichungen gegenüber linearen Transformationen. Ann. der Phys. (4) 35, 599-607.

Es wird direkt gezeigt, daß die Lorentztransformationen die einzigen linearen Transformationen der Raumzeitkoordinaten sind, bei denen die Feldgleichungen invariant bleiben. Bei diesem Beweis tritt „die eigentliche Struktur des Gleichungssystems" hervor, und er läßt „den Invarianzsatz anschaulich und nahezu selbstverständlich erscheinen". Grb.

E. Cunningham. The application of the mathematical theory of relativity to the electron theory of matter. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, 116-127.

Die Arbeit ist als Fortsetzung und Ergänzung von Lond. M. S. Proc. (2) 8, 77-98 (F. d. M. **40**, 928, 1909) aufzufassen. Sie verbessert einen unterlaufenen Fehler und gibt die Born-Minkowskische Darstellung (Math. Ann. **68**, 526-551; F. d. M. **41**, 948, 1910) in einer den Physikern geläufigeren Ausdrucksweise. Grb.

C. Kraft. Eine Identität in der vierdimensionalen Vektoranalysis und deren Anwendung in der Elektrodynamik. Krak. Anz. (A) 1911, 537-541.

C. Kraft. Über die direkte Integration der typischen Integralausdrücke von Raumzeitvektoren. Krak. Anz. (A) 1911, 564-576.

C. Kraft. Zum Problem der Integraldarstellung der elektromagnetischen Vektoren in bewegten Körpern nach Minkowskis „Grundgleichungen". Krakauer Anz. (A) 1911, 596-619.

Das im Titel angeführte Problem wird erst auf den letzten sechs Seiten der Abhandlung erledigt. Der erste Teil, der nur die Erläuterung der zu benutzenden Bezeichnungen bringen sollte, ist zur Erleichterung für die Leser auch auf die Herleitung der Minkowskischen Grundgleichungen der Elektrodynamik ausgedehnt. Besonders werden diejenigen Gleichungen diskutiert, durch welche Minkowski die üblichen Annahmen über die dielektrische Konstante ε, die magnetische Permeabilität μ und die elektrische Leitfähigkeit σ in einer von der Wahl des Raum-Zeit-Bezugssystems unabhängigen Form ausgedrückt hat. Der Verf. bedient sich hierbei der speziellen Werte der Transformationskoeffizienten, weicht also von dem eleganten Wege Minkowskis ab, übergeht deshalb die von diesem eingeführten Begriffe und Symbole, die zur Herleitung jener Gleichungen nicht unbedingt notwendig sind.

Die Lösung der im zweiten Abschnitte behandelten Aufgabe, die elektromagnetischen Sechservektoren f und F der Minkowskischen Gleichungen in Integralform darzustellen, muß im Original nachgelesen werden.

Lp.

A. W. Conway. On the application of quaternions to some recent developments of electrical theory. Dublin Roy. Ir. Acad. Proc. **29**, 1-9.

Wenn man versucht, mit Vektormethoden (ohne Benutzung von Quaternionen) die Poincaré-Fredholmschen Lösungen der elektrodynamischen Gleichungen und die Umformung, die mit dem Relativitätsprinzip (Lorentz, Larmor, Einstein) zusammenhängt, zu behandeln, so erhält man Ausdrücke, die komplizierter sind als die durch die gewöhnlichen Methoden erhaltenen. Conway zeigt, daß eine Quaternionenmethode benutzt werden kann, die die verlangte Kürze der Resultate gibt und leicht auf neue Lehrsätze führt.

J.

L. Hanni. Kinematische Interpretation der Maxwellschen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Schluß.) Wien. Ber. **120**, 1725-1748.

An die in den ersten Teilen (F. d. M. 38, 870; **39**, 907, 1908) gewonnenen Resultate „schließt sich die Frage an, ob es möglich ist, auch ohne Beschränkung auf ein Volumenelement eine kinematische Interpretation anzugeben“. Verf. zeigt dies, indem er aus den Bedingungsgleichungen die Wellengleichung ableitet und zunächst die linear polarisierte ebene Welle betrachtet. Dann geht er zum allgemeinen Fall der Transversalwellen über. Er findet: „Betrachtet man Transversalwellen in homogenen isotropen Medien zugleich als Punkt- und als Ebenengebilde, so bestehen zwischen einer Welle als Punktgebilde und derselben Welle als Ebenengebilde Beziehungen von gleicher Form wie die Maxwellschen Gleichungen für homogene isotrope Nichtleiter, und es können auch umgekehrt diese Gleichungen immer so interpretiert werden.“ Hieraus wird nun noch eine Reihe von Folgerungen gezogen, und endlich wird der enge Zusammenhang der Maxwellschen Gleichungen dieser Form mit den Cauchy-Riemannschen Sätzen der Funktionentheorie beleuchtet. Grb.

J. Ishiwara. Über die elektromagnetischen Impulsgleichungen in der Relativitätstheorie. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 164-176.

Verf. hat eine Elektrodynamik bewegter Körper entwickelt, die an einigen Stellen Unterschiede gegen die Minkowskische und Abrahamsche aufweist (Tokyo Math. Ges. (2) **5**, 310-337; F. d. M. **41**, 941, 1910). „In den folgenden Untersuchungen möchte ich daher noch einmal auf die Erklärung meiner Behauptung zurückkommen.“ Grb.

G. W. Walker. The initial accelerated motion of electrified systems of finite extent, and the reaction produced by the resulting radiation. Lond. Phil. Trans. (A) **210**, 145-197.

Die Hauptaufgabe der Arbeit ist, zu zeigen, daß eine gleichförmig beschleunigte Bewegung geladener Kugeln in einem elektrischen Feld möglich ist, wenn ein harmonischer Wellenzug mit sehr rascher Dämpfung vorhanden ist; indessen werden auch verwandte Probleme behandelt, wie die Bewegung geladener Isolatorkugeln, die Schwingungen geladener Kugeln, Rotationen dieser u. ä. m. Das Ganze enthält auch einen kritischen Vergleich der früher auf diesem Gebiet geleisteten Arbeit. Die Untersuchungsmethoden basieren auf dem Newtonschen Potential und benutzen die Ausdrucksweise der gewöhnlichen Mechanik. Br.

S. B. Mc Laren. The emission and absorption of energy by electrons. Phil. Mag. (6) **22**, 66-83.

Eine Entwicklung der Lorentzschen Strahlungstheorie für alle Wellenlängen. In dem Kraftfeld positiver Ladungen bewegen sich die negativen Elektronen und absorbieren Energie von einer äußeren Strahlung, strahlen sie aber zugleich durch ihre Bewegung zurück. Es wird nur vorausgesetzt, daß sie nicht aufeinander wirken. Unter diesen Voraussetzungen werden die entsprechenden Formeln entwickelt. Br.

D. N. Mallik. Lines of force due to given static charges. Phil. Mag. (6) **22**, 177-190.

Es wird, wesentlich spezieller als in dem bekannten Maxwellschen Lehrbuch, eine Anleitung zum Ziehen der Kraftlinien bei einzelnen einfachen Verteilungen statischer Ladungen gegeben. Br.

E. Almansi. Sulla distribuzione dell' elettricità in equilibrio nei conduttori. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 150-154.

Das in der Überschrift genannte und früher behandelte Problem (vgl. F. d. M. **41**, 955, 1910), eine Masse M auf der Oberfläche einer geschlossenen Fläche derart zu verteilen, daß in dem ganzen Raum, den eine zweite, ganz

in der ersten enthaltene geschlossene Fläche umgrenzt, die Größe der resultierenden Kraft kleiner als eine vorgegebene Zahl ε ist, läßt sich lösen a) durch Bestimmung einer ganzen Zahl k und b) eine derartige Verteilung von k Massen mit der Gesamtsumme M auf einer zwischen den erwähnten Flächen liegenden dritten Fläche, daß, wenn Φ ihr Potential ist und $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = H$, im innersten Raum das Maximum der Kraft K, die durch die mit der Dichte H auf der äußeren Fläche verteilte Masse hervorgerufen wird, den kleinstmöglichen Wert hat. Zö.

E. P. Adams. On electrostriction. Phil. Mag. (6) 22, 889-900.

Verf. leitet die elastischen Spannungen ab, die ein geladener Kondensator in einem elektrischen Felde erfährt. Insbesondere handelt es sich (für Versuchszwecke) um zylindrische und kugelförmige Kondensatoren. Br.

L. Décombe. Sur la nature de la chaleur non compensée. Journ. de Phys. (5) 1, 359-372.

„Was ist die nicht kompensierte Wärme? Die gegenwärtige Arbeit gibt für diese Größe eine besonders einfache physikalische Deutung: Die nicht kompensierte Wärme wäre hiernach den Deformationen der Atome zuzuschreiben, die mit einer endlichen Geschwindigkeit vollzogen werden. Man kommt zu diesem Schluß, indem man die Bedingungen für die Erzeugung der Siemenswärme erörtert, d. h. der Wärme, die in dem Dielektrikum eines Kondensators frei wird durch die variable oder alternierende Ladung der Belegungen, und indem man die erhaltenen Ergebnisse dann verallgemeinert. Schließlich gelangt man so zu einer Theorie, bei der man die Deformationen des Atoms (das als eine bestimmte Vereinigung von Elektronen angesehen wird) als allgemein von einer Änderung seines elektrischen Momentes begleitet ansieht. Eine derartige Theorie ist also gleichzeitig mechanisch (weil sie auf dem Begriff der Deformation beruht) und elektrisch. Genauer ist sie als eine elektronische Theorie zu bezeichnen; es war ja vorauszusehen, daß die alte mechanische Theorie der Wärme dahin geführt werden würde, der diskontinuierlichen elektrischen Konstitution des Atoms Rechnung zu tragen, die durch die Erforschung der neuen Erscheinungen enthüllt wurde. Die Darstellung umfaßt vier Teile: I. Definition und Eigenschaften der Siemenswärme. II. Definition und Eigenschaften der thermodynamischen Modifikationen. III. Reine thermodynamische Modifikationen. IV. Beliebige thermodynamische Modifikationen.“ Lp.

L. Décombe. Sur une interprétation physique de la chaleur non compensée. C. R. 152, 315-318, 495, 1300-1302.

Verf. versucht zu zeigen, daß die nicht kompensierte Wärme, die bei Transformationen, bei denen kein Vorgang von elektrischer Leitung, Ionisation oder atomischer Trennung in Betracht kommt, mit der von ihm so bezeichneten Siemenswärme identifiziert werden kann, die die Elektrisierung der Volumenelemente eines Systems begleitet. Für jedes Volumenelement drückt sich diese

Wärme durch eine Summe von Ausdrücken aus, die proportional den Quadraten der Deformationsgeschwindigkeiten sind. Sie verschwindet, wenn diese Geschwindigkeiten alle unendlich klein oder Null sind.

Weiter wird die Hypothese aufgestellt, daß jede Deformation der Atome, die mit einer endlichen Geschwindigkeit vor sich geht, von einer dem Quadrate der Deformationsgeschwindigkeit proportionalen Wärmeentwicklung begleitet ist. Im weiteren Sinne bezeichnet Verf. auch diese Wärme als Siemenswärme. Daraus folgt, daß man ebenfalls die Joulesche Wärme und die Wärme der radioaktiven Substanzen als Siemenswärme erklären kann.

Sa.

L. Décombe. La chaleur de Siemens. C. R. **152**, 1755-1757.

L. Décombe. La chaleur de Siemens et la notion de capacité. C. R. **153**, 1469-1472.

In den vorstehend angezeigten Noten hat Verf. eine Hypothese über Ursprung und Wert der Siemenswärme gegeben und zeigt nun, daß die Theorie von Lorentz diese Hypothese befestigt, und daß sie auch mit den Hochstädterschen Experimenten (Elektrotechn. Zs. 1909, 1910) in Einklang steht. Dann folgert er weiter, daß die durch die Lorentzsche Theorie bestimmte Formel über die Ladung ebenfalls durch das Experiment bestätigt wird. Diese Ladung setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, die für den Fall periodischer Potentialdifferenzen bestimmt werden. Grb.

A. Leduc. Application du principe de Lenz aux phénomènes qui accompagnent la charge des condensateurs. C. R. **152**, 313-315.

Verf. bringt zuerst einige von Pellat und Sacerdote herrührende Betrachtungen über das Verhalten von Kondensatoren in Abhängigkeit von Druck, Temperatur und Ladung. Er zeigt dann, daß die dabei zutage tretenden Effekte ohne weiteres aus einer Erweiterung des Lenzschen Prinzips folgen, soweit die Elektrostriktion in Frage kommt, nicht aber, sobald es sich um die Wärmewirkung handelt.

Gr.

A. E. Kennelly. Vector-diagrams of oscillating-current circuits. Amer. Ac. Proc. **46**, 373-421.

An Stelle der üblichen analytischen Behandlung von Schwingungskreisen wird die bisher nur für Wechselströme angewandte Methode der Vektordiagramme eingeführt. Sehr ausführlich werden die einzelnen charakteristischen Größen, die für frei schwingende elektrische Systeme in Frage kommen: Winkelgeschwindigkeit, Admittanz, Impedanz, Potentialdifferenz, Strom, Leistung, Arbeit, graphisch veranschaulicht und die Beziehungen zwischen ihnen abgeleitet. Dabei wird sowohl von Polardiagrammen, wie von umlaufenden Vektoren (deren Endpunkte Spiralen beschreiben) und von fortschreitenden Kurven

mit der Zeit als Abszisse Gebrauch gemacht. Zum Schluß wird noch auf die entsprechende Behandlung nicht-periodischer („ultraperiodischer") Vorgänge stark gedämpfter Schwingungskreise eingegangen. Zö.

R. Gans. Über das Biot-Savartsche Gesetz. Physik. Zs. **12**, 806-811.

Die verschiedenen Auffassungen der Größe $[\mathfrak{J}, \mathfrak{H}]$ von Einstein, Laub und Abraham (F. d. M. **40**, 927, 1909) sind beide nicht einwandfrei, wenn man „Ferromagnetica mit in den Kreis der Betrachtungen zieht". Grb.

M. Abraham. Sulla velocità di gruppo in un mezzo dispersivo. Lomb. Ist. Rend. (2) **44**, 68-77; Nuovo Cimento (6) **1**, 443-454.

Der Reynoldssche Satz über Meereswellen wird auf elektromagnetische Wellen ausgedehnt, und zwar zunächst für den Fall eines nicht dispergierenden Mediums. Für den Fall eines dispergierenden Mediums werden die elektrische Verschiebung und die magnetische Induktion als lineare Funktionen der elektrischen oder magnetischen Kräfte und ihrer Ableitungen gerader Ordnung nach der Zeit angenommen; hierdurch ist Absorption ausgeschlossen. Es folgt der Satz: Für ebene Wellen, die sich in einem isotropen, homogenen, dispergierenden Medium ohne Absorption ausbreiten, ist der mittlere Energiestrom gleich dem Produkte der Gruppengeschwindigkeit und der mittleren Energiedichte. Sa.

U. Cisotti. La ereditarietà lineare e i fenomeni dispersivi. Lomb. Ist. Rend. (2) **44**, 667-675; Nuovo Cimento (6) **2**, 234-244.

Verf. macht die Annahme, daß die elektrische Verschiebung D nicht nur von dem augenblicklichen Werte der elektrischen Kraft E in einem Punkte abhängt, sondern auch von den Werten, die E vorher in diesem Punkte gehabt hat, d. h. er stellt für D folgende Gleichung auf:

$$D(t) = \varepsilon E(t) + \int_{-\infty}^{t} E(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau,$$

wo φ nur von der Natur des Mediums abhängt. In ähnlicher Weise soll die magnetische Induktion von der magnetischen Kraft abhängen. Verf. zeigt, daß im allgemeinen kein Medium existiert, das allen Erregungen gegenüber nur Dispersion zeigt, so daß die Energiedichte bei beliebiger endlicher Veränderung der elektrischen Kraft endlich bleibt. Weiter wird bewiesen, daß die obigen Vorgänge nicht reversibel in bezug auf die Zeit sind. Sa.

U. Cisotti. Sulla dispersività in relazione ad una assegnata frequenza. Lomb. Ist. Rend. (2) **44**, 676-688; Nuovo Cimento (6) **2**, 360-374.

In dieser Arbeit werden periodische Vorgänge behandelt. Die allgemeinste lineare Abhängigkeit der elektrischen Verschiebung von der elektrischen Kraft wird gegeben durch die Gleichung:

$$D(t) = E(t) + \int_0^\tau E(\tau)\,\Phi(t, \tau)\,d\tau.$$

Damit $D(t)$ periodisch mit derselben Periode T wie $E(t)$ ist, muß $\Phi(t, \tau)$ auch die Periode T haben. Ferner muß für ein nur dispergierendes Medium die Bedingung $\Phi'(t, \tau) + \Phi'(\tau, t) = 0$ bestehen. Für Reversibilität in bezug auf die Zeit kommt noch hinzu: $\Phi(-t, -\tau) = \Phi(t, \tau)$. Ähnliches ergibt sich für die magnetische Induktion. Für den Fall, daß Φ nur von der Differenz $t - \tau$ abhängt, ergibt sich der Ansatz von Abraham (siehe das Referat S. 930). Sa.

K. F. Herzleld. Über die Beugung von elektromagnetischen Wellen an gestreckten, vollkommen leitenden Rotationsellipsoiden. Wien. Ber. **120**, 1587-1615.

Aus den Maxwellschen Gleichungen werden für die vorliegende Aufgabe partielle Differentialgleichungen mit nur einer abhängigen Variable abgeleitet und die Lösungen, die im Unendlichen in der vorgeschriebenen Form verschwinden, durch Ansetzen von Reihen gesucht, die nach Produkten von Kugelfunktionen fortschreiten. Weiter „werden die Grenzbedingungen am Ellipsoid eingeführt und mit ihrer Hülfe lineare Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten gefunden". „Leider ist die Lösung so kompliziert, daß man nicht erkennen kann, ob sie für Körper, die im Verhältnis zur Wellenlänge groß sind, oder für solche, die klein sind, besser paßt, und daß man sie überhaupt nicht allgemein diskutieren kann." Sa.

A. Wassmuth. Die Bewegungsgleichungen des Elektrons und das Prinzip der kleinsten Aktion. Wien. Ber. **120**, 161-164.

Hölder und Voß haben (Gött. Nachr. 1896 u. 1900) das Prinzip der kleinsten Aktion für rein mechanische Vorgänge in der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta L.\, dt + 2L.\, d\delta t + \delta U'.\, dt] = 0$$

gegeben (L die aktuelle Energie, $\delta U'$ die elementare Arbeit). Soll das Prinzip auch zur Beschreibung nicht rein mechanischer, aber reversibler Prozesse verwendet werden, so empfiehlt sich die Form

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta H.\, dt + (H + E)\, d\delta t + \delta U.\, dt] = 0,$$

wo H das kinetische Potential, als Funktion der generellen Koordinaten p_i und der $\dot{p}_i$, $\delta U = \Sigma p_i \delta p_i$ die elementare äußere Arbeit, $E = \Sigma \dot{p}_i \partial H / \partial \dot{p}_i - H$

die Energie ist. Bei der Ausführung der Variation ergeben sich dann die Lagrangeschen Gleichungen in der Helmholtzschen Form. Als Anwendung werden aus dem gegebenen kinetischen Potential eines Elektrons die Bewegungsgleichungen desselben gefunden. Lp.

L. T. More. On the recent theories of electricity. Phil. Mag. (6) **21**, 198-218.

Eine kurze kritische Würdigung der neueren Elektrizitätstheorien, die eine Verbindung mit der Atomtheorie erstreben und auf der Annahme elektrischer Elementarquanten beruhen, die mit ponderablen Elementarquanten verbunden gedacht werden. Br.

A. E. Haas. Über Gleichgewichtslagen von Elektronengruppen in einer äquivalenten Kugel von homogener positiver Elektrizität. Wien. Ber. **120**, 1111-1171.

Im Anschluß an eine Arbeit von Thomson (Phil. Mag. (6) **7**, 237; F. d. M. **35**, 790, 1904) werden zunächst zwei Bedingungen des Gleichgewichts von Elektronengruppen aufgestellt und darauf Fälle bestimmt, in denen für verschiedenartige Elektronengruppierungen jene beiden Bedingungen des Gleichgewichts erfüllt sind. Als Grundformen von Elektronengruppen werden einfache und zwei konzentrisch ähnliche reguläre Polygone behandelt, ferner Anordnungen in der Form einer Doppelpyramide und eines rechtwinkligen Prismas, schließlich einfache und konzentrisch ähnliche Polyeder. Für das einfache Polygon hat schon Thomson nachgewiesen, daß die Gleichgewichtslage nur dann stabil ist, wenn die Zahl der in ihm vereinigten Elektronen fünf nicht übersteigt. Verf. zeigt, daß die Zahl der Elektronen, die sich in der Form eines einfachen Elektronenringes überhaupt im Gleichgewicht befinden können, als obere Grenze die Zahl $n = 471$ hat. Zwei konzentrisch-ähnliche Elektronenringe können sich immer im Gleichgewicht befinden. In Form einer Doppelpyramide können noch $n + 2 = 473$ Elektronen zu einer Gleichgewichtslage vereinigt sein. Anordnungen in Prismenform sind bei jeder Elektronenzahl möglich.

Für diese verschiedenen Anordnungen werden die Entfernungen der Elektronen bei den speziellen Fällen $n = 1$ bis 6 ausgerechnet, ebenso für die Anordnungen in der Form einzelner und zweier konzentrisch ähnlichen regulären Körper. Fügt man weiter zu einer ganz beliebigen Elektronengruppierung, die sich im Gleichgewichte befindet, noch ein Elektron in dem Kugelmittelpunkte hinzu, so genügt es, damit von neuem Gleichgewicht hergestellt werde, wenn sich die einzelnen Elektronen auf dem durch ihre früheren Lagen hindurchgehenden Radien verschieben.

Bei der Rotation der Elektronengruppen bleiben alle Proportionen und geometrischen Verhältnisse genau dieselben, nur alle Lineardimensionen werden vergrößert. Bei einem bestimmten Wert der Umdrehungszahl verliert aber die Gruppierung ihre Gleichgewichtsfähigkeit. Sa.

H. Th. Wolff. Bemerkungen zu der Frage nach den Kräften, welche die Ladung eines Elektrons zusammenhalten. Ann. der Phys. (4) **36**, 1066-1070.

Da ein endlich ausgedehntes Elektron nur dann denkbar ist, wenn man das Vorhandensein außerelektrischer Kräfte annimmt, die die Teile des Elektrons zusammenhalten, also eine rein elektromagnetische Begründung der Elektronentheorie in dieser Weise nicht möglich ist, so versucht Verf. die erwähnten Kräfte dadurch überflüssig zu machen, daß er für die auf das Elektrizitätsteilchen de wirkende Kraft folgenden Ausdruck annimmt: $\mathfrak{K} = de\,[\mathfrak{E} + kV \operatorname{div} \mathfrak{E}]$, wobei $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke und k einen Skalar bedeuten. Im Anschluß hieran wird nun die Ladungsverteilung bestimmt, die ein Elektron aufweisen muß, damit Gleichgewicht bestehe: $\varrho = \varrho_0 \sin(r\sqrt{1/k})/r\sqrt{1/k}$. Es kann $k = R^2/\pi^2$ gesetzt werden, wobei R den Radius des Elektrons bezeichnet. Auch in bewegten Systemen weist ein im Gleichgewicht befindliches Elektron dieselbe Ladungsverteilung auf. Sa.

L. Grebe. Die Ladung des Elektrons. Math. naturw. Bl. 8, 36-38.

Referat über die Methoden zur Bestimmung der Größe des Elektrons und über die anschließende Diskussion. Sk.

G. H. Livens. The initial accelerated motion of a perfectly conducting electrified sphere. Phil. Mag. (6) **21**, 640-648.

Verf. nimmt an, einer elektrisierten Kugel werde eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung erteilt. Dann folgt aus dieser Bewegung ein bestimmtes elektrisches Feld, das wiederum eine Wirkung auf die Bewegung der Kugel ausübt. Der Beschleunigungskoeffizient in dem Ausdruck für diese Kraft wird als Maß der elektromagnetischen Masse genommen. Die Ausdrücke werden einmal für den Fall einer Anfangsgeschwindigkeit 0, das andere Mal für eine endliche Anfangsgeschwindigkeit abgeleitet. Br.

G. H. Livens. The initial accelerated motion of a rigidly charged dielectric sphere. Phil. Mag. (6) **22**, 169-173.

Enthält die Anwendung der gleichen Methoden auf die gleichförmig beschleunigte Bewegung einer geladenen Isolatorkugel. Br.

G. H. Livens. Some further problems connected with the motion of charged spheres. Phil. Mag. (6) **22**, 943-948.

In dieser Arbeit wird die Vibration und die langsame Rotation geladener leitender Kugeln behandelt. Br.

L. Silberstein. Über die gegenseitige Masse kugelförmiger Elektronen. Physik. Zs. 12, 87-91.

„Ein Blick auf die Struktur des elektromagnetischen Impulses aus dem sich die beiden elektromagnetischen Massen unmittelbar ableiten, genügt, um einzusehen, daß die Gesamtmasse eines Systems von Elektronen von der Summe der Massen seiner Bestandteile verschieden sein wird. Die Differenz beider Größen kann füglich als die gegenseitige Masse bezeichnet werden."

„Jedenfalls schien es mir der Mühe wert, wenigstens für einen konkreten Fall den vollständigen mathematischen Ausdruck der gegenseitigen Masse zweier Elektronen aus den Grundformeln der Elektronentheorie herzuleiten. Als Beispiel wählte ich kugelförmige Elektronen mit homogener Volumenladung, die sich im Bewegungszustand nach Lorentzscher Art abplatten."

Lp.

T. Levi-Civita. Sur les équations générales du mouvement d'un corpuscule dans un champ magnétique et un champ électrique superposés. Arch. for Math. og Naturv. 31, 7 S.

Kürzere Ableitung einiger von Störmer (C. R. 1910) aufgestellten Gleichungen mit Hülfe des Hamiltonschen Prinzipes. Sa.

F. Krüger. Über die Anwendung der Thermodynamik auf die Elektronentheorie der Thermoelektrizität. II. Physik. Zs. 12, 360-368.

Diese Fortsetzung der Arbeit Phys. Zs. 11, 800-808 (F. d. M. 41, 947, 1910) löst die im ersten Teil eingetretenen Schwierigkeiten und zeigt: „wie man bei einer exakten Durchführung der Rechnung unter Zugrundelegung der eingeführten Begriffe zu einer durchsichtigen Analyse der thermoelektrischen Erscheinungen gelangt". Grb.

K. Baedeker. Zur Elektronentheorie der Thermoelektrizität. Ann. der Phys. (4) 35, 75-89.

„Im vergangenen Jahre (F. d. M. 41, 947, 1910) hatte der Verf. eine kurze Darstellung einer neuen, wesentlich thermodynamischen Formulierung der Elektronentheorie der Thermoelektrizität gegeben, deren Hauptgrundlagen die Annahmen waren, daß der negativen Elektrizität in Elektronenform über jedem Metall ein bestimmter Dampfdruck zukomme, und daß dieser Elektronendampf im übrigen die Eigenschaften eines idealen Gases zeige." Die vorliegende Arbeit liefert zu dieser Theorie eine noch etwas vollkommenere Begründung und leitet daraus einige Sätze über Thermoelektrizität ab, und zwar über die Berechnung der Thermokraft einer Metallkombination, der Thermokraft zwischen zwei Kupferjodürpräparaten verschiedenen Leitvermögens, der Veränderung der thermoelektrischen Größen beim Schmelzpunkt und der Thermokraft von Legierungen gegen das lösende Metall. Sa.

A. L. BERNOULLI. Das Nernstsche Wärmetheorem und die Thermodynamik der thermoelektrischen Erscheinungen. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **13**, 573-583.

Man ist bezüglich der drei Effekte: Thermokraft, Peltier- und Thomsoneffekt, noch nicht über empirische Gleichungen hinausgekommen. Selbst bei Verwendung von drei und mehr Konstanten gelingt es nicht, z. B. die Thermokraft einer bestimmten Kombination für einen größeren Temperaturbereich exakt darzustellen. Ebensowenig ist es bis jetzt gelungen, aus den beiden Hauptsätzen allein Beziehungen der thermoelektrischen Effekte zu anderen physikalischen Konstanten abzuleiten. Der Verf. zieht bei seiner Betrachtung das Nernstsche Wärmetheorem heran, und da der Planck-Einsteinsche Ansatz für die innere Energie von selbst das Nernstsche Wärmetheorem befriedigt, benutzt er diesen spezielleren Ansatz und gelangt zunächst zu allgemeinen, etwas komplizierten Formeln, die aber mit Berücksichtigung der tatsächlichen Verhältnisse in einfachere Annäherungsformeln übergehen. So wird die Thermokraft:

$$(\varepsilon_{12}) = \frac{R}{F}\left\{\ln\frac{\nu_1}{\nu_2} - \frac{\beta}{T}(\nu_1 - \nu_2)\right\},$$

wo die Bezeichnungen die allgemein üblichen sind. Diese Annäherungsformel genügt, um die oben gestellten Anforderungen in befriedigender Weise zu erfüllen. Lp.

A. L. BERNOULLI. Das Gesetz von Babo und die Elektronentheorie der metallischen Mischkristalle. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **13**, 213-218.

Berichtigung des Vorzeichens für den Temperaturkoeffizienten der Thermokraft in der von R. Schenck (Ann. der Phys. (4) 32, 261-290; F. d. M. **41**, 957, 1910) abgeleiteten Formel, indem bei der Ableitung das Babosche Gesetz der Dampfdruckverminderung durch einen gelösten Stoff angewendet wird. Lp.

A. L. BERNOULLI. Zur Elektronentheorie der metallischen Mischkristalle. Ann. der Phys. (4) 35, 162-170.

„Der ganze Komplex der von R. Schenck (Physik. Zs. 8, 239, 1907; Zs. f. Elektrochemie **17**, 649, 1909; Ann. der Phys. **32**, 284, 1910) behandelten Erscheinungen an festen metallischen Lösungen, also vor allem das Schencksche Gesetz der Thermokräfte ist ableitbar aus den folgenden beiden einfachen Ausgangshypothesen: 1. Die „wirksame Teilchenzahl" $\mathfrak{N}$ für eine verdünnte feste Metallösung muß sein $\mathfrak{N} = N' + N_\mu$, d. h. gleich der Summe aus Anzahl der freien Elektronen und der Konzentration der gelösten Fremdmetallmoleküle. 2. Der Elektronendruck der festen Lösung folgt dem Baboschen Gesetz der Dampfdruckverminderung." Sa.

J. ISHIWARA. Zur Theorie der Elektronenbewegung in Metallen. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 15-34, 36-46.

Die Elektronenbewegung in Metallen wird wie in der Gastheorie nach zwei Methoden behandelt, von denen die eine von der Berechnung der Elektronenströmung durch eine Fläche, die andere von der Bildung der allgemeingültigen Gleichung für die Elektronenzahl innerhalb eines Volumenelementes ausgeht. Die erste Methode wird im ersten Abschnitt angewandt auf die Elektrizitäts- und Wärmeleitung der Metalle. Die Elektronen werden dabei nach H. A. Lorentz als elastische Kugeln, die Metallmoleküle als ruhend vorausgesetzt. — Die zweite Methode wird im nächsten Teil behandelt; es wird hierbei die Lorentzsche Ableitung der Verteilungsfunktion korrigiert und die allgemeine Gleichung für die entwickelte Wärme abgeleitet. Zum Schluß wird die Gleichwertigkeit beider Methoden bewiesen. Zö.

J. Ishiwara. Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit für oszillierende elektrische Kraft aus der Elektronentheorie. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 56-65.

Es werden Einwände erhoben gegen die Gedankengänge in der Wilsonschen Arbeit (F. d. M. **41**, 943, 1910), und mit ihrer Unzulässigkeit wird die Unstimmigkeit mit den Ergebnissen von H. A. Lorentz erklärt. Zö.

J. Ishiwara. Weiteres zur Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 72-81.

Die Verallgemeinerung der für ruhende Körper geltenden Maxwellschen Theorie auf den Fall bewegter Körper gab der Verf. rein auf Grund des Lorentz-Einsteinschen Relativitätsprinzips; in dieser Arbeit gibt er weitere Entwicklungen in dieser Richtung und leitet insbesondere einen Ausdruck für die im elektromagnetischen Felde auf die Volumeneinheit eines Körpers wirkende ponderomotorische Kraft ab, der, auf ruhende Körper angewandt, nur experimentell nachweisbare Glieder enthält. Zö.

J. Ishiwara. Weiteres zur Dynamik bewegter Systeme. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 81-89.

Einige Beiträge zur rein elektromagnetischen Begründung der Dynamik. Die Masse wird als Quotient aus äußerer Kraft und Beschleunigung definiert; das führt nur nach der Auffassung der alten Mechanik zu einem Widerspruch, nicht aber nach dem Gesichtspunkt der Relativitätstheorie. Zö.

J. W. Nicholson. On the number of electrons concerned in metallic conduction. Phil. Mag. (6) **22**, 245-266.

Eine kurze Besprechung der Theorien, nach denen die Elektrizitätsleitung auf der Fortpflanzung von Elektronen beruht, die den materiellen Atomen zugeordnet sind, aber durch Zusammenstöße mit ihnen in der Geschwindigkeit nicht beeinträchtigt werden. Br.

A. CAMPETTI. Studi recenti intorno alle leghe. Nuovo Cimento (6) **2**, 323-328.

Die neueren Arbeiten über Legierungen, besonders die Schenck sche Theorie, werden behandelt. Sa.

R. GANS. Zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus. Zweite Mitteilung. Gött. Nachr. 1911, 118-164.

In den Voraussetzungen der ersten Mitteilung, in der die Erscheinungen des Ferromagnetismus auf elektronentheoretischer Grundlage behandelt werden, war „nichts enthalten, was es ermöglichte, den Temperaturbegriff in die Betrachtungen einzuführen“. Deswegen wird jetzt die Annahme eingeführt, „daß die Magnetonen innerhalb des Elementarkomplexes von fest gegebener Form und unveränderlicher Lage hin- und herfliegen können wie die Moleküle eines Gases und sich gegenseitig stoßen und ablenken“. Mit Hülfe der Methoden der statistischen Mechanik wird dieser thermischen Agitation Rechnung getragen und eine Formel für die Magnetisierungskurve eines Elementarkomplexes erhalten, in der die Temperatur als Parameter auftritt. Auf Grund der Stabilitätsbetrachtungen gelingt es, „die ganze Magnetisierungskurve zu berechnen und Beziehungen, wie z. B. die Abhängigkeit der Koerzitivkraft von der Temperatur, anzugeben, die einer experimentellen Nachprüfung fähig sind, und durch die einige vom molekulartheoretischen Standpunkte aus wichtige Konstanten, nämlich die Anzahl der Magnetonen in der Volumeneinheit und das mittlere magnetische Moment eines Magnetons, sich bestimmen lassen“. Sa.

F. MICHAUD. Sur les piles de gravitation. Journ. de Phys. (5) **1**, 123-127.

Der Verf. gibt eine Theorie der galvanischen Gravitationsketten, d. h. solcher, bei denen der Strom durch zwei gleiche Elektroden erregt wird, die in demselben Elektrolyten sich befinden, aber in verschiedenen Höhen. Durch Betrachtung eines isothermen Zyklus reversibler Operationen, die an dem System vollzogen werden, gelingt es, die ins Spiel tretenden Größen zu berechnen. Lp.

A. MAZZUCCHELLI. Numeri di trasporto e complessità molecolare. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_2$, 124-129.

Die Größe der elektrolytischen Leitung wird benutzt, um einige Fragen über die Polymerisation von Elektrolyten zu lösen. Sa.

L. ROLLA. Su la diffusione degli elettroliti nei colloidi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 47-51.

Bestimmung der Diffusionskonstanten von KCl und $NaCl$ in Gelatine.
Sa.

A. LAMPA. Theorie der Drehfelderscheinungen im einfachen elektrostatischen Wechselfeld. Wien. Ber. **120**, 1007-1018.

Die Arbeit gibt eine theoretische Ableitung der Drehfelderscheinungen, die v. Lang in seiner Abhandlung „Versuche im elektrostatischen Wechselfelde" (Wien. Ber. **116**, 1907) beschrieben hat. In einem homogenen Wechselfeld befinden sich eine in ihrem Mittelpunkte hängende kreisförmige Papierscheibe und zwei gleiche Kugeln aus gleichem Material. Die Entfernung derselben sei so groß gegen ihren Radius, daß die gegenseitige Einwirkung der beiden Kugeln vernachlässigt werden kann. Verf. beschränkt sich darauf, als wirkenden Körper ein hysteresisfreies leitendes Dielektrikum vorauszusetzen und dem Medium des Feldes die gleichen Eigenschaften zuzuschreiben. Mit diesen Voraussetzungen gelingt es, die Beobachtungen der obigen Abhandlung zu deuten. Nur an Metallen und einigen Halbleitern ist bei kleinem Radius die Erklärung schwieriger.
Sa.

R. BOULOUCH. Extension du raisonnement de Coulomb. Bordeaux Procès-Verb. 1910/11, 74-76.

Verf. zeigt, daß die Annahme, elektrostatischer Druck und Feldintensität seien senkrecht zur Oberfläche des Leiters, zu weit ist; es genügt, die Voraussetzung vom Feld allein zu machen.
Grb.

M. K. GROBER. Verwendung von Baretter und Thermoelement zu Meßzwecken. Physik. Zs. **12**, 239-241.

Der Verf. bringt einen kleinen Ausschnitt aus seinen erst später zu veröffentlichenden theoretischen Studien zum Baretter, um eine durch Arbeiten von Th. Neuhaus und W. Kempe aufgedeckte Frage zu klären. Es handelt sich darum, ob Messungen, insbesondere des Dämpfungsdekrements vom Indikator, Baretter oder Thermoelement, unabhängig seien. Der Verf. zeigt, daß wegen der Anwendung des Baretters in Brückenschaltung die Ausschläge des Meßinstruments nicht einfach proportional seiner Widerstandsänderung sind, wie beim Thermoelement, sondern sich durch eine lineare Transformation

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (b = 0)$$

darstellen lassen. Bei den gebräuchlichen Anordnungen ist aber cx stets so klein gegen d, daß man analoge Werte wie beim Thermoelement erhält, wobei natürlich über das Verhältnis der Empfindlichkeiten nichts ausgesagt sein soll.
Gr.

M. K. Grober und H. Zöllich. Zur Theorie der thermischen Meßgeräte. I. Theorie des Baretters. (Vorläufige Mitteilung.) Physik. Zs. 12, 1048-1053.

§ 1. Historische Vorbemerkungen. § 2. Bisherige Untersuchungen über den Baretter. § 3. Temperaturverteilung im Baretterdraht. § 4. Statische Charakteristik des Baretters. § 5. Die Baretterempfindlichkeit. § 6. Der Baretter im Schwingungskreis. Lp.

Br. Glatzel. Die Trägheit von Selenzellen. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. 13, 787-792; Physik. Zs. 12, 1169-1175.

Zunächst wird eine neue Methode zur Bestimmung des Trägheitskoeffizienten von Selenzellen angegeben; ihre Theorie wird entwickelt und dann durch oszillographische Aufnahmen von Selenkurven bestätigt. Zuletzt werden die Bedingungen zur Herstellung trägheitsloser elektrolytischer Selenzellen besprochen. Lp.

E. Altenkirch. Elektrothermische Kälteerzeugung und reversible elektrische Heizung. Physik. Zs. 12, 920-924.

Verf. gibt darüber Aufschluß, „welche Möglichkeiten physikalisch für die elektrothermische Kälteerzeugung bestehen, und welche Energieersparnis die Verwendung der Peltierwärme zur Heizung gegenüber der Jouleschen im Gefolge haben kann“. Grb.

H. Stanley Allen. The path of an electron in combined radial magnetic and electric fields. Lond. R. S. Proc. (A) 85, 257-262.

Enthält den allgemeinen Ansatz für das im Titel genannte Problem mit spezieller Berücksichtigung zweier für die experimentelle Prüfung bestimmten Sonderanordnungen, eines radialen elektrischen und eines radialen magnetischen Feldes. Br.

Gouy. Sur un cas particulier de l'action intercathodique. C. R. 153, 1438-1441.

Sind in einer Crookesschen Röhre die beiden Elektroden Zylinder, deren gemeinsame Achse (Kathode innen) die Richtung des magnetischen Feldes hat, so bewegt sich nach Bloch (C. R. 1910, 1911) jedes von der Kathode ausgesandte Elektron in einer ebenen Spirale, die einen Kreis R zur Asymptote hat. Verf. zeigt, daß das Elektron epizykloidenähnliche Kurven beschreibt, die den Kreis R berühren. Indem das Elektron also die Kreisenveloppe berührt, geht es durch ein Maximum des Potentials. Steht das magnetische Feld senkrecht zur Achse, so wird die Kreisenveloppe sichtbar. Sa.

A. Bernini. Contributo allo studio della velocità degli ioni di fiamma. Nuovo Cimento (6) 2, 101-130.

Verf. diskutiert die drei von Thomson, Child und Gianfranceschi für die Ionengeschwindigkeit abgeleiteten Formeln an der Hand zahlreicher, von ihm angestellter Versuche. Sa.

R. D. Kleeman. On the nature and velocity of an ion in a gas. Cambr. Phil. Soc. Proc. 16, 285-298; Physik. Zs. 12, 900-908.

Mathematische Untersuchungen über die Beschaffenheit der Ionen unter der Voraussetzung, daß diese Beschaffenheit sich fortwährend verändert bei konstanter Temperatur. Diese Voraussetzung ist zwar nicht üblich, aber ihre Notwendigkeit folgt aus thermodynamischen Betrachtungen. J.

M. Reinganum. Ionenbeweglichkeit in Gasen. Physik. Zs. 12, 575-580, 666-671.

Experimentell war das merkwürdige Resultat von Wellisch, Frank usf. gefunden worden, daß schwere Ionen oder radioaktive Restatome ungefähr die gleiche Geschwindigkeit haben in leichten Gasen wie leichte Gase selbst. Verf. hat nun gezeigt, daß dies theoretisch abzuleiten nicht unmöglich ist. Grb.

J. S. Townsend. On the conductivity of a gas, between parallel plate electrodes, when the current approaches the maximum value. Lond. R. S. Proc. (A) 86, 72-77.

Es wird der Unterschied zwischen dem Maximalwert und Minimalwert der Kraft des elektrischen Feldes behandelt, das zwischen zwei parallelen Elektroden in einem durch Einwirkung von Strahlen ionisierten Gas zustande kommt. Br.

J. Malassez. Recherches sur les rayons cathodiques. Ann. de Chim. et Phys. (8) 23, 231-275, 397-424, 491-521.

„Die Kathodenstrahlen werden unter der Potentialdifferenz ausgesandt, die zwischen der Kathode und der Anode besteht, und zwar erhalten sie beim Austritt aus der Kathode die ihnen eigentümliche kinetische Energie; dieser Beweis ist geführt einmal durch Wegnahme, ein anderes Mal durch Zufuhr einer festen Potentialdifferenz. Die Messung von e/m nach der Methode von Kaufmann-Simon gibt einen schwächeren Wert als den früher angenommenen; er liegt bei $1{,}77 \cdot 10^7$, welche Zahl sich den sehr sorgfältigen Messungen von Kaufmann über die β-Strahlen des Radiums nähert und den Messungen von Classen und Kurt Wolz über die Kathodenstrahlen. Die Divergenz der bei diesen Messungen erhaltenen Ergebnisse kann

nicht der Anwendung der elektrostatischen Deviation oder der Schuster-schen Formel zugeschrieben werden, weil unter Absehung von den Versuchsfehlern diese beiden Relationen zu demselben Ergebnisse führen. Lp.

E. Rutherford. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. Phil. Mag. (6) 21, 669-688.

Enthält auch eine Anzahl von theoretischen Überlegungen über die Ablenkung von α- und β-Strahlen beim Auftreffen auf Atome und über die Geschwindigkeitsänderungen, die sie bei solchem Auftreffen erfahren. Br.

A. S. Eve. On the ionization of the atmosphere due to radioactive matter. Phil. Mag. (6) 21, 26-40.

Enthält auch einige theoretische Überlegungen über die Abhängigkeit des Ionisationsgrades von der Art und dem Charakter des ionisierenden Agens, von der Höhe über dem Boden usw. Br.

S. Kinoshita, S. Nishikawa, S. Ono. On the amount of the radioactive products present in the atmosphere. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 92-111; Phil. Mag. (6) **22**, 821-840.

Aus den mathematischen Ableitungen dieser sonst experimentellen Arbeit ist hervorzuheben: Es wird abgeleitet, daß die Anzahl der pro Sek. auf die Längeneinheit eines frei in Luft ausgespannten Drahtes niedergeschlagenen Partikeln von Radium *A* von der Beweglichkeit der Partikeln, der Höhe des Drahtes über dem Erdboden und seiner Ladung, nicht aber von der Windgeschwindigkeit abhängt, falls die Komponente senkrecht zur Drahtachse einen gewissen Wert übersteigt. Zö.

E. A. Owen. On the scattering of Röntgen-radiation. Cambr. Phil. Soc. Proc. **16**, 161-166.

Owen berechnet auf Grund der Theorie, daß die Röntgenstrahlen Pulsationen im Äther sind, die Verteilung der um einen Radiator verursachten sekundären Strahlung. Dann werden experimentelle Untersuchungen beschrieben. J.

M. Moulin. Recherches sur l'ionisation produite par les rayons α. Ann. de Chim. et Phys. (8) **21**, 550-567; **22**, 26-107.

„Die Ionisierung, die das Teilchen α längs seines Durchganges durch das Gas erzeugt, ist (abgesehen von der Verteilung) identisch mit der Ionisierung, welche die anderen ionisierenden Agentien erzeugen. Die von der Gesamtheit der Teilchen erzeugte Ionisierung nimmt zunächst in dem Maße zu, wie die

Geschwindigkeit dieser Teilchen abnimmt, und geht durch ein Maximum gegen das Ende der durchlaufenen Bahn.... Mit der besonderen Struktur der α-Strahlen und mit der Tatsache, daß das Teilchen eine sehr große Zahl von Ionen längs seiner Bahn erzeugt, ist eine intensive Wiedervereinigung der Ionen verbunden, die zwischen allen durch ein und dasselbe Ion erfolgt und nicht etwa allein zwischen den beiden von einem und demselben Atom stammenden Ionen." Lp.

P. Weiss. Sur la rationalité des rapports des moments magnétiques moléculaires et le magnéton. Journ. de Phys. (5) **1**, 900-912, 965-988; Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **13**, 718-755.

„Ich habe durch die Anwendung der kinetischen Theorie des Magnetismus auf die in Lösung befindlichen paramagnetischen Körper, auf die festen paramagnetischen und ferromagnetischen Körper das magnetische Moment des Atoms der ferromagnetischen Metalle und zahlreicher anderer Atome bestimmt, für welche man einer leichten Erlangung dieser Größe nicht gewärtig war. Dabei hat sich jener seltsame Umstand gezeigt, daß dasselbe Atom nicht bloß ein einziges magnetisches Moment besitzt, sondern daß diese Größe eine gewisse Anzahl verschiedener Werte annimmt je nach den Bedingungen der Temperatur, der chemischen Bindung, unter denen das Atom sich befindet. Alle diese Werte stehen in rationalen Verhältnissen zueinander. Man kann also zwischen den magnetischen Atommomenten eines und desselben Metalles zunächst einen gemeinschaftlichen aliquoten Teil finden. Dann kann man sich versichern, daß die aliquoten Teile der verschiedenen Atome sämtlich die nämlichen sind. Dieses gemeinsame Submultiplum der Atommomente ist Magneton benannt worden. Wenn man, was äußerst wahrscheinlich scheint, zugibt, daß dieses magnetische Elementarmoment seinen Sitz in einem materiellen Substrat hat, das wahrscheinlich eine wägbare Masse besitzt, so kann man sagen: Das Magneton ist ein konstituierendes Element, das einer großen Zahl von Atomen gemeinschaftlich ist und ohne Zweifel sogar allen. Der Nachweis ist zurzeit geführt für die Atome von *Fe*, *Ni*, *Co*, *Cr*, *Mn*, *V*, *Cu*, *Hg*, *U*." Lp.

A. Heydweiller. Zur Magnetonentheorie. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **13**, 1063-1064.

In der vorstehend angezeigten Arbeit hat W e i s s bei den paramagnetischen Salzen nur einen Teil des sehr umfangreichen Materials benutzt und nur solche, die nicht absolute, sondern nur relative Messungen umfassen. Die Richtigkeit der gezogenen Schlüsse ist daher zu beanstanden. Lp.

O. Grotrian. Der Eisenzylinder im homogenen Magnetfelde. Ann. der Phys. (4) **34**, 1-56; **36**, 929-957.

Verf. bestimmt den Verlauf der Induktions- und Kraftlinien in Eisenzylindern, die in einem homogenen Felde so aufgestellt sind, daß die Kraftlinien des ursprünglichen Feldes der Zylinderachse parallel verlaufen. Durch

Versuche, die bei sehr schwachen Feldern ausgeführt werden, so daß Permeabilität und Suszeptibilität als konstant angesehen und der Einfluß der Hysteresis als verschwindend klein angenommen werden kann, wird zunächst der Induktionsfluß ermittelt, der verschiedene zur Achse senkrechte Querschnitte des Eisenzylinders sowie auch Kreisflächen von bestimmter Größe an der Stirnfläche durchsetzt. Im Anschluß hieran wird die Dichte der idealen Schicht berechnet. Da hierzu die Ableitung des Induktionsflusses $\mathfrak{Z}_0$ nach der Entfernung von der Mitte des Stabes gebraucht wird, so stellt Verf. der größeren Genauigkeit wegen die $\mathfrak{Z}_0$-Kurve durch mehrere Interpolationsformeln dar. Bei der Berechnung des Potentials der magnetischen Kraft nimmt Verf. für das Potential längs der Achse eine ungerade Funktion neunten Grades des Abstandes der Potentialpunkte von der Mittelebene an. Die fünf Konstanten werden durch die Werte von $\mathfrak{Z}_0$ bestimmt.

Der Verlauf der Induktionslinien ist in vier Figuren dargestellt. Sa.

A. Bernini. Sul magnetismo susseguente del ferro. Nuovo Cimento (6) 2, 291-322.

Das Gesetz, nach dem Eisen in einem magnetischen Felde seine endgültige Magnetisierung annimmt, ist für die betrachteten Bedingungen (d. h. für Felder von 0,035 bis 0,14 Einheiten, für verschiedene Eisensorten mit oder ohne remanenten Magnetismus, parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien des induzierenden Feldes unterteilt, und für Temperatur von 15°-150°) darstellbar durch die Gleichung $\varphi = A(1 - e^{-\lambda \sqrt[3]{t}})$. Die Variationen der Versuchsbedingungen rufen innerhalb der betrachteten Grenzen nur Variationen in den Werten von A und λ hervor. Sa.

R. A. Houstoun. On magneto-striction. Phil. Mag. (6) 21, 79-83.

Gibt eine kurze Ableitung des Kelvinschen Satzes, daß eine Substanz, deren Magnetismus mit der Temperatur abnimmt, eine Abkühlung erfährt, sobald man sie von einem Magneten entfernt, und des ferneren Satzes, daß ein Draht, der magnetisiert wird, an Länge zunehmen muß, wenn seine magnetische Induktion beim Dehnen zunimmt, und umgekehrt. Br.

M. la Rosa. Due regole semplici per l'interpolazione grafica fra due curve particolari di magnetizzazione. Nuovo Cimento (6) 1, 115-119.

Verf. gibt nach der Scherungsregel von Rayleigh (Phil. Mag. 22, 5, 175) eine graphische Methode, nach der man aus zwei Magnetisierungskurven für eine andere Körperform bei bekanntem Scherungswinkel für eine gegebene Magnetisierungsstärke das Feld und für ein gegebenes Feld die Magnetisierungsstärke bestimmen kann. Sa.

E. Daniele. Sul problema dell' induzione magnetica di un ellisoide a tre assi. Nuovo Cimento (6) 1, 421-430.

E. Daniele. Sull' induzione magnetica di un involucro ellissoidico. Nuovo Cimento (6) 2, 131-140.

Verf. löst das Problem der magnetischen Induktion für das Ellipsoid unter der Annahme, daß die Potentialfunktion des induzierenden Feldes auf der Oberfläche die Werte eines gegebenen Polynoms beliebigen Grades der Koordinaten annimmt. Die Rechnung wird für den Fall, daß die Funktion eine homogene Funktion zweiten Grades ist, genauer angegeben. In der zweiten Arbeit wird dieselbe Aufgabe für das Hohlellipsoid gelöst. Besonders wird der Fall des homogenen Feldes behandelt. Bei demselben hat man in dem ausgehöhlten Teile nach der Magnetisierung des Hohlellipsoides ein homogenes Feld, das aber in der Richtung nicht mit dem magnetisierenden übereinstimmt. Ferner magnetisiert sich die Masse des Hohlkörpers nicht homogen wie bei dem Vollellipsoid. Diese Resultate stimmen mit den von F. Neumann (Vorl. ü. d. Theorie des Magnetismus, 1881) für die Hohlkugel erhaltenen überein.
Sa.

E. Daniele. Sull' impiego delle funzioni ellissoidali armoniche nei problemi relativi ad un involucro ellissoidico. Nuovo Cimento (6) 2, 445-452.

Morera hat (Torino Mem. (2) 55, 1-25; F. d. M. 36, 831, 1905) folgende Aufgabe gelöst: Es ist eine innerhalb und außerhalb eines Ellipsoides harmonische Funktion zu bestimmen, die auf der Oberfläche desselben die Werte eines beliebig gegebenen Polynoms annimmt. Verf. dehnt die Resultate auf den Fall eines Hohlellipsoides aus, das von zwei konfokalen Ellipsoiden begrenzt ist, wobei die Funktion auf den Oberflächen mit zwei gegebenen Polynomen übereinstimmen soll. Die Formeln enthalten die Lösung Moreras als speziellen Fall. Ebenso wie man Moreras Funktion als die Potentialfunktion einer Masse, die über die Oberfläche mit bestimmter Dichte verteilt ist, interpretieren kann, ist auch in dem Falle des Hohlellipsoides die Funktion als die Potentialfunktion einer über die Oberflächen der beiden Ellipsoide verteilten Masse aufzufassen.
Sa.

F. Richarz. Über den Magnetismus von Legierungen. Physik. Zs. 12, 151-158.

Die Abhandlung gibt einen Bericht über die zugehörigen Arbeiten. Nachdem zunächst die experimentellen Tatsachen über paramagnetische Legierungen mit ferromagnetischen Komponenten und über ferromagnetische Legierungen mit paramagnetischen Komponenten mitgeteilt worden sind, wird über die von Heusler und besonders von Richarz mit Hülfe der Elektronentheorie gegebene Erklärung der Magnetisierbarkeit der Heuslerschen Legierungen und ihre Beziehung zu anderen physikalischen Eigenschaften näher berichtet. Im übrigen muß auf die Abhandlung selbst verwiesen werden.
Sa.

A. Leduc. Sur le travail d'aimantation. C. R. **152**, 1243-1245.

Verf. zeigt, daß für die Magnetisierungsarbeit die Formel besteht $dT_a = HdM$ oder $dT_a = Hd(vI)$, wenn v das Volumen eines Stabes aus weichem Eisen, der sich unter der Einwirkung eines Feldes H befindet, M sein magnetisches Moment in diesem Felde und I die Magnetisierungsintensität bezeichnet. Die früheren Formeln z. B. von Mascart und Gérard: $dT_a = MdH$ oder $dT_a = IvdH$ sind falsch. Für para- oder diamagnetische Körper ist $MdH = HdM$; ebenso ist für einen geschlossenen Magnetisierungskreis $\int IvdH = \int Hd(vI)$. Sa.

A. Leduc. Application des principes à un cas de magnétostriction. C. R. **152**, 853-855.

Es wird die Veränderung der Länge l eines Drahtes aus weichem Eisen, der parallel zu den Kraftlinien eines magnetischen Feldes H ist, behandelt. Die Abhängigkeit wird ausgedrückt durch die Gleichung: $\frac{1}{v}\frac{\partial M}{\partial P} = -\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial H}$, wenn v das Volumen des Drahtes, M das magnetische Moment und P den Druck pro Flächeneinheit bedeutet. Sa.

A. Esau. Widerstand und Selbstinduktion von Spulen für Wechselstrom. I. Spulen mit einer Wickelungslage. II. Mehrlagige Spulen. III. Einfluß der Dämpfung auf Widerstand und Selbstinduktion. Ann. der Phys. (4) **34**, 57-94, 547-564.

Zusammenstellung zahlreicher bekannter Formeln für Widerstand und Selbstinduktion von Spulen für Wechselstrom. Im Anschluß an Sommerfelds Theorie werden weitere Formeln abgeleitet, insbesondere für den Fall gedämpfter Schwingungen; ferner werden experimentelle Resultate angegeben. Zö.

A. Esau. Über den Selbstinduktionskoeffizienten von Flachspulen. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. 5, 212-217.

Die neue Formel wird mit denen von Strasser, Stefan und experimentellen Werten verglichen; sie gibt „exakte Werte, wenn das Verhältnis $\frac{\text{Wickelungshöhe}}{\text{Radius}} \leqq 0{,}5$ ist". Grb.

H. Nagaoka. Note on a hypergeometrical series for the mutual inductance of two parallel coaxial circles. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 10-14.

H. Nagaoka. A table for facilitating the calculation of mutual inductance of two parallel coaxial circles. Tokyo Math. Ges. (2) **6**, 47-51.

H. Nagaoka. Attraction between two coaxial parallel circular currents. Tokyo Math. Ges. (2) 6, 152-158.

Die drei Abhandlungen befassen sich mit praktisch brauchbaren, rasch konvergierenden Reihenentwicklungen für die gegenseitige Induktion M von zwei parallelen koaxialen Kreisen. Die erste zeigt, daß eine von Grover abgeleitete vereinfachte Formel für M auch aus andern Reihenentwicklungen folgt, wie z. B. aus der vom Verf. angegebenen Entwicklung nach q-Funktionen und aus der Maxwellschen Darstellung mittels elliptischer Integrale Ferner gibt sie eine neue Formel mit nur einer hypergeometrischen Reihe, die rasch konvergiert, wenn auch nicht so rasch wie bei der früheren Formel die q-Reihe. Immerhin ist sie vorzuziehen bei geringem Abstand und nahezu gleichen Abmessungen beider Kreise. Statt des Moduls k ist hier k_1, d. h. ein kleinerer Wert, zugrunde gelegt. Die zweite Abhandlung gibt eine Tabelle zur bequemen Berechnung der gegenseitigen Induktion nach dieser letzten Formel, ohne Verwendung von Tabellen elliptischer Integrale. In der dritten werden alle gewonnenen Ausdrücke für M differenziert; so wird die Größe der Anziehung oder Abstoßung beider Kreise in mehreren Entwicklungen erhalten. Auch hier sind Tabellen zur praktischen Berechnung von $\frac{\partial M}{\partial z}$ beigegeben.

Zö.

F. Rusch. Plattenförmige Leiter in zylindrischem Wechselfeld. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. 4, 459-480.

Verf. hat folgendes Problem gelöst: „In einem Eisenspalt mit parallelen Wänden sollen mehrere stabförmige Leiter liegen, die alle von demselben Wechselstrom $i = I \sin \omega t$ durchflossen werden. Der Eisenkörper möge soweit unterteilt sein, daß Wirbelstrom und Hysteresis vernachlässigbar klein werden.“

Grb.

F. Rusch. Die Goldschmidtsche Hochfrequenzmaschine. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. 4, 348-357.

Zunächst wird gezeigt, daß die Lösung der Differentialgleichungen dieselbe Form behält, wenn man einmal den Rotor mit Gleichstrom erregt oder aber den Stator mit Wechselstrom von der Periodenzahl der Drehung, und weiter folgt, „daß die Hochfrequenzmaschine im allgemeinen ein Schwingungsgemisch erzeugt, aus dem nur eine Schwingung durch Resonanz besonders stark hervortritt.“

Grb.

B. Macků. Zur Theorie der Goldschmidtschen Hochfrequenzmaschine. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. 5, 5-14.

Eine Theorie mit mehreren schwer realisierbaren Annahmen. Grb.

P. O. Pedersen. Wirbelstromverluste in und effektiver Widerstand von geraden, runden Metallzylindern. Formelsammlung und Tabellen. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. **4**, 501-515.

Es werden die Funktionen *ber* und *bei* für kleine Tafelintervalle 0,2 berechnet (Savidge, F. d. M. **41**, 532, Intervall 1) von 0 bis 6 und ebenso die für die Technik wichtigen Differential- und Integralfunktionen bestimmter Verbindungen derselben, über deren Verwendung eine Formelsammlung Aufschluß gibt. Grb.

E. H. Hall and L. L. Campbell. On the electromagnetic and the thermomagnetic transverse and longitudinal effects in soft iron. Amer. Ac. Proc. **46**, 625-668.

Zusammenstellung der möglichen „Transversaleffekte“ (Hall-, Ettingshausen-, Nernst-, Leduc-Effekt) und „Longitudinaleffekte“ (vier Arten); experimentelle Ermittlung ihrer Konstanten. Zö.

O. M. Corbino. Elektromagnetische Effekte, die von der Verzerrung herrühren, welche ein Feld an der Bahn der Ionen in Metallen hervorbringt. Physik. Zs. **12**, 561-568.

„Es war ein naturgemäßer Gedanke, von dem Kapitel des Ohmschen Gesetzes zu den übrigen Kapiteln der Elektrizitätslehre überzugehen, und zwar zum Elektromagnetismus, zu den elektrodynamischen Kräften, zur elektromagnetischen Induktion, und zu untersuchen, welche neuen Effekte zweiter Art wir auf Grund der Theorie vorhersagen und durch das Experiment nachweisen können. Ich beabsichtige, hier das Vorhandensein der Grunderscheinungen und ihre Abhängigkeit von einem einzigen für das Metall charakteristischen Parameter festzustellen. Diesen Parameter will ich das Differential-Ionenmoment des Metalles nennen.“

Die einzelnen Abschnitte der Arbeit haben die Überschrift: II. Elektromagnetische Wirkung einer Scheibe, die von einem Strome in radialer Richtung durchflossen wird und in einem konstanten Felde angeordnet ist. III. Energie der Scheibe im Felde — Elektromagnetische Kräfte. IV. Radial gerichtete elektromotorische Kräfte, die seitens eines veränderlichen Feldes in einer Metallscheibe erzeugt werden. V. Drehung einer in radialer Richtung von einem Wärmestrome durchflossenen Wismutscheibe im Magnetfelde (vgl. das folgende Referat). Lp.

M. Corbino. Azione elettromagnetica degli ioni dei metalli, deviati dalla traiettoria normale per effetto di un campo magnetico. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 342-344; Nuovo Cimento (6) **1**, 397-420.

M. Corbino. Azione elettromagnetica d'un disco percorso da corrente radiale e disposto in un campo. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_1$, 416-423.

M. Corbino. Forze elettromotrici radiali indotte in un disco metallico da un campo magnetico variabile. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 424-428.

Eine Wismutscheibe, die senkrecht zu den Kraftlinien eines magnetischen Feldes liegt, wird radial von einem Strom durchflossen. Die Scheibe ist von einer Spule umgeben, die mit einem Galvanometer verbunden ist. Ist der Magnet erregt, so entsteht beim Öffnen und Schließen des Stromes der Scheibe in der Spule ein Induktionsstrom. Verf. zeigt mit Hülfe der Elektronentheorie, daß sich bei Erregung des Feldes die positiven und negativen Ionen nicht mehr radial, sondern in logarithmischen Spiralen bewegen. Er berechnet die Größe der Induktionskraft und vergleicht den Koeffizienten des elektromagnetischen Effekts mit dem des Hall-Effekts.

Während also die von einem radialen Strom durchflossene Scheibe eine kleine Veränderung des bestehenden Feldes hervorbringt, erzeugt umgekehrt, wie in der dritten Arbeit gezeigt wird, die Entstehung des Feldes in der Scheibe eine radiale elektromotorische Kraft, und zwar ist die Richtung derselben beim Verschwinden des Feldes die umgekehrte. Die Induktionskraft ist aber unabhängig von der Richtung des Feldes, da sie nur von dem Quadrate der Feldstärke abhängt. Sa.

O. M. Corbino. Variazioni periodiche di resistenza dei filamenti metallici sottili resi incandescenti con correnti alternate e deduzione delle loro proprietà termiche a temperatura elevata. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 222-228; Physik. Zs. **12**, 292-295.

Um die Widerstandsänderungen eines von Wechselstrom durchflossenen dünnen Drahtes zu finden, führt der Verf. durch zwei gleiche Drahtrollen, die als Elektromagnete an der Braunschen Röhre liegen, einen Strom (die eine Rolle hat konstanten Widerstand, die andere den zu untersuchenden Draht). Ist der Strom in I i, in II i':

$$i = A \sin wt,$$
$$i' = A_1 \sin wt + B_1 \cos wt + A_2 \sin 2wt + \cdots,$$

der in der dazu senkrecht stehenden Rolle

$$i_s = x \sin wt,$$

so gibt die Kombination aus i_s, i oder i_s, i' Aufschluß über die Einwirkung des Drahtes. Hieraus berechnet man, daß für jedes Gramm Masse des Fadens ein Zehntel einer kleinen Kalorie nötig ist, wenn sich der Widerstand um ein Tausendstel ändern soll. Grb.

O. M. Corbino. Rotazione nel campo magnetico di un disco di bismuto, riscaldato al centro o alla periferia. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 569-574.

Die Erscheinung, daß eine im Winkel von 45° zu den magnetischen Kraftlinien aufgehängte Wismutscheibe durch Bestrahlen (Erwärmen) des Mittel-

punktes, d. h. bei Existenz eines radialen Wärmestromes sich dreht, wird im Anschluß an die Drudesche Theorie der Wärmeleitung in Metallen elektronentheoretisch erklärt; ferner wird auch der Ausdruck für das Drehmoment abgeleitet (Proportionalität mit der Oberfläche der Scheibe, der Wärmeströmung, dem Quadrat der Feldstärke und Abhängigkeit von einer für das Metall charakteristischen Konstante). Zö.

O. M. Corbino. Rotazione in un campo d'un disco metallico percorso da una corrente elettrica radiale. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 746-749.

Zusammenstellung experimenteller Ergebnisse über die im Titel genannte Erscheinung. Zö.

O. M. Corbino. Lo studio sperimentale del fenomeno di Hall e la teoria elettronica dei metalli. Nuovo Cimento (6) **2**, 39-46; Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 914-920; Physik. Zs. **12**, 842-845.

Die erhebliche Differenz zwischen Theorie und Experiment bei der Bestimmung der Konstante des Halleffektes beruht, abgesehen von den Schwierigkeiten der Messung, auf nicht zutreffenden Voraussetzungen der Theorie. Die bekannte Drudesche Theorie des Halleffektes nimmt eine thermisch und elektrisch isolierte Platte an und setzt den Temperaturgradienten $= 0$, sowie die gemessene Potentialdifferenz an den Rändern = der auf die Elektronen wirkenden Kraft. In den zur Bestimmung der Konstante nötigen Messungen trifft das alles nicht zu. Es wird gezeigt, wie die Ansätze zu modifizieren sind. Zö.

B. Caldonazzo. Forze ponderomotrici esercitate da un campo magnetico omogeneo su una corrente continua rettilinea indefinita. Nuovo Cimento (6) **2**, 63-79.

Mit Hülfsmitteln der Vektoranalysis wird sowohl aus den Maxwellschen Gleichungen, wie aus den Hertzschen die ponderomotorische Kraft eines Magnetfeldes auf einen elektrischen Strom berechnet. Für einen unendlich langen stromdurchflossenen zylindrischen Leiter im homogenen Magnetfeld wird zunächst das resultierende Magnetfeld und dann die Kraft berechnet, die dies auf den Leiter ausübt. Die beiden im Anfang abgeleiteten Formeln (Maxwell, Hertz) führen zu zwei verschiedenen Werten der gesuchten ponderomotorischen Kraft, die im Verhältnis $1 + \mu_2 : \mu_1 + \mu_2$ ($\mu_1, \mu_2 =$ Permeabilität) zueinander stehen, also praktisch nahezu gleich sind. Zö.

F. L. Bergansius. Een nieuwe formule om den coëfficient van zelfinductie voor lange solenoïden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen. Amst. Ak. Versl. **19**, 1133-1143.

Für lange Solenoide mit mehreren Wickelungslagen wird an Stelle der bekannten Formeln von Cohen und La Rosa, die etwas zu kleine

Werte der Selbstinduktion ergeben, eine genauere Formel abgeleitet, in der meist noch mehrere Glieder der Reihenentwicklungen weggelassen werden können. Die Übereinstimmung mit der exakten Formel von Lorentz mit elliptischen Integralen ist befriedigend. Zö.

B. O. Peirce. The effects of sudden changes in the inductances of electric circuits as illustrative of the absence of magnetic lag and of the von Waltenhofen phenomenon in finely divided cores. Certain mechanical analogies of the electrical problems. Amer. Ac. Proc. **46**, 541-585.

Zunächst wird an der Hand mechanischer Analogien eine Reihe von einfacheren Fällen unstetiger Änderung der Induktanz behandelt, insbesondere wird der Stromverlauf in Kreisen, die mehrere Selbstinduktionen parallel und hintereinander sowie gegenseitige Induktionen enthalten, bei Änderung einer Induktanz bestimmt. Dann werden mehrere Oszillogramme diskutiert, die den Stromverlauf bei möglichst schneller Änderung der Induktanz in großen Elektromagneten mit massiven und unterteilten Eisenkernen darstellen. Diese Aufnahmen zeigen dieselben Stromänderungen, wie sie die theoretische Behandlung eisenfreier Kreise gab, nur modifiziert durch vorhandene Wirbelströme. Zö.

Pomey. Propagation sur une ligne télégraphique du courant dû à une force électromotrice constante. C. R. **152**, 1163-1165.

Strom i und Spannung v bei Anschluß eines Kabels samt anliegenden Apparaten an Wechselspannung stellen sich nach Eintreten des stationären Zustandes durch bekannte einfache Formeln dar. Aus diesen i, v kann man die entsprechenden Lösungen I, V für Anschalten einer konstanten Spannung E_0 finden, wenn man beachtet, daß, um den Nullpunkt integriert:

$$\frac{1}{2\pi i}\int E_0 e^{i\omega t}\frac{d\omega}{\omega} = E_0,$$

daß man demnach die gesuchte Lösung aus den Lösungen für die „Elementarspannungen“ $\frac{E_0}{2\pi i}\cdot e^{i\omega t}\frac{d\omega}{\omega}$ zusammensetzen kann. Es ergibt sich also:

$$V = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{v}{\omega}\,d\omega;\quad I = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{i}{\omega}\,d\omega.$$

Der Integrationsweg muß sämtliche Pole der Funktionen v, i umfassen. Zö.

K. W. Wagner. Über Kabelprobleme und ähnliche Randwertaufgaben, die auf Reihenentwicklungen nach nicht orthogonalen Eigenfunktionen führen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **18**, 230-241.

Bei Wärmeleitungs- und Schwingungsproblemen, insbesondere bei dem Problem der Fortpflanzung des elektrischen Stromes auf Kabeln hat man oft eine willkürlich gegebene Funktion nach Eigenfunktionen φ zu entwickeln für den Fall, daß an den Grenzen eine der Bedingungen $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, $\varphi = a\varphi'$ besteht. Das führt zu orthogonalen Eigenfunktionen. — In vielen Fällen sind jedoch Grenzbedingungen anzusetzen, in denen der die Ordnungszahl der Eigenschwingungen bestimmende Parameter λ vorkommt; z. B. bei Kabelproblemen infolge Anschlusses von Induktionsspulen und Kondensatoren in beliebiger Schaltung an den Leitungsenden. Für solche Fälle wird ein Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten der Reihenentwicklung angegeben. Zö.

F. LEPRINCE-RINGUET. Propriétés géométriques du point représentant la terre dans le diagramme des voltages d'un réseau polyphasé. C. R. **153**, 1069-1071.

Es wird in dem Wechselstromdiagramm eines mehrphasigen Netzes der Punkt aufgesucht, welcher die Erde repräsentiert, und gezeigt, daß er sich bei Änderungen des Erdungswiderstandes auf einem Kreise bewegt. Gr.

H. LAROSE. Sur le problème du câble limité dans les deux sens. C. R. **152**, 1051-1054.

Nachtrag zu einer früheren Note (F. d. M. **41**, 962, 1910), der im Anschluß an diese eine Methode zur praktischen Berechnung der Potentialverteilung und des Stromverlaufes einer Telegraphenlinie mit angeschlossenen Apparaten gibt, wie sie beim Abschalten der Spannungsquelle oder bei momentaner Ladung in einem Punkt (Blitzschlag) zustande kommen. Zö.

H. LAROSE. Sur la propagation d'une discontinuité sur une ligne télégraphique avec perte uniforme. C. R. **152**, 1468-1471.

Für den Fall gleichmäßig über eine Telegraphenleitung verteilter Ableitung werden die Integrale für Strom und Spannung bei einer Erschütterung des Potentials am Anfang der Leitung aufgestellt.

Mit Hülfe einer Transformation, die bei verschwindender Ableitung auf eine Poincarésche Transformation hinauskommt, werden die Integrale gelöst und die Ergebnisse diskutiert. Gr.

G. W. PIERCE. Theory of coupled circuits, under the action of an impressed electromotive force, with applications to radiotelegraphy. Amer. Ac. Proc. **46**, 293-322.

Es wird die Theorie der Empfängerschaltung für ungedämpfte elektrische Wellen entwickelt, die in der Koppelung des schwingungsfähigen Detektorkreises

an den Antennenkreis besteht. Jedoch wird die verteilte Kapazität der Antenne durch eine lokalisierte Kapazität (Kondensator) ersetzt; der Ohm sche Widerstand beider Kreise wird nicht vernachlässigt. Aus der allgemein gültigen Formel für die Stromstärke im Detektorkreis (nach Erreichen des stationären Zustandes) werden die Reaktanzen beider Kreise berechnet, die ein Strommaximum im Detektorkreis ergeben. Es existieren im allgemeinen bei gegebenen Koppelungskoeffizienten und Dämpfungsfaktoren zwei Lösungen, und zwar sind die Wellenlängen der Eigenschwingungen beider Kreise entweder länger oder kürzer als die Wellenlänge der zu empfangenden Schwingungen; hierbei spielt der Ohm sche Widerstand eine wesentliche Rolle, so daß man bei Übergang zu einem Detektor mit verschiedenem Widerstand die Abstimmung beider Kreise ändern muß, um wieder den optimalen Fall zu erhalten. An zahlreichen numerischen Beispielen und Kurven werden die Einflüsse der einzelnen Konstanten beider Schwingungskreise auf die optimalen Eigenperioden und auf die Resonanzschärfe veranschaulicht. Hierbei ist die Abstimmung des Antennenkreises bei festem Detektorkreis und die des Detektorkreises bei festem Antennenkreis erörtert. Schließlich wird die Frage nach dem günstigsten Detektorwiderstand behandelt an der Hand des Ergebnisses, daß die im letzten Kreis entwickelte Joule sche Wärme unabhängig vom Detektorwiderstand ist. Zö.

H. M. Macdonald. The integration of the equations of propagation of electric waves. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, 91-95.

Es wird ein direkter analytischer Beweis gegeben, daß die entsprechenden magnetischen und elektrischen Kräfte von einer Anzahl von Quellen ausgedrückt werden können durch bestimmte Integrale über Oberflächen, die das Gebiet umschließen. Grb.

H. M. Macdonald. The diffraction of electric waves round a perfectly reflecting obstacle. Lond. Phil. Trans. (A) **210**, 113-144.

Die Arbeit stellt sich die Aufgabe, die Energieverteilung in allen Punkten des Schattens einer vollkommen leitenden Kugel zu finden, wenn die Energiequelle ein außerhalb der Kugel liegender Hertz scher Oszillator und die Wellenlänge der ausgesandten Wellen sehr klein im Verhältnis zum Kugeldurchmesser ist. Der Einfachheit wegen wird ferner angenommen, die Achse des Oszillators gehe durch den Kugelmittelpunkt. Die Methode ist denen der Potentialtheorie entsprechend und führt auf Entwicklungen nach Kugelfunktionen und Bessel schen Funktionen. Br.

H. Poincaré. Über einige Gleichungen in der Theorie der Hertz schen Wellen. Math. naturw. Bl. **8**, 49-53.

Wiedergabe des Vortrags, den der berühmte Forscher gelegentlich seines letzten Berliner Aufenthalts (bei der Jahrhundertfeier der Universität) im Mathematischen Verein gehalten hat. Sk.

B. Mackû. Über den Einfluß des frühzeitigen Auslöschens des Funkens auf Dämpfungsmessungen. Ann. der Phys. (4) **34**, 941-970; Prag. Ber. 1911, Nr. 1, 27 S. (Böhmisch.)

Bei der Wirkung zweier lose, induktiv gekoppelter Schwingungskreise kann der Fall eintreten, daß im Erregerkreis die Schwingung abreißt. Dadurch ist dann im zweiten Kreis nur die Eigenschwingung rein vorhanden, es treten also keine Schwebungen mehr bei Verstimmungen auf. Dieser Fall des frühzeitigen Auslöschens des Funkens ist hier behandelt worden. Die Differentialgleichungen sind die bekannten; ihre Integrale sind dann in den entsprechenden Intervallen zu untersuchen. Verf. gibt dadurch eine Erklärung der Deformation der Resonanzkurve, warum nämlich die Dämpfungsmessungen in verschiedenen Höhen der Kurve verschiedene Werte ergeben. Die Diskussion zeigt dann endlich den Einfluß der einzelnen Schwingungskreise. Grb.

M. K. Grober. Zur Theorie der Dämpfung bei Hertzschen Wellen. Physik. Zs. **12**, 121-124.

Umarbeitung einer früheren Arbeit: M. K. Grober, Beiträge zur Theorie der Resonanzkurven (F. d. M. **41**, 964, 1910). Sa.

M. K. Grober. Zur Theorie der Dämpfung bei Hertzschen Wellen. Physik. Zs. **12**, 121-124.

B. Mackû. Zur Theorie der Dämpfung bei Hertzschen Wellen. Physik. Zs. **12**, 224.

Der erste Artikel ist eine Umarbeitung der Abhandlung „Beiträge zur Theorie der Resonanzkurven" (Mitteilungen der physikalischen Versuchsstation Halle-Cröllwitz, Nr. 20, 33 S. 1909). Am Schlusse gibt der Verf. folgende Zusammenfassung: „Die Arbeit gibt eine streng durchgeführte Integration der Differentialgleichung des Schwingungsproblemes für eine erzwungene Schwingung und die Eigenschwingung. Die numerische Auswertung führt zu neuen Dekrementtafeln. Eine Vergleichung mit den anderen Methoden zeigt, daß die Bjerknessche Methode der Dämpfungsbestimmung trotz der großen Vernachlässigungen einwandfreie Resultate liefert."

In der zweiten Note stellt Mackû unter Hinweis auf seine Bearbeitung des Gegenstandes fest, daß die eine der benutzten Anfangsbedingungen nicht richtig ist. Lp.

P. O. Pedersen. Resonanz in gekoppelten Schwingungskreisen. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. 4, 449-459.

Unter der Voraussetzung harmonisch variierender Einwirkungen gibt der Verf. einige Ableitungen über Amplituden, Phasen der Schwingungen und stellt die Gleichung der Resonanzkurven auf (als Mitteilung in Congrès int. de Radiologie et d'Electricité Brüssel 1910 zuerst erschienen). Grb.

J. E. Ives. Eine Näherungstheorie für die Antenne mit großem Widerstande. Physik. Zs. 12, 303-306.

Wird der Ohm sche Widerstand nicht vernachlässigt, so ist die Differentialgleichung des Problems dieselbe wie die einer gedämpften Schwingung mit rechter Seite; diese Gleichung wird hier behandelt. Grb.

M. Hammer. Untersuchungen über Hertz sche stehende Schwingungen in der Luft. Verhdl. Deutsche Physik. Ges. 13, 27-52.

Resultate: 1. Die in einem geschlossenen Raume angestellten Versuche mit Hertz schen Wellen ergeben eine fehlerhafte Ausbildung der stehenden Wellen, die in der Hauptsache durch den Einfluß der von den Mauern reflektierten elektrischen Wellen hervorgebracht wird. 2. Die in Luft gefundenen Wellenlängen sind angenähert gleich den nach Drude mit Drahtwellen bestimmten Wellenlängen, und zwar ist der Wert in der Luft etwa 1 bis 1,5 Prozent größer als längs Drähten. 3. Diese Erhöhung der Wellenlänge nimmt zu, wenn der Reflexionsschirm kleiner wird. 4. Die Wellenlänge der Resonatoren ist abhängig von der Größe der Unterbrechungsstelle des Resonators, und zwar ist die Wellenlänge um so kleiner, je größer die Unterbrechungsstelle ist. 5. Die Wellenlänge ergibt sich übereinstimmend mit den Resultaten Drudes. Die zu großen Werte für die Wellenlänge bei Sarasin und de la Rive sind einmal aus der Verwendung sehr dicker Resonatoren zu erklären, ferner daraus, daß durch die an dem Resonator befestigte Funkenstrecke die Kapazität des Resonators erhöht wird.

Die dem Wesen nach experimentelle Arbeit enthält viele rein theoretische Untersuchungen. Lp.

Devaux-Charbonnel. Mesure directe de l'affaiblissement et de la caractéristique des lignes téléphoniques. C. R. 152, 951-952.

Verf. gibt eine einfache Methode an, die beiden für eine Fernsprechleitung maßgebenden Größen zu messen: Die Charakteristik, von der die Reflexionsverluste an angeschalteten Leitungen oder Apparaten abhängig sind, und den Dämpfungsexponenten, der den Energieverlust bei der Fortpflanzung der Wellen über die Leitung selbst bestimmt. Die Methode stützt sich darauf, daß die Impedanz, die man am Anfang der Leitung mißt, gleich der Charakteristik der Leitung ist, falls die Leitung am Ende durch einen der Charakteristik gleichen

Widerstand geschlossen wird. Auf Grund dieser Tatsache kann man mit Hülfe eines Annäherungsverfahrens zunächst die Charakteristik bestimmen. Der Dämpfungskoeffizient ergibt sich dann aus der in diesem Falle geltenden Beziehung $m = e^{\alpha l}$, wo α der Dämpfungskoeffizient, l die Länge der Leitung und m das Verhältnis von Anfangs- und Endstrom ist. Gr.

W. F. Zorn. Über die Abhängigkeit der Dämpfung in Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke von der Gestalt und dem Material der Elektroden sowie von dem Dielektrikum in der Funkenstrecke. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. **4**, 260-280, 382-399.

Verf. gibt einen gekürzten Auszug aus seiner Dissertation. Der Inhalt ist durch den Titel hinreichend gekennzeichnet. Es wird zunächst eine besondere Methode zur Bestimmung der Koppelung zwischen beliebig gestalteten Kreisen angegeben. Dann folgen die Messungen, die systematisch die Gestalt der Elektroden, die metallische Umgebung der Funkenstrecke und das Material der Elektroden berücksichtigen. Besondere Aufmerksamkeit wird der Schwefeldioxydfunkenstrecke geschenkt und für sie auch eine Formel für die Abhängigkeit der Dämpfung vom Entladungspotential aufgestellt. Gr.

A. Blondel. Utilisation des cadres d'orientation en radiotélégraphie pour la réception des trains périodiques d'ondes amorties. C. R. **153**, 661-663.

Da für sehr gedämpfte Wellen die Berechnung ihrer Wirkung schwieriger ist, so wird die Brauchbarkeit zweier Antennenformen (Typen D und S) unter vereinfachten Annahmen behandelt, wobei sich besonders die Anwendbarkeit der ersteren ergibt. Sa.

A. Blondel. Sur les diverses méthodes de mesure de l'orientation en radiotélégraphie, dans le cas d'ondes entretenues. C. R. **153**, 544-546.

A. Blondel. Influence de l'amortissement des ondes dans l'emploi des cadres d'orientation en radiotélégraphie. C. R. **153**, 593-597.

In der ersten der beiden Arbeiten werden zwei Methoden zur Richtungsbestimmung bei gerichteten Antennen (zwei Antennen, die auf denselben Empfänger wirken) behandelt: die Nullmethode, bei der aus zwei symmetrischen Stellungen zu beiden Seiten des Minimums das Mittel genommen wird, und die Vergleichsmethode, die auf dem Vergleich zweier festen, praktisch zueinander senkrechten Systeme beruht. Im letzten Falle werden wiederum eine Kompensationsmethode und ein Verfahren mit alternierenden Messungen behandelt. Durch Rechnung wird gezeigt, daß die Kompensationsmethode den alter-

nierenden Messungen vorzuziehen ist. Es ist hierbei nur von ungedämpften Wellen die Rede.

In der zweiten Arbeit werden dieselben Betrachtungen auf gedämpfte Wellen ausgedehnt. Gr.

C. E. Guye et S. Ratnowsky. Détermination expérimentale de la variation d'inertie des corpuscules cathodiques en fonction de la vitesse. Arch. Sc. Phys. et nat. (4) **31**, 293-321.

Die Verf. suchen mit möglichst großer Genauigkeit das Verhältnis μ'/μ der trägen Masse der Kathodenstrahlteilchen von großer Geschwindigkeit zu der der Kathodenstrahlteilchen von kleiner Geschwindigkeit durch die Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels unter der Wirkung eines elektrischen und eines magnetischen Feldes zu bestimmen. Um vergleichbare Resultate zu erhalten, werden die Felder so variiert, daß die Ablenkung immer dieselbe ist. Verf. nennen diese Methode die Methode der identischen Trajektorien. Diese Methode gestattet, mit großen Ablenkungen zu operieren, und verlangt bei den vorliegenden Versuchen weder die genaue Kenntnis des magnetischen oder elektrischen Feldes, noch ihre Homogenität. Weiter erlaubt sie, die Messungen bis zu Geschwindigkeiten auszudehnen, die fast gleich der halben Lichtgeschwindigkeit sind.

Die hierdurch gefundenen Werte von μ'/μ werden mit denen verglichen, die man aus den theoretischen Formeln von Lorentz-Einstein und Abraham für die transversalen Massen berechnen kann. Der Vergleich zeigt, daß die Formel von Lorentz-Einstein diejenige ist, die für Kathodenstrahlen von großer Geschwindigkeit Resultate gibt, die mit den Ergebnissen der vorliegenden Versuche vereinbar sind. Sa.

H. v. Hörschelmann. Über die Wirkungsweise des geknickten Marconischen Senders in der drahtlosen Telegraphie. (Auszug aus der Münchener Dissertation.) Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. 5, 14-34, 188-211.

Die geknickte Antenne wird in ihrer Wirkung durch zwei Dipole ersetzt gedacht, deren einer horizontal, deren anderer vertikal liegt. Für diesen Fall werden aus dem Hertzschen Vektor die Feldstärken in größerer Entfernung von der Antenne bestimmt. Der Richtungseffekt wird dargestellt; Gestalt und Größenordnung zeigen genügende Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Marconi. Die Betrachtungen bei Diskussion der Gleichungen, führen zur Annahme bestimmter Erdströme, deren Effekte dann berechnet und deren Bedeutung physikalisch genügend erklärt werden. Grb.

A. Kalähne. Frequenz- und Dämpfungsberechnung gekoppelter Schwingungskreise nach der Cohenschen Methode. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. **4**, 357-381.

Cohen hat in Band 2, 448, 1909, die Theorie der gekoppelten Schwingungskreise behandelt und die Gleichung vierten Grades, die über Schwingungsanzahl und Dekremente Aufschluß gibt, durch eine lineare Substitution vereinfacht. Diese Arbeit wird hier eingehend besprochen und gezeigt, daß die Cohensche Methode nur im Resonanzfall gilt und ein Koppelungsglied verschwindet, daß die Cohenschen Integrale der Differentialgleichung nicht genügen. Es läßt sich überhaupt keine lineare Substitution angeben, die eine wesentliche Vereinfachung der Gleichung herbeiführte (vgl. Phys. Zs. **11**, 1198-1209; F. d. M. **41**, 975, 1910). Grb.

H. G. Möller. Über die Widerstandszunahme unterteilter Leiter bei schnellen Schwingungen. Ann. der Phys. (4) **36**, 738-778.

Die Arbeit enthält eine ausführliche Untersuchung über sogenannten Skin- oder Hauteffekt, der sich darin kund gibt, daß Drähte beim Durchfließen von Wechselstrom hoher Frequenz zunehmenden Widerstand zeigen. Man erklärt sich diesen Vorgang allgemein einfach so, daß die Stromlinien nach außen gedrängt werden und so nur einen Teil des Leiters ausfüllen. Die Versuche, die man zur Vermeidung dieses Übelstandes ausführte, indem man die Drähte isoliert zur Litze verdrallte oder verflocht, haben aber bei sehr hohen Frequenzen, wie sie in der drahtlosen Telegraphie üblich sind, zu keinem Erfolge geführt; im Gegenteil, es haben sich die Spulen aus Litze noch ungünstiger gezeigt als solche aus massivem Draht. R. Lindemann hat die Widerstandszunahme in beiden Fällen genau gemessen. Durch qualitative Vorüberlegungen zeigt Möller zunächst, daß dieses Verhalten der Drähte einleuchtend ist, wenn man alle Einzelheiten, wie das Entstehen von Wirbelströmen, das Bestehen von magnetischen Feldern usw., berücksichtigt.

Inwieweit derartige Einflüsse in Rechnung zu setzen sind, wird in einer ausführlichen mathematischen Behandlung des Problems gezeigt. Zuerst wird der Massivdraht behandelt, für den bereits Sommerfeld eine vollständige Theorie der Widerstandserhöhung gegeben hat. Dann folgt die Litze, zunächst unter den einfachsten Annahmen, dann unter solchen, die der Wirklichkeit nahekommen. Die aus den gefundenen Formeln berechneten Werte stimmen mit den von Lindemann durch Versuche gefundenen vorzüglich überein. Als praktisches Resultat der Arbeit ergibt sich, daß die Litze wohl einen Vorzug vor dem Massivdraht haben kann, wenn sie nur dem gegebenen Fall entsprechend hinreichend fein unterteilt wird. Gr.

C. Fischer. Strahlung von Antennen. Mitteilung aus dem Kais. Telegraphen-Versuchsamt. Physik. Zs. **12**, 295-303.

Der Verf. stellt für den Strahlungswiderstand einer Antenne eine Formel auf, in der die nach Abraham berechneten wie aus Beobachtungen an fünf Antennen gemessenen Werte enthalten sind. Grb.

Weitere Literatur.

S. Angelini. Sull' officio dei potenziali ritardati nelle teorie elettromagnetiche. Milano: Albrighi. 6 S. 8⁰.

C. W. C. Barlow. Magnetism and electricity. London: University Tutorial Press. (Mathematical physics. Vol. I).

H. Bateman. The fundamental equations of the theory of electrons and the infinitesimal transformation of an electromagnetic field into itself. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **7**, 525.

R. T. Beatly. The ionisation of heavy gases by *X*-rays. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 230-239.

Enthält die Theorie zweier Versuchsanordnungen. Br.

A. Bestelmeyer. Berechnung, Herstellung und Messung eines homogenen Magnetfeldes. Physik. Zs. **12**, 1107-1111.

A. Brochet. Sur la figuration des lignes équipotentielles dans un électrolyseur. C. R. **153**, 1150-1152.

A. Charbonneau. Les courants alternatifs de haute fréquence. Théorie. Production. Applications. Paris: Geisler. 629 S. 8⁰.

J. A. Crowther. On an attempt to detect diffusion in a pencil of Röntgen rays. Cambr. Phil. Soc. Proc. **16**, 177-187.

J. A. Crowther. Further experiments on scattered Röntgen radiation. Cambr. Phil. Phil. Proc. **16**, 188.

J. A. Crowther. On the energy and distribution of scattered Röntgen radiation. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 29-43.

Enthält auch die Theorie einer speziellen Versuchsanordnung. Br.

J. Delvalez. Sur la figuration des lignes équipotentielles dans un électrolyseur. Réclamation de priorité. C. R. **153**, 1474-1475.

J. Erskine-Murray. A handbook of wireless telegraphy: its theory and practice. For the use of electrical engineers, students, and operators. Third edition, revised and enlarged. London: Crosby, Lockwood and Son. XVI u. 386 S. [Nature **87**, 240.]

J. A. Fleming. The propagation of electric currents in telephone and telegraph conductors: a course of post-graduate lectures delivered before the University of London. London: Constable and Co., Ltd. XIV u. 316 S. [Nature **87**, 446-447.]

J. A. Fleming. The principles of electrical wave telegraphy and telephony. Second edition, revised and extended. New York: Van Nostrand. 924 S. 8⁰.

L. Graetz. L'électricité et ses applications. Traduit sur la 15ᵉ édition allemande par G. Tardy. Paris: Masson. XX + 640 S. 8⁰.

G. Guglielmo. Sul valore delle componenti la forza elettromotrice della coppia Daniell. Nuovo Cimento (6) **2**, 55-62.

A. L. Hughes. On the velocities of the electrons produced by ultra-violet light. Cambr. Phil. Soc. Proc. **16**, 167-174.

J. H. JEANS. The mathematical theory of electricity and magnetism. 2nd edition. London: Cambridge University Press. 208 S. 8°.

H. C. JONES. Electrical nature of matter and radioactivity. Second edition, completely revised. New York: Van Nostrand. IX + 210 S. 8° (1910).

R. H. JUDE and J. SATTERLY. Senior magnetism and electricity. London: W. B. Clive, University Tutorial Press, Ltd. VIII u. 446 S. [Nature **88**, 107.]

V. KARAPETOFF. The electrical pursuit. New York: McGraw-Hill. 85 S. 8°.

S. KINOSHITA, S. NISHIKAWA. On the amount of the radioactive products present in the atmosphere. Phil. Mag. (6) **22**, 821-840.

Enthält auch die Theorie einer bestimmten Versuchsanordnung. Br.

A. KORN. Über die jüngsten Fortschritte der Bildtelegraphie. Deutsche Phys. Ges. Verh. **13**, 257-265.

W. LENZ. Ergänzung zu dem Bericht von J. W. Nicholson über den effektiven Widerstand einer Spule. Jahrb. d. drahtlosen Tlg. u. Tlph. **4**, 481-489.

H. A. LORENTZ. Sur la théorie de l'effet Zeeman observé dans une direction quelconque. Arch. Néerl. (2) **15**, 429-452.

Vgl. F. d. M. **40**, 910, 1909.

T. MATHER and G. W. O. HOWE. Exercises in electrical engineering for the use of second year students in universities and technical colleges. New York: Longmans. IV + 71 S. 12mo.

H. MERCZYNG. Elektrische Dispersion von Wasser und Äthylalkohol für sehr kurze Wellen. Krakauer Anz. (A) 1911, 129-133.

T. MIZUNO. A treatise on wireless telegraphy and wireless telephony (Chinesisch). Tokyo: The Maruzen-Kabushiki-Kaisha. IX u. 563 u. X S. u. 208 Fig. [Nature **87**, 277, 1911.]

J. W. NICHOLSON. On the bending of electric waves round a large sphere. Phil. Mag. (6) **21**, 62-68, 281-295.

Fortsetzungen der das gleiche Thema behandelnden Arbeiten aus dem Jahrgang 1910 derselben Zeitschrift. Br.

J. W. NICHOLSON. On the damping of the vibrations of a dielectric sphere, and the radiation from a vibrating electron. Phil. Mag. (6) **21**, 438-446.

Ergänzung zweier Arbeiten aus dem Jahrgang 1910 der Zeitschrift. Br.

CH. NIVEN. On the measurement of specific inductive capacity. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 139-145.

Enthält die Theorie einer bestimmten Versuchsanordnung. Br.

D. H. OGLEY. (With a preface by W. G. RHODES.) An elementary course on practical applied electricity and magnetism. London: Longmans, Green and Co. XI u. 134 S. [Nature **89**, 343, 1912.]

R. PAILLOT. Cours d'électricité théorique. Courants alternatifs. Lille: Janny. 138 S. 4°. (Institut industriel du Nord. Génie civil, 2e année.)

G. W. PATTERSON. Revolving vectors with special application to alternating current phenomena. New York: Macmillan. VI + 89 S. 8°.

V. Polara. L'esperienza nelle teorie di Maxwell e di Lorentz e l'interpretazione meccanica dei fenomeni elettrici. Catania: Galàtola. II + 167 S. 8⁰.

A. Sommerfeld. Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Einfluß der Bodenbeschaffenheit auf gerichtete und ungerichtete Wellenzüge. Physik. Zs. 12, 158.

Vgl. F. d. M. **41**, 976, 1910.

F. Spath. Absolutes und relatives elektrisches Potential. Poske Zs. **24**, 97-98.

W. F. G. Swann. The longitudinal and transverse mass of an electron. Phil. Mag. (6) **21**, 733-735; **22**, 223.

B. V. Swenson and B. Frankenfield, assisted by J. M. Bryant. Testing of electromagnetic machinery and other apparatus. Vol. II. Alternating currents. New York: The Macmillan Co. London: Macmillan and Co., Ltd. XXVI u. 324 S. [Nature **87**, 545-546.]

S. P. Thompson. Traité théorique et pratique des machines dynamoélectriques. Traduit par E. Boistel. Courant continu. 4e édition française. Paris: Béranger. XVIII + 1060 S. 8⁰.

H. Vieweger. Recueil de problèmes avec solutions sur l'électricité et ses applications pratiques. Traduction française de G. Capart. 2e édition, revue, corrigée et augmentée de nouveaux chapitres. Paris: Dunod et Pinat. XVI + 403 S. 8⁰.

G. T. Walker. Outlines of the theory of electromagnetism. London: Cambridge University Press. 60 S. 8⁰.

H. Wolff. Behandlung des Vorganges, daß eine ebene elektromagnetische Welle, die auf die ebene Oberfläche eines Körpers, insbesondere eines Leiters auftrifft, von diesem reflektiert wird, auf Grund der Maxwellschen Gleichungen. Diss. Rostock. 51 S. 8⁰.

Kapitel 4.
Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

Robert Mayer. Die Mechanik der Wärme. Zwei Abhandlungen. Herausgegeben von A. von Oettingen. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 90 S. kl. 8⁰. Mit Bildnis. (Ostwalds Klassiker Nr. 180.)

Der Band enthält: I. Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur (Ann. d. Chem. u. Pharm. 1842), S. 3-8. II. Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel. Ein Beitrag zur Naturkunde (Heilbronn: C. Drechsler, 1845), S. 9-79. Anmerkungen. (S. 80-90), von denen eine kurze Schilderung des Lebensganges von R. Mayer (S. 80-87) den größten Teil ausmacht. Obgleich in der zweibändigen Ausgabe von Mayers Schriften (herausgegeben von J. I. Weyrauch,

Stuttgart 1893) eine musterhafte Sammlung aller bezüglichen Dokumente vorhanden ist, wird die Sonderausgabe der beiden frühesten Veröffentlichungen von Mayer zur Mechanik der Wärme allen Liebhabern solcher historisch wichtigen Arbeiten willkommen sein. Lp.

M. Planck. Vorlesungen über Thermodynamik. Dritte erweiterte Auflage. Leipzig: Veit & Comp. VIII u. 288 S. gr. 8°.

Die dritte Auflage dieses vorzüglichen Buches enthält neben einigen kleinen Änderungen in Definitionen, Beweisen und manchen kleinen Zusätzen besonders eine ausführliche Darstellung des Nernstschen Wärmetheoremes; die Plancksche Wiedergabe erscheint in weiterer Fassung und hat sich von der atomistischen Auffassung freigemacht; die Anwendungen werden dadurch einfacher und das Anwendungsgebiet verbreitert. Für die Thermodynamik dürfen diese Vorlesungen wohl als „das Lehrbuch" bezeichnet werden. Grb.

M. Planck. Energie und Temperatur. Physik. Zs. 12, 681-687; Journ. de Phys. (5) 1, 345-359.

In diesem Vortrage vor der Société française de Physique erörtert der Verf. die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Temperatur und Energie. Der erste Teil behandelt das Prinzip der gleichmäßigen Energieverteilung, bespricht seine Erfolge und erörtert die entgegenstehenden Tatsachen. Durch Zuhülfenahme der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelangt man zu der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{k\, d \log W}{dU} = \frac{1}{T}$$

für die Wahrscheinlichkeit W, daß ein Körper von der Temperatur T die Energie U besitzt (k eine Konstante). Will man von diesem Punkte aus nicht zu dem Prinzip der gleichmäßigen Energieverteilung kommen, so muß man annehmen, daß die innerhalb eines Moleküls stattfindenden schnellen Schwingungen, welche die Emission und Absorption von strahlender Wärme bewirken, nicht jede beliebige Energie besitzen können, sondern daß ihre Energie notwendig ein ganzes Vielfaches eines durch die Schwingungszahl bestimmten endlichen Energiequantums ε ist. Diese Hypothese liefert als Wahrscheinlichkeit dafür, daß N Moleküle die Energie U haben, den Ausdruck

$$W = \frac{(1 + U/N\varepsilon)^{N + U/\varepsilon}}{(U/N\varepsilon)^{U/\varepsilon}}$$

und daher nach (1)

$$U = \frac{N\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}.$$

Nur wenn die Temperatur T sehr groß wird, erhält man $U = NkT$ und somit denjenigen Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur, der sich aus

dem Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung bei der Annahme von zwei Freiheitsgraden (für die kinetische und potentielle Energie) ergibt.

Der Verf. glaubt, daß seine Hypothese der Wahrheit näher kommt als die der gleichmäßigen Energieverteilung. Lp.

E. Hasenöhrl. Über die Grundlagen der mechanischen Theorie der Wärme. Physik. Zs. **12**, 931-935; Verhdl. Deutsche Phys. Gs. **13**, 756-765; Verhdl. Naturf. Ges. Karlsruhe 2_1, 50.

In der Theorie der Wärmestrahlung und auch auf dem Gebiete der spezifischen Wärme führt das Äquipartitionstheorem zu Folgerungen, die mit den Ergebnissen der experimentellen Forschung nicht vereinbar sind, während hier die Quantentheorie die Erscheinungen beinahe restlos erklärt. Allerdings scheint die Grundlage dieser Theorie, die Annahme, daß die Energie eines Resonators nicht alle Werte zwischen 0 und ∞, sondern nur eine diskrete Reihe von Werten annehmen kann, sehr gewagt. Der Verf. stellt sich aber auf den Standpunkt, daß die Quantentheorie zurzeit wenigstens als Arbeitshypothese anzunehmen ist, und daß man sich jetzt vor allem zu bemühen hat, ihre Konsequenzen womöglich auch auf anderen Gebieten zu verfolgen. Dabei stellen sich sogleich große Schwierigkeiten ein. In einem Falle gelingt es jedoch leicht, die Planck sche Theorie konsequent zu verallgemeinern. Und zwar betrifft dies die Schwingungen eines Oszillators, dessen Periode von der Energie abhängt. Ein solcher Oszillator kann dann nur eine bestimmte Reihe von Schwingungszahlen besitzen, welche man wenigstens formal leicht mit den beobachteten Gesetzmäßigkeiten in den Spektren in Einklang bringen kann. Lp.

L. S. Ornstein. Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer. Amst. Ak. Versl. **19**, 809-823, 947-954.

In seiner statistischen Mechanik hat Gibbs zwei Gesamtheiten der Systeme unterschieden, die kanonischen und die mikrokanonischen. Über letztere hat P. Hertz Anschauungen entwickelt (Ann. der Phys. **33**, 236; F. d. M. **41**, 984. 1910), an die hier angeknüpft wird unter gleichzeitiger Berücksichtigung der früheren Arbeiten von Einstein, Poincaré und Zermelo. Im ersten Teile werden nach allgemeinen Bemerkungen über die benutzten Methoden die geschlossenen Systembahnen betrachtet, und für einige besondere Fälle wird die Geschwindigkeit der Systembahn untersucht, ferner die Einteilung der Gesamtheiten in solche nach Zeit, Linie und Fläche aufgestellt und ihre Mittelwerte und Wahrscheinlichkeit untersucht. Der zweite Teil bringt eine nähere Betrachtung der Flächengesamtheit und bezieht sich besonders auf die physikalische Bedeutung der Gesamtheiten, wobei von der Annahme ausgegangen wird, daß die Flächengesamtheit als wirkliche Gesamtheit anzusehen ist. Rtt.

P. Hertz. Über die kanonische Gesamtheit. Amst. Ak. Versl. **19**, 824-848.

Eingehend auf die Betrachtungen von Ornstein (Referat vorstehend), führt der Verfasser seine Untersuchungen weiter aus, eine kurze Zusammenstellung der verschiedenen Auffassungsweisen vorausschickend, die ihren Ausgang in der Erweiterung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes finden. Bei den anschließenden Entwicklungen kommt neben den Begriffen Zeitgesamtheit und Raumgesamtheit namentlich der Begriff virtuelle Gesamtheit zur Verwendung. Rtt.

A. Einstein. Bemerkungen zu den P. Hertzschen Arbeiten: „Über die mechanischen Grundlagen der Thermodynamik." Ann. der Phys. (4) **34**, 175-176.

Die kurzen Bemerkungen beziehen sich auf eine Kritik von P. Hertz (Ann. der Phys. **33**, 225 u. 537, 1910) an zwei Einzelheiten einer vorhergehenden Arbeit von A. Einstein (Ableitung des Entropiesatzes, Betrachtung über das Temperaturgleichgewicht). Die Angelegenheit ist durch eine unmittelbare Verständigung zwischen den Beteiligten erledigt und hat keine allgemeinere Bedeutung mehr. Rtt.

W. Nernst. Über neuere Probleme der Wärmetheorie. Berl. Ber. 1911, 65-90.

In diesem Festvortrage betont der Verf. nach allgemeinen Bemerkungen über Wege und Mittel der Forschung wiederholt die vielfache Verkennung und Überschätzung der beiden Hauptsätze der älteren Thermodynamik und geht dann näher auf seinen Satz von der spezifischen Wärme ein. Unter Würdigung der hier in Frage kommenden Arbeiten Maxwells und Boltzmanns werden ferner die Untersuchungen über Strahlung von Planck und Einstein vorgeführt und gezeigt, wie deren Anwendung auf die spezifischen Wärmen fester Stoffe zur Aufklärung über das Wesen des Gesetzes von Dulong und Petit beigetragen hat. Nach den dann folgenden Bemerkungen über die Quantentheorie wird als Ergebnis der Betrachtungen hingestellt, daß Erwägungen auf scheinbar so verschiedenen Gebieten, auf denen sich einerseits Planck, andererseits der Verf. bewegte, in dasselbe Endziel eingemündet sind. Rtt.

W. Nernst. Über ein allgemeines Gesetz, das Verhalten fester Stoffe bei sehr tiefen Temperaturen betreffend. Physik. Zs. **12**, 976-979; Verhdl. Deutsche Physik. Ges. **13**, 921-925.

„Neuere Messungen der spezifischen Wärme haben es in Übereinstimmung mit den Forderungen der Quantentheorie außer Zweifel gesetzt, daß für jeden festen Körper vom absoluten Nullpunkt aufwärts sich ein gewisses Temperaturgebiet erstreckt, in welchem der Temperaturbegriff praktisch seine Bedeutung verliert. Es muß also in diesem Gebiete jede beliebige Eigenschaft, die durch das mittlere Verhalten der Atome bestimmt ist, wie, um nur ein Beispiel zu nennen, etwa das Volumen V, von der Temperatur unabhängig werden." Dieser Satz wird belegt durch eine Anzahl näher erörterter Beispiele. Lp.

Ph. Kohnstamm und L. S. Ornstein. Over het warmtetheorema van Nernst. Amst. Ak. Versl. **19**, 848-864.

Der wesentliche Inhalt der Einwendungen gegen den Wärmesatz von Nernst ergibt sich aus dessen Entgegnung im Amst. Ak. Versl. **20**, 64-67 (Referat nachstehend). Rtt.

W. Nernst. Über die Unverträglichkeit des von mir aufgestellten Wärmetheorems mit der Gleichung von van der Waals bei sehr tiefen Temperaturen. Amst. Ak. Versl. **20**, 64-67.

Von Kohnstamm und Ornstein war ausgeführt (Referat vorstehend), daß sich das Wärmetheorem von Nernst bei tiefen Temperaturen nicht mit der Gleichung von van der Waals vertrage. Der Verf. zeigt dagegen, daß diese ihm bekannte Tatsache sich auch in einfacherer Weise ableiten läßt, daß sie aber umgekehrt gegen die Zulässigkeit der Gleichung von van der Waals spreche, die für tiefe Temperaturen mit der Beobachtung vielfach in Widerspruch stehe, während der neue Wärmesatz sich schon in vielen Hunderten von Fällen als recht genau bestätigt habe. Es wird weiter darauf hingewiesen, daß auch molekulartheoretisch die Gleichung von van der Waals bei tiefen Temperaturen für Flüssigkeiten nicht stimmen könne, da diese, stark unterkühlt, nach Tammanns Untersuchungen bei den fraglichen Temperaturen einen starren glasartigen Zustand annehmen und die freie Beweglichkeit der Moleküle damit aufhört. Rtt.

O. Sackur. Zur kinetischen Begründung des Nernstschen Wärmetheorems. Ann. der Phys. (4) **34**, 455-468.

Das Wärmetheorem von Nernst verlangt bei Reaktionen zwischen festen und flüssigen Stoffen die Gleichheit der freien Energie und der Wärmetönung schon in der Nähe des absoluten Nullpunktes. Einer praktischen Prüfung des Gesetzes stehen natürlich besondere Schwierigkeiten entgegen. Doch spricht das bisher meist günstige Ergebnis der Folgerungen aus dem Gesetze sehr für dessen Richtigkeit, und es ist lohnend, seinen Zusammenhang mit anderen Gesetzen aufzudecken. Dazu reichen die beiden Hauptsätze nicht aus. Dagegen hat Nernst selbst auf den Einklang seines Gesetzes mit der neuen Theorie der spezifischen Wärme von Einstein hingewiesen. Nach dieser Theorie nähert sich die spezifische Wärme der festen Stoffe bei tiefen Temperaturen dem Werte Null, womit auch das Koppsche Gesetz gegeben wird. In der vorliegenden Arbeit wird nun eine Bestätigung des Hinweises von Nernst gegeben, indem dessen Gesetz als notwendige Folge der Einsteinschen Theorie und der Anschauungen Boltzmanns über Entropie und Wahrscheinlichkeit dargestellt wird. Benutzt wird bei der Ableitung die Vorstellung von Einstein von der Wärmeenergie fester Stoffe bei tiefen Temperaturen (Schwingungszahl der Atome unabhängig von der Schwingungsenergie, nicht beliebige Werte der Energie, sondern nur ganzzahlige Vielfache des Elementarquantums) und ferner die Plancksche Berechnung der Entropie eines

Systems von linearen Resonatoren gleicher Schwingungszahl, da nach Einstein der elementare feste Körper nichts anderes als ein System von N Resonatoren gleicher Schwingungszahl darstellt. Die hier kinetisch genommenen, bei allen Temperaturen geltenden Ergebnisse für die Zustandsgleichung eines idealen festen Körpers waren teilweise bereits von Nernst aus seinem Gesetze für die Nähe des absoluten Nullpunktes abgeleitet. Die realen festen Körper scheinen sich in ihrem Verhalten mit abnehmender Temperatur dem idealen Körper unbegrenzt zu nähern, dieser ist ein Grenzbegriff wie das ideale Gas.

Rtt.

P. Barreca. Circa una maggiore precisazione della legge di degradazione universale e circa una possibile disponibilità indefinita di energia degradabile. Nuovo Cimento (6) 2, 85-92.

Wie schon frühzeitig von Helmholtz betont wurde, kann die Entwertung der Energie im Sinne des zweiten Hauptsatzes erst nach unendlich langer Zeit vollendet sein. Für diesen asymptotischen Verlauf des Vorganges versucht der Verf. hier eine schärfere mathematische Begründung. Rtt.

A. Einstein. Elementare Betrachtungen über die thermische Molekularbewegung in festen Körpern. Ann. der Phys. (4) 35, 679-694.

Der Verf. hatte früher (Ann. der Phys. 22, 184; F. d. M. 38, 935, 1907) einen Zusammenhang des Strahlungsgesetzes mit dem Gesetze der spezifischen Wärme fester Körper (Abweichung von Dulong-Petit) behandelt, wobei die Wärmebewegung in festen Körpern als monochromatische Schwingungen der Atome angesehen wurde. Durch Nernst war zwar im ganzen eine Bestätigung erfolgt, doch zeigte sich das wahre Gesetz der spezifischen Wärme von dem theoretisch gefundenen abweichend. Zweck der vorliegenden Arbeit ist erstens der Nachweis, daß die Abweichungen eine Folge der nicht monochromatischen Schwingungen der Moleküle sind, daß ferner die Lindemannsche Formel und die des Verf. für die Eigenfrequenz durch Dimensionalbetrachtung erhalten werden können. Endlich wird auf die Wärmeleitung in kristallisierten Isolatoren im Hinblick auf die Molekularmechanik nochmals eingegangen, auf die Ableitung der Größenordnung der beobachteten Wärmeleitfähigkeit durch Dimensionalbetrachtung und auf die Abhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit einatomiger Stoffe von Atomgewicht, Atomvolumen und Eigenfrequenz. Bei der Untersuchung der Dämpfung der thermischen Atomschwingungen ergibt sich u. a., daß die thermische Kapazität eines Atoms eines festen Körpers ähnlich der eines stark gedämpften Oszillators im Strahlungsfelde ist. Rtt.

F. Henning. Über Temperaturmessung mit Hülfe der Clapeyron-Clausiusschen Gleichung. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. 13, 645-650.

„Jede Folgerung aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kann prinzipiell zur Bestimmung der absoluten Temperatur verwendet werden. Sehr

geeignet erscheint hierfür die Clapeyron-Clausiussche Gleichung, die ohne Einführung einschränkender Annahmen praktisch gut brauchbar ist. Sie liefert die Temperatur mit beträchtlicher Genauigkeit, besonders im Gebiete der flüssigen Gase. Hier kann diese Methode sogar den gasthermometrischen Messungen unter Umständen überlegen sein.“ Lp.

M. v. Smoluchowski. Bemerkung zur Theorie des absoluten Manometers von Knudsen. Ann. der Phys. (4) **34**, 182-184.

M. Knudsen. Erwiderung an Herrn v. Smoluchowski. Ann. der Phys. (4) **34**, 823-824.

In einer Arbeit (Ann. der Phys. 32, 809, 1910) begründete Knudsen, daß ein stark verdünntes Gas auf eine Platte zwischen Wänden verschiedener Temperatur einen einseitigen Druck ausüben muß. Es wird nun vom Verf. gezeigt, wie die von Knudsen gegebene Formel aus der von Maxwell angenommenen Analogie der Molekularbewegung stark verdünnter Gase mit der Wärmestrahlung gefolgert werden kann. Diese Analogie gilt aber nur für einen so kleinen Druck, daß die Weglänge der Gasmoleküle groß ist gegenüber den Abmessungen des ganzen Gefäßraumes. Am Schluß folgen noch Vorschläge zur Verbesserung des Versuchsverfahrens. Auf diesen Punkt bezieht sich der zweite Teil der Erwiderung von Knudsen, während deren erster Teil sich mit den kritischen Bemerkungen gegen Einzelheiten einer früheren Arbeit beschäftigt (Ann. der Phys. (4) **33**, 1559, 1910). Rtt.

E. Baud. Sur la chaleur moléculaire de fusion. C. R. **152**, 1480-1483.

Von Raoult, Deer, Robertson u. a. sind Beziehungen aufgestellt zwischen der molekularen Schmelzwärme, der absoluten Schmelztemperatur und anderen Eigenschaften der Körper. An bestimmten Stoffen wird gezeigt, daß für sie jene Formeln nicht stimmen. Gestützt auf die Gleichung von Clapeyron und das Ergebnis von Traube hinsichtlich des Covolumens (proportional der absoluten Temperatur) wird ein Ausdruck abgeleitet, der die molekulare Schmelzwärme als proportional der Volumenänderung bei der Schmelztemperatur angibt. Die bisherige Prüfung an einigen Stoffen scheint die Richtigkeit der Beziehung zu bestätigen. Rtt.

W. Beuss. Untersuchungen über die spezifische Wärme von binären Flüssigkeitsgemischen. Diss. Münster. Neumünster i. H. 57 S. 8°.

Nach der von Dolezalek 1908 veröffentlichten Theorie binärer Gemische müßte sich die spezifische Wärme von Mischungen, bei denen die Flüssigkeiten aus Monomolekülen bestehen, einfach nach der Regnaultschen Mischungsregel berechnen lassen. Die experimentelle Prüfung dieser Annahme ist Zweck der Arbeit. Es werden die Versuchzahlen von 9 Mischungen ver-

schiedener Stoffe mitgeteilt, von denen 7 der Mischungsregel genügen. Die nähere Untersuchung der Abweichungen soll erst nach Ausführung von Dampfdruckmessungen erfolgen. Rtt.

A. Colson. Sur la théorie des solutions. C. R. **153**, 719-721.

A. Colson. Sur la théorie des solutions et les chaleurs de dissolution. C. R. **153**, 812-814.

Ausgehend von der Zuckerlösung als Beispiel, bezweifelt der Verf. die Übereinstimmung der Kinetik eines freien Moleküls und eines gelösten. Die Tatsachen widersprechen der Gleichheit des osmotischen und des gasförmigen Druckes; die Avogadrosche Hypothese mit ihren kinetischen Folgerungen werde immer von den gasförmigen Molekülen erfüllt, ob kondensiert oder nicht. Mit den gelösten Molekülen verhalte es sich aber anders. Nach Arrhenius ergeben sich hinsichtlich der Beziehung zwischen Leitfähigkeit und osmotischem Druck Abweichungen von mehr als 15 vom Hundert.

Das gelöste Molekül, für das die besondere Bezeichnung Dissolekül vorgeschlagen wird, sieht der Verf. als im allgemeinen polymolekular an und gelangt dann folgerichtig zu dem Satze, daß nicht, nach van t'Hoff, Lösungswärme und Kondensationswärme eines Gases übereinstimmen, sondern daß die Lösungswärme gleich ist der Kondensationswärme, vermehrt um die bei der molekularen Kontraktion entwickelte Wärme, die Anlaß zur Bildung des Dissoleküls ist. Rtt.

R. D. Kleeman. Relations between density, temperature, and pressure of substances. Phil. Mag. (6) **21**, 325-341.

Von dem gewählten Gesetz molekularer Anziehung in der vom Verf. aufgestellten Form hängt es ab, welche Beziehung zwischen der Oberflächenspannung oder der inneren Verdampfungswärme einer Flüssigkeit, ihrer Dichte und Temperatur und ihrer Dampfdichte man herausrechnet. Verf. diskutiert einige einfache und nach den Beobachtungsresultaten plausible Formeln für das Anziehungsgesetz und die daraus folgenden Beziehungen und im Anschluß daran noch einige Beziehungen für andere wärmetheoretische Größen, die sich aus den ersten ergeben. Br.

R. D. Kleeman. The heat of mixture of substances and the relative distribution of the molecules in the mixture. Phil. Mag. (6) **21**, 535-553.

Wenn eine Mischung zweier Flüssigkeiten Wärme ergibt, ohne daß sich neue Moleküle bilden, kann man die Mischungswärme gleich dem Betrag ansehen, um den sich das chemische Potential geändert hat. Verf. untersucht an der Hand der von ihm aufgestellten Gesetze über die molekulare Anziehung, was für ein Ausdruck sich dann für die Mischungswärme ergibt, und welche Beziehungen sie mit den verschiedenen thermodynamischen

Größen verknüpfen, insbesondere für den Spezialfall gesättigter Salzlösungen. Im Anschluß daran werden auch noch einige thermodynamisch damit im Zusammenhang stehende Fragen kurz gestreift. Br.

S. A. Shorter. On the application of the theory of chemical potential to the thermodynamical theory of solutions. — Part I. The general theory of chemical potential in a binary system. Osmotic pressure and vapour-pressure of solutions. Phil. Mag. (6) **22**, 933-942.

Die Gibbssche Theorie des chemischen Potentials wird auf die Berechnung der Dampfdrucke zweier Lösungen angewandt, die im osmotischen Gleichgewicht nebeneinander existieren sollen, und untersucht, unter welchen Drucken dies möglich ist. Br.

N. Parravano e G. Sirovich. L'analisi termica nei sistemi quaternari. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_2$, 206-211.

Es handelt sich um das Problem der Kristallisierung einer Lösung von vier kristallisierbaren Teilen und um die Überlegung, welche gegenseitigen Einwirkungen der vier Teile hierbei vorkommen können. Diese werden an einem Tetraeder illustriert, an dessen vier Eckpunkte die vier Teile gelagert zu denken sind. Br.

E. Jouguet. Sur les points indifférents. C. R. **153**, 346-349.

Leitet einige spezielle, aus der Phasenregel folgende Sätze über die indifferenten Punkte in chemischen Systemen ab, die die Saurelschen Resultate ergänzen. Br.

Wm. C. McC. Lewis. On the latent heat of vaporization of liquids. Phil. Mag. (6) **22**, 268-276.

Es wird gezeigt, daß sich für normale Flüssigkeiten die latente Verdampfungswärme ausdrücken läßt durch $-T\alpha_1/\varrho\beta$, wo β den Kompressibilitätskoeffizienten, α_1 den Ausdehnungskoeffizienten und ϱ die Dichte bei der Temperatur T bedeuten. Die Formel wird an einer Reihe von Gasen durch Versuche bestätigt. Br.

Herm. Wolff. Über Volumeneffekte bei Lösungsvorgängen. Ann. der Phys. (4) **36**, 177-182.

Zur Berechnung der freien Energie nach der Kirchhoffschen Methode der isothermen Destillation werden gewöhnlich die Gasgesetze als gültig für die gesättigten Dämpfe der behandelten Stoffe angenommen, außerdem die Volumina der Komponenten gegen die ihrer Dämpfe vernachlässigt. Es wird hier versucht, die Berechnung ohne die beschränkenden Voraussetzungen durch-

zuführen, und zwar als Beispiel für eine Mischung von Alkohol und Wasser. Unter Betrachtung der Anteile des maximalen Gewinnes an äußerer Arbeit beim Mischungsvorgange gelangt der Verf. zu einer Größe, die er als „differentiellen Volumeneffekt der Lösung gegenüber Wasseraufnahme" bezeichnet, und die den Volumenzuwachs der Lösung durch Aufnahme eines Tropfens Wassers, dividiert durch dessen Volumen, darstellt. Zur Prüfung der sich ergebenden Differentialgleichung müssen bekannt sein die Partialspannungen der Komponenten bei variablem Mischungsverhältnisse und die Dichten der Mischungen für diese Verhältnisse, bezogen auf ein und dieselbe Temperatur. Die bisher vorliegenden Messungen, im besonderen an Wasser-Alkohol, Wasser-Salzsäure, Wasser-Ammoniak, erlauben noch keine hinreichende Prüfung.
Rtt.

A. P. Laurie. On the temperature coefficient of concentration cells in which the same salt is dissolved in two different solvents. Edinb. Roy. Soc. Proc. **31**, 375-396.

Die mathematische Theorie von solchen Zellen wird hier entwickelt mit Bezug auf Abel in Zs. für phys. Chem. **56**, 612, 1906. J.

G. Lippmann. Action de forces extérieures sur la tension des vapeurs saturées et les gaz dissous dans un liquide. C. R. **152**, 239-241; Journ. de Phys. (5) **1**, 261-264.

Nach dem Theorem von Lord Kelvin ist der Dampfdruck einer Flüssigkeit in einer Kapillare an dem Meniskus kleiner als an einer freien Oberfläche, und zwar ist die Verminderung proportional der Steighöhe der Flüssigkeit. Lord Kelvin erklärt die Erscheinung als Folge der anziehenden Wirkung des Meniskus auf die Flüssigkeit. Der Verf. versucht eine neue Erklärung. Danach soll sich der Dampfdruck stetig entlang der Steighöhe der Flüssigkeit ändern, die Abweichung soll also nicht eine Folge 'des Meniskus, sondern des Gewichtes der Säule sein. Rtt.

L. Gay. Sur la notion de tension d'expansibilité. C. R. **153**, 262-264.

L. Gay. Sur la tension d'expansibilité d'un fluide normal. C. R. **153**, 722-724.

Unter tension d'expansibilité einer Flüssigkeit gegenüber einer Komponente versteht der Verf. den Druck, den die Komponente im idealen Gaszustande und im osmotischen Gleichgewichte haben würde. Auf ein solches System wird eine früher (C. R. **151**, 612) aufgestellte Differentialgleichung angewendet, die unter beschränkenden Annahmen integriert wird. Zweck der Untersuchung ist namentlich, die Gültigkeitsgrenzen des Gesetzes von Guldberg und Waage sowie der Regel von Linebarger-Zawidzki festzustellen.

Die zweite Arbeit, die sich als Fortsetzung der ersten auf normale Flüssigkeiten bezieht, zeigt im besonderen an einem bestimmten Beispiele (C_6H_6), wie die experimentelle Prüfung des aufgestellten Ausdruckes ein einfaches und bequemes Mittel zur Kennzeichnung normaler Flüssigkeiten ergibt. Rtt.

GOUY. Sur la tension de vapeur d'un liquide électrisé. Journ. de Phys. (5) **1**, 85-88.

Nachtrag zu einer früheren Note des Verf. (F. d. M. **40**, 970, 1909). Folgende Sätze werden theoretisch abgeleitet: Die dielektrische Polarisation erzeugt, wenn das Feld zur Oberfläche normal ist, eine Vermehrung der Spannung der Oberfläche. Wenn man die Oberflächenschicht des elektrisierten Elektrolyten einfach als eine konzentriertere Lösung als im Innern betrachtet, so kommt man zu einem richtigen Ausdruck für die Abnahme der von der Ladung allein herrührenden Spannung. Lp.

A. LEDUC. Pression interne dans les gaz; formules d'état et loi des attractions moléculaires. C. R. **153**, 179-182.

Von der Gleichung für den inneren Druck ausgehend, hatten der Verf. und Amagat für geringe Außendrucke den inneren Druck als umgekehrt proportional dem Quadrate des spezifischen Volumens gefunden. In der vorliegenden Arbeit wird die Änderung des inneren Druckes mit der Temperatur untersucht. Danach vermindert sich der innere Druck mit zunehmender Temperatur. Das ist in guter Übereinstimmung mit der Formel von Clausius, nicht aber mit der von van der Waals. Weiterhin wird ein Gesetz für die molekulare Anziehung zwischen zwei Molekülen in einem Gase ausgesprochen (proportional dem Quadrat der Masse, umgekehrt proportional der vierten Potenz des Abstandes), für dessen Zulässigkeit ganz kurz als Beispiele Berechnungen an schwefliger Säure und Kohlensäure angeführt werden. Rtt.

E. WERTHEIMER. Zur Thermodynamik des Wasserdampfes. Physik. Zs. **12**, 91-94.

Verf. gibt die Zustandsgleichung für Dämpfe im eigentlichen Sinn und interpretiert sie. Grb.

K. H. KÜSTER. Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen $k = c_p/c_v$ von Sauerstoff. Diss. Marburg. 46 S. 8°.

Um einen früher von Rohlf gefundenen auffallend hohen Wert (1,45) von k für Sauerstoff nachzuprüfen, wurde die akustische Methode in der von Quincke angegebenen Form benutzt. Den größeren Teil der Arbeit bildet die Beschreibung des Versuchsgerätes und der Messungen. Es ergab sich für

Sauerstoff der Wert $k = 1{,}4020 \pm 0{,}0002$. Der erwähnte, auffallend große Wert (bei frischem elektrolytischem Sauerstoff) wird auf Ionisation zurückgeführt. Mit Röntgenstrahlen bestrahltes Gas hat ein höheres k als unbestrahltes. Rtt.

P. v. Schrott. Isothermische Zustandsänderung atmosphärischer Luft bei veränderlichem Drucke, Volumen und Gewichte. Wien. Ber. **120**, 165-174.

Ein dichtschließender Kolben drückt bei seiner Verschiebung die Luft aus der kleinen Öffnung eines Zylinders. Der für eine bestimmte Ausflußgeschwindigkeit erforderliche Überdruck kann nur bestehen, wenn die jeweils ausströmende Luftmenge kleiner als die vom Kolben verdrängte ist. Daher muß eine fortschreitende Verdichtung der Luft im Zylinder mit Vergrößerung der Ausströmgeschwindigkeit und Ausströmmenge eintreten. Es wird das Gesetz der Druckzunahme abgeleitet unter Annahme konstanter Temperatur während der Zustandsänderung und gleichförmiger Kolbengeschwindigkeit. Rtt.

J. D. van der Waals. Die Zustandsgleichung. Rede, gehalten bei Empfang des Nobelpreises für Physik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. 24 S. 8°.

In dieser Rede, die der Verf. in Stockholm bei Empfang des Nobelpreises hielt, schildert er die Entstehungsgeschichte seiner Zustandsgleichung, die zunächst durch eine Arbeit von Clausius von 1857 angeregt wurde, an deren Behandlung sich später Lorentz, Boltzmann, Jäger, Jeans u. a. beteiligten. In den weiteren Teilen der Rede gibt der Verf. Rechenschaft über seinen jetzigen Standpunkt zu seiner Gleichung und über seine Versuche in den letzten Jahren, die Unterschiede zwischen den Versuchsergebnissen und der Gleichung aufzuklären, wobei namentlich auf die als „Scheinassoziation" bezeichnete Komplexbildung eingegangen wird. Rtt.

J. D. van der Waals. Opmerkingen over de waarde der kritische grootheden. Amst. Ak. Versl. **19**, 1310-1330.

Bei der Ableitung der kritischen Werte, d. h. für Volumen, Druck und Temperatur im kritischen Punkte, war bisher die Größe „b" der Zustandsgleichung als wenig veränderlich im kritischen Punkte angenommen. Die Versuche, namentlich die von Sydney Young, ergaben indessen die Unzulässigkeit dieser Annahme, und zwar in verschiedenem Grade für die einzelnen Stoffe. Die Ursache der Veränderlichkeit von „b" im kritischen Punkte läßt sich vorläufig nicht erkennen; es wird deshalb für diese Größe aus den Versuchswerten eine Gleichung abgeleitet, die tunlichst genau dem wirklichen Verhalten der Stoffe entspricht. Am Schlusse wird noch untersucht, welchen Einfluß eine bestehende Scheinassoziation auf die Ergebnisse haben kann. Rtt.

J. D. van der Waals. Opmerkingen over de grootte der volumina van de coëxisteerende phasen van een enkele stof. Amst. Ak. Versl. **19**, 1458-1467.

Nach allgemeineren Bemerkungen über die Kurve, welche die Volumina der koëxistierenden Phasen als Funktionen von T darstellt, wobei „b“ in der Zustandsgleichung unveränderlich oder veränderlich angenommen ist, wird auf Versuchswerte von Sydney Young eingegangen, und es werden mit Hülfe des Begriffes der Scheinassoziation passende Größen für die Zustandsgleichung bestimmt. Es handelt sich dabei namentlich um die Stoffe Äther und Pentan. Rtt.

G. Tammann. Über Zustandsgleichungen im Gebiete kleiner Volumen. Gött. Nachr. 1911, 527-562.

Zur Entwicklung der Zustansdgleichungen der Flüssigkeiten bei kleinem Volumen wird ausgegangen von den Messungen der Volumenflächen mehrerer Flüssigkeiten von Amagat. Unter Benutzung des Gesetzes, das die Wärmeausdehnung eines Stoffes in isotropen und anisotropen Zuständen verbindet, und einer früher vom Verf. gefundenen einfachen Regel für die Lage der Volumenisobaren eines Kristalls und seiner Schmelze wird eine Gleichung für Äther gegeben und gezeigt, daß sie bis 1000 Atm. die Volumenisothermen, die Amagat bis 3000 Atm. festlegte, befriedigend wiedergibt. Für weitere vier Flüssigkeiten werden dann die Isobaren untersucht, darauf ihre isometrischen Linien und dabei die Konstanten der Volumenfläche festgestellt. Der Schlußabschnitt beschäftigt sich mit den Beziehungen der Volumenflächen eines Kristalls und seiner Schmelze. Rtt.

C. Dieterici. Zur Theorie der Zustandsgleichung. Ann. der Phys. (4) **35**, 220-242.

Die Zustandsgleichung von van der Waals geht von den idealen Gasgesetzen aus und entsteht durch deren Erweiterung mit Hülfe kinetischer Vorstellungen, so daß die Gleichung auch die dichteren Zustände umfaßt. Im Gegensatze dazu betrachtet Clausius von vornherein die dichteren Flüssigkeitszustände und entwickelt auf kinetischer Grundlage Anschauungen über das dynamische Gleichgewicht in der Grenzschicht bei koexistenten Phasen. Diese Anschauungen sind von G. Jäger, W. Voigt und dem Verf. in mathematische Form gebracht. Für den dabei gewonnenen Exponentialausdruck für p wird in der vorliegenden Arbeit der Nachweis beabsichtigt, daß er die wahrscheinlichste Form der Zustandsgleichung darstelle. Benutzt wird dabei der Hinweis von Voigt, daß nach den Anschauungen von Clausius die Durchbruchsarbeit von Flüssigkeit zu gesättigtem Dampf die innere Verdampfungswärme ϱ sein müsse, für welche Größe der Verf. früher (Ann. der Phys. **25**, 569-585, 1908) auf empirischem Wege unter Verwertung des Beobachtungsmateriales von Young einen Ausdruck entwickelt hatte. Bei der Verwertung dieses Materials zeigt sich namentlich der Mangel in den bisher nach dem Vorgange van der Waals' benutzten kinetischen Vorstellungen,

die nur die fortschreitende Bewegung der Moleküle in Betracht ziehen, nicht aber ihre innere rotatorische und oszillatorische, so daß die Größe ϱ noch erhebliche Energiemengen enthalten kann, die bisher nicht zum Ausdrucke kamen.

Rtt.

J. Nabl. Zur Volumkorrektion der Zustandsgleichung der Gase. Wien. Ber. **120**, 851-888.

Infolge einer noch von Boltzmann selbst gegebenen Anregung stellt der Verf. eine Neuberechnung der Volumenkorrektion an, um eine Kontrolle der sehr verwickelten Rechnungen von Boltzmann, van der Waals und van Laar zu erhalten. Ausgehend von dem Standpunkte Boltzmanns, wird zunächst dessen Gedankengang kurz dargelegt, den er bei Berechnung der Deckungsphären von Gruppen zu drei Molekülen eingeschlagen hat. Die Berechnung der Summe der Deckungsphären für alle Fälle, in denen sich die drei Moleküle in gewisser Lage befinden (die Deckungsphären schneiden sich) ist Gegenstand der Untersuchung. Dabei wird auch der Rechnungsgang von van der Waals und van Laar mitgeteilt. Als Unterlage und Anhalt bei den dann folgenden Rechnungen dient eine Reihe von Figuren auf besonderen Tafeln. Die Ausdrücke werden ebenfalls sehr verwickelt, die Berechnung des Korrektionsgliedes wird schließlich auf ein dreifaches bestimmtes Integral zurückgeführt, für dessen Auswertung der Verf. selbst noch sehr umständliche langwierige Rechnungen für nötig hält. Rtt.

Th. Thorkelsson. Drei Formen der Zustandsgleichung und die innere Verdampfungswärme. Physik. Zs. 12, 633-637.

Der Verf. schreibt die Zustandsgleichung von van der Waals in der Form

$$p + a\varrho^2 = \frac{RT}{m}\frac{\varrho}{1 - b\varrho}$$

(p = Druck, ϱ = Dichte, T = absolute Temperatur, m = Molekulargewicht des Stoffes, R die Avogadrosche Konstante, a und b zwei dem Stoffe zukommende Konstanten). Aus dieser Form bildet er:

$$\text{(I)} \qquad p + a\varrho^n = \frac{RT}{m}\frac{\varrho}{1 - b\varrho},$$

setzt aber a und b als Funktionen der Temperatur voraus.

$$\text{(II)} \qquad p + a\varrho^n = \frac{RT\varrho}{m(1 - b\varrho^n)},$$

$$\text{(III)} \qquad p + a\varrho^n = \frac{RT}{m}(\varrho + b\varrho^m),$$

wo übrigens m in (III) zwei verschiedene Bedeutungen hat.

Aus diesen Formeln werden verschiedene Folgerungen gezogen. Lp.

H. W. Bakhuis Roozeboom. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. Drittes Heft. Die ternären Gleichgewichte. Erster Teil. Systeme mit nur einer Flüssigkeit ohne Mischkristalle und ohne Dampf. Von F. A. H. Schreinemakers. (Deutsch von J. J. B. Deuss.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. XII u. 312 S. 8⁰. Mit 112 Textfig.

Das Buch gibt in seinen wesentlichen Teilen die Vorlesungen wieder, die Schreinemakers über ternäre Gleichgewichte in der Universität Leiden hält; nach diesen Vorlesungen und dem Manuskript ist es ins Deutsche übertragen worden.

Dieser erste Teil des dritten Heftes behandelt diejenigen ternären Systeme, in denen neben festen Phasen, die aus den Komponenten und ihren Verbindungen bestehen, nur eine einzige Flüssigkeit auftritt. Entmischung in zwei oder mehr Schichten, Systeme mit Dampf, Bildung von Mischkristallen usw. sollen in den folgenden Teilen behandelt werden. Der vorliegende Teil ist so bearbeitet, daß er eine an und für sich abgeschlossene Schrift bildet, die auch mit nur beschränkter Kenntnis der unären und binären Systeme leicht verständlich ist. In vielen Fällen ist zur Lösung verschiedener Probleme die graphische Darstellung der ζ-Funktion benutzt worden; die Behandlung ist aber so elementar gehalten, daß sie dem Chemiker keine Schwierigkeiten bereitet. Nur in dem letzten Kapitel geht die mathematische Behandlung tiefer; der weniger mathematisch gebildete Leser kann das Kapitel ohne Nachteil fortlassen, da das Buch auch ohne dieses ein abgeschlossenes Ganzes ist. Die Fortsetzung des vom verewigten Verf. unvollendet hinterlassenen zweiten Heftes ist in Vorbereitung.

A. Graphische Darstellung ternärer Formen. B. Die thermodynamischen Funktionen. Graphische Darstellungen. C. Die Sättigungskurven bei P und T konstant. D. Einfluß der Temperatur und des Druckes. E. Systeme mit nur den Komponenten als feste Phasen. F. Einige allgemeine Darlegungen. G. Systeme mit Komponenten, binären und ternären Verbindungen als feste Phasen. H. Anwendungen und Beispiele. I. Analytische Behandlung einiger thermodynamischen Probleme. Lp.

G. Tammann. Zur Thermodynamik der Gleichgewichte in Einstoffsystemen. I. Die Gleichgewichte isotroper und anisotroper Phasen. II. Der Polymorphismus. Gött. Nachr. 1911, 236-260, 325-360; Ann. der Phys. (4) **36**, 1027-1054.

I. Zweck der Untersuchung ist das Aufstellen der Bedingungen dafür, daß in Einstoffsystemen bei einer Temperatur zwei Gleichgewichtsdrucke und bei einem Drucke zwei Gleichgewichtstemperaturen auftreten. Ausgehend von den zwei Hauptarten von Gleichgewichtskurven, welche die reine Thermodynamik bei Einstoffsystemen zuläßt, wird zunächst der entsprechende Unterschied hervorgehoben, den die Atomistik in der Betrachtung der anisotropen und isotropen Phasen aufstellt. Bei Durchführung der Untersuchung wird in erster Linie das thermodynamische Potential, die ζ-Funktion benutzt, weil deren Parameter Temperatur und Druck sind, die Ergebnisse somit durch die Diagramme der (pT)-Ebene der Beobachtung am leichtesten zugänglich sind.

Den weiteren Gang der Behandlung zeigen die einzelnen Abschnitte: Die ζ-Isothermen kristallisierter und isotroper Phasen; die ζ-Isobaren anisotroper und isotroper Phasen; die ζ-Flächen und die neutralen Kurven; isotherme und isobare Kreisprozesse zwischen zwei Gleichgewichtsdrucken oder zwei Gleichgewichtstemperaturen. In einem Schlußabschnitte wird kurz auf die bisherigen Erfahrungen eingegangen unter Benennung der Stoffe, deren Zustandsfelder vollständig umgrenzt sind, und einiger der etwa 35 Stoffe, für welche die Koordinaten der Schmelzkurven bis zu 3000 Atm. festgelegt sind.

II. Erfahrungsgemäß bilden sich aus einer unterkühlten Flüssigkeit in der Regel außer einer stabilen Form noch eine oder mehrere instabile. Der Begriff „Form" (nach Volumen, Wärmeinhalt und Gleichgewichtskurven thermisch verschieden) deckt sich dabei nicht mit dem Begriffe der kristallographischen Form, weil dieser Begriff der Thermodynamik fremd ist. Die genauere Untersuchung kristallographisch identischer, thermisch unterschiedener Phasen fällt daher der Atomistik zu. Im einzelnen werden behandelt: Lage der Gleichgewichtskurven stabiler und instabiler Formen; die Lage der Schmelzkurven einer total instabilen zu der einer absolut stabilen Form; Schmelzkurven partiell stabiler Formen; Umwandlungskurven der Formen zweier Kristallgruppen mit näherem Eingehen auf das Zustandsdiagramm des Wassers als der „abnormsten" Flüssigkeit; quantitative Beziehungen zwischen den Lagen der Gleichgewichtskurven, Maß und Bedingungen der Stabilität, der totalen Instabilität und partiellen Stabilität. In einer kurzen Zusammenfassung werden die Grenzen der rein thermodynamischen Erkenntnis für den Polymorphismus festgestellt und am Schlusse dessen Beziehungen zur Molekularzusammensetzung der Flüssigkeiten behandelt. Rtt.

J. J. VAN LAAR. Iets over den vasten toestand. VII (Schluß). Amst. Ak. Versl. 20, 3-19.

In der vorliegenden Schlußarbeit werden zunächst die Änderungen der Formeln untersucht, wenn nicht zwei einfache, sondern mehrfache Moleküle zusammentreten. Es wird dann der Koexistenzdruck flüssig-fest behandelt, die Temperatur des Dreifachpunktes bestimmt und darauf hingewiesen, daß diese Temperatur sich zu der kritischen Temperatur nahezu wie 1 : 2 verhält. Dieser Umstand führt zu der Annahme eines großen Vielfachen der Moleküle (bis 17). Die Arbeit schließt mit einer eingehenden Untersuchung über die Abhängigkeit der Größe b von Temperatur und Volumen. Danach wären in der Nähe des kritischen Punktes die noch vorhandenen komplexen Moleküle als Assoziationen von dreifachen Molekülen anzusehen. Rtt.

J. J. VAN LAAR. Over de veranderlijkheid der grootheid b in de toestands vergelijking van van der Waals, ook in verband met de kritische grootheden. I, II, III. Amst. Ak. Versl. 20, 367-387, 445-459 608-624.

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Größe b in der Zustandsgleichung von dem Volumen geht der Verf. auf die Formeln zurück, die er früher unter der Annahme von Doppelmolekülen entwickelt hat, und erweitert die Rechnungen für Komplexe von mehr als zwei Molekülen. Es zeigt sich, daß die gewöhnliche Assoziationstheorie ohne weitere Annahmen b als Funktion des Volumens ergibt, die schon bei Doppelmolekülen die kritischen Werte vollkommen richtig festlegt. Es wird weiter dargetan, wie man auf drei verschiedenen Wegen zu Reihenentwicklungen in der Nähe des kritischen Punktes gelangen kann. In dem vorläufig letzten Teile der (noch nicht abgeschlossenen) Arbeit wird versucht, die Größen a und b aus der wirklichen Zustandsgleichung zu berechnen, nachdem vorher die methodische Behandlung des Problems, ausgehend von der ursprünglichen Form der van der Waalsschen Gleichung, durchgeführt wurde. Rtt.

H. Kamerlingh Onnes en C. A. Crommelin. Isothermen van eenatomige stoffen en hunne binaire mengsels. X. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden. XI. Opmerkingen betreffende de kritische temperatuur van neon en het smeltpunt van zuurstof. Amst. Ak. Versl. **20**, 68-74.

In der ersten der beiden Fortsetzungen wird ein Vergleich der Isothermen von Argon mit der reduzierten Zustandsgleichung (VII, 1) und mit der von Isopentan gegeben. Die Werte sind in Diagrammen auf besonderen Tafeln dargestellt, die Unterschiede in dem Verhalten von Argon werden unter vergleichendem Hinblick auf Kohlensäure in der molekularen Unzusammendrückbarkeit gesehen.

Die Bemerkungen der zweiten Arbeit beziehen sich im wesentlichen auf Einzelheiten der Versuche von Estreicher, durch die dessen abweichende Werte der im Titel genannten Größen zu erklären seien. Rtt.

Ph. Kohnstamm. Over „osmotische temperaturen" en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal. Amst. Ak. Versl. **19**, 864-875.

Aus der allgemeinen Differentialgleichung von van der Waals lassen sich leicht die Gesetze der verdünnten Lösungen ableiten, unmittelbar aber nicht das Gesetz des osmotischen Druckes. Die Betrachtungen über die osmotischen Unterschiede haben nun nahegelegt, in Analogie zum osmotischen Drucke den Begriff der osmotischen Temperatur einzuführen; denn es muß möglich sein, auch durch Temperaturerhöhung einen stationären Zustand zu beiden Seiten der Membran herzustellen. Da hier zwischen Lösung und Lösungsmittel ein Wärmestrom bestehen bleibt, so muß die Ableitung auf kinetischem Wege erfolgen. Benutzt wird dabei eine von van der Waals jr. mitgeteilte Formel, mit der die Differentialgleichung für die osmotische Temperatur eine verhältnismäßig einfache Form annimmt. Rtt.

Ph. Kohnstamm en F. E. C. Scheffer. Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheid. Amst. Ak. Versl. **19**, 878-894.

In der vorstehend angezeigten Arbeit hatte Kohnstamm eine das thermodynamische Potential enthaltende Formel aufgestellt, welche die Anzahl der Moleküle eines Stoffes einer homogenen Phase angeben soll, die sich in der Zeiteinheit der Anziehung entziehen können. Die Formel ist dort der Bedingung für den stationären Zustand angepaßt, wobei ebensoviel Teilchen durch eine semipermeable Membran in eine Lösung eintreten, als sie verlassen. Man kann nun fragen, wieviel mehr Teilchen in der Zeiteinheit die Lösung verlassen als hineingehen, wenn kein Gleichgewicht zwischen Lösung und Lösungsmittel durch die Membran hindurch besteht, oder mit welcher Geschwindigkeit das ganze System dem Gleichgewicht zustrebt. Aus diesem Gesichtspunkte wird ein Ausdruck aus zwei der früheren Formel entsprechenden Gliedern gebildet und gezeigt, daß er sowohl für verdünnte Gase, als für verdünnte Lösungen dem Gesetze der Massenwirkung entspricht. Bei weiterer Anwendung des Grundgedankens auf verschiedene Fälle wird zur Behebung von Zweifeln das Auftreten von Zwischenzuständen angenommen. Rtt.

Ph. Kohnstamm en J. Timmermans. Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarkeid der vloeistoffen. Amst. Ak. Versl. **19**, 1022-1038.

Von van der Waals wurden (Amst. Ak. Versl. **16**, **17**; Archives Néerl. (2) **13**, 249-283, 1908) Gesetze über Systeme von nicht vollständig mengbaren Flüssigkeiten abgeleitet. In der vorliegenden Arbeit wird ein Teil der Ableitungen mit schon veröffentlichten Versuchsergebnissen und mit einigen neueren Bestimmungen verglichen. Im besonderen werden besprochen: Die Form der (pT)-Projektion der Dreiphasenkurve; der Zusammenhang zwischen der Form der Faltenkurve und dem Auftreten eines Maximums in dem (px)-Durchschnitte der Sättigungsfläche; das Auftreten von Wendepunkten in dem (px)-Durchschnitte der Sättigungsfläche in der Nähe eines kritischen Endpunktes. Rtt.

D. J. Korteweg en F. A. H. Schreinemakers. Algemeene beschouwingen over de raakkrommen van oppervlakken met kegels, met toepassing op de verzadigings- en binodale lijnen in ternaire stelsels. Amst. Ak. Versl. **20**, 476-490.

Bei dem Studium ternärer Lösungen, die bei gegebener Temperatur und Druck mit einem festen Stoff im Gleichgewicht sein können, ist die Sättigungslinie des festen Stoffes durch die Form der Berührungskurve eines Kegels zu bestimmen. Es wird untersucht, welche Eigentümlichkeiten diese Berührungskurve in einzelnen Punkten einer gegebenen Oberfläche, im besonderen der Z-Fläche hat. Als Ursprung des Koordinatensystems wird ein Punkt der Ober-

fläche gewählt. Bei der Behandlung werden drei Fälle unterschieden, je nachdem der fragliche Punkt ein parabolischer ist oder nicht, oder ein Oskulationspunkt.
Rtt.

J. P. Kuenen. Enkele opmerkingen aangaande het beloop der binodale lijnen in de v-x-figuur bij het driephasenevenwicht. Amst. Ak. Versl. **20**, 423-427.

Nach Angabe von Schreinemakers müssen beim Dreiphasengleichgewicht die zwei binodalen Linien, die an einem Eckpunkte des Dreiphasendreiecks auftreten, bei ihrer Verlängerung beide entweder innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fallen. Die Richtigkeit dieser Angabe leitet der Verf. mit Hülfe der Ψ-Fläche binärer Mischungen ab. Im Anschluß daran wird gezeigt, wie man unter Beachtung des Satzes auch leicht zu der doppelten retrograden Kondensation gelangen kann, die van der Waals auf andere Weise ableitet. Rtt.

J. D. van der Waals. Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels. XVI. Amst. Ak. Versl. **20**, 597-603.

In dieser Fortsetzung kommt der Verf. im Gegensatze zu Kuenen (Referat vorstehend) zu dem Ergebnisse, daß bei den Spaltungstemperaturen der Spaltungspunkt innerhalb der Gesamtheit der binodalen Linien von Längsfalte und Querfalte liegen kann. Rtt.

A. Smits. Over terugloopende smeltlijnen. Amst. Ak. Versl. **20**, 57-64.

In dieser zweiten Mitteilung über den Gegenstand wird aus der Differentialgleichung von van der Waals für Zweiphasengleichgewichte ein Ausdruck gefolgert, der eine Erklärung für die Form der früher näher mitgeteilten zurücklaufenden Schmelzlinie von $H_2O - Na_2SO_4$ bei gesättigtem Dampfdrucke erlaubt. Dabei werden auch die Schmelzlinien von Äther-Anthrachinon zum Vergleiche herangezogen. Rtt.

F. E. C. Scheffer. Over de bepaling van driephasendrukkingen in het stelsel zwavelwaterstof-water. Amst. Ak. Versl. **19**, 1057-1067.

Unter Überwindung besonderer Versuchsschwierigkeiten ist es dem Verf. mit näher erläuterter Einrichtung gelungen, die Lage der Dreiphasenlinien, wie früher schon für Schwefelwasserstoff-Ammoniak, nun auch für ersteren Stoff und Wasser zu bestimmen. Die Ergebnisse sind figürlich und tabellarisch zusammengestellt. Rtt.

R. D. Kleeman. The heat of combustion of a molecule and its chemical attraction constant. Cambr. Phil. Soc. Proc. **16**, 299-312.

Fortsetzung eines Artikels desselben Verfassers im Phil. Mag. (6) **20**, 905 bis 921 (F. d. M. **41**, 875, 1910). Hier leitet Kleeman fernere Beziehungen ab.

J.

E. Carvallo. Théorie des moteurs à gaz et à pétrole. Journ. de l'Éc. Pol. (2) **15**, 211-254.

Die Arbeit knüpft an die auf demselben Gebiete vorhergehenden von Witz und Marchis an und hat in erster Linie didaktische Zwecke im Auge. Es wird namentlich gezeigt, wie der Kreisprozeß von Carnot für die Motoren mit innerer Verbrennung vorteilhaft ersetzt wird durch den Prozeß von Joule, bei dem die Teile der Wärmeaufnahme und -abgabe bei konstanten Drucken verlaufen. Statt der Grenztemperaturen werden dabei Grenzdrucke eingeführt, das Arbeitsgemisch wird der Einfachheit halber und mit Rücksicht auf den geringen Raumanteil der flüssigen Brennstoffe als Heißluft behandelt. Der einschneidende Einfluß der Zylinderwände bei wirklichen Motoren wird in den vorliegenden Untersuchungen nicht mitberücksichtigt.

Rtt.

Weitere Literatur.

Sv. Arrhenius. Über die Energieverhältnisse bei Dampfbildung und elektrolytische Dissoziation. Meddelanden från k. vetensk. Nobelinst. Upsala 38 S. 8°.

Sv. Arrhenius. Das Hauptgesetz der Adsorptionserscheinungen. Meddelanden från k. vetensk. Nobelinst. Uppsala 44 S. 8°.

C. W. Berry. The temperature-entropy diagram. 3d edition. New York: Wiley. XVIII u. 393 S. 12mo.

H. L. Callendar. The caloric theory of heat, and Carnot's principle. Nature **86**, 97-99.

C. H. Draper. Heat and the principles of thermodynamics. New and revised edition. London: Blackie and Son, Ltd. XV u. 428 S. [Nature **89**, 603-604, 1912.]

A. Findlay. The phase rule and its application. Third edition. London: Longmans. 372 S. 8°.

G. Goodenough. Principles of thermodynamics. New York: Holt.

F. M. Hartmann. Heat and thermodynamics. New York: Mc Graw-Hill. VII u. 346 S. 8°.

R. C. H. Heck. The steam engine and turbine. New York: Van Nostrand. 642 S. 8°.

L. Lalande et H. Noalhat. Éléments de thermodynamique. Paris: Geisler. III u. 325 S. 8°.

L. Lalande et H. Noalhat. La thermodynamique appliquée à la machine à vapeur. Paris: Geisler. 199 S. 8°.

H. LEVY. Thermodynamische Behandlung einiger Eigenschaften des Wassers und des Wasserdampfes. Berlin: J. Springer. 28 S. 8°.

E. F. MILLER and others. Problems in thermodynamics and heat engineering. New York: Wiley. III u. 67 S. 8°.

W. NERNST. Theoretical chemistry from the standpoint of Avogadro's rule and thermodynamics. Revised in accordance with the sixth German edition by H. T. Tizard. London: Macmillan & Co., Ltd. [Nature 88, 74.]

C. H. PEABODY. Thermodynamics of the steam turbine. New York: Wiley.

J. A. RANDALL. Heat: a manual for technical and industrial students. New York: Wiley. 127 S. 12mo.

J. W. ROU. Steam turbines. New York: Mc Graw-Hill. 143 S. 8°.

R. ROYDS. The testing of motive-power engines, including steam engines and turbines, locomotives, boilers, condensers, internal combustion engines, gas producers, refrigerators, air compressors, fans, pumps, etc. London: Longmans, Green, and Co., XII u. 396. [Nature **89**, 27-28, 1912.]

H. W. SPANGLER. Notes on thermodynamics. Part I. New York: Wiley. VII u. 80 S. 12mo.

R. W. STEWART and J. SATTERLY. A textbook of heat, theoretical and practical. London: W. B. Clive, 480 S. 8°. (University Tutorial Press.) [Nature 88, 107.]

S. G. WHEELER. Heat and steam. London: Edward Arnold. VII u. 224 S. [Nature **89**, 319-320, 1912.]

B. Gastheorie.

D. ENSKOG. Über eine Verallgemeinerung der zweiten Maxwellschen Theorie der Gase. Physik. Zs. **12**, 56-60.

Um zu auswertbaren Integralen zu kommen, geht Maxwell von der Voraussetzung aus, daß die Wechselwirkung zweier Moleküle eine rasch abnehmende Funktion, und zwar speziell fünften Grades der Entfernung ist. „Vom Verf. dieses Aufsatzes ist ein Versuch gemacht, die Geschwindigkeitsverteilung zu ermitteln und die Theorie im übrigen durchzuführen, ohne ein spezielles Kraftgesetz vorauszusetzen. Die Untersuchungen sind noch nicht abgeschlossen.“ Grb.

D. ENSKOG. Bemerkungen zu einer Fundamentalgleichung in der kineschen Gastheorie. Physik. Zs. **12**, 533-539.

Die in der Boltzmannschen Schreibweise lautende Differentialgleichung, aus der Maxwell die theoretischen Grundlagen der Diffusion, Reibung und Wärmeleitung gegeben hat, ist:

$$\frac{\partial(\varrho\overline{\varphi})}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho\xi\overline{\varphi})}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho\eta\overline{\varphi})}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho\zeta\overline{\varphi})}{\partial z}-\varrho\left[X\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}+Y\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}+Z\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\right]$$
$$=m[B_4(\varphi)+B_5(\varphi)],$$

wobei φ nur von ξ, η, ζ abhängen darf. Verf. behandelt den Fall, daß φ außerdem noch von x, y, z und t abhängt. Grb.

F. JÜTTNER. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie. Ann. der Phys. (4) **34**, 856-882.

Verf. leitet das Gesetz, wonach die Entropie eines einatomigen Gases der Wahrscheinlichkeit seines Zustandes proportional ist, das bisher nur auf Grund der Newtonschen Mechanik abgeleitet war, auf Grund der Relativitätstheorie ab. Hierdurch werden in den thermodynamischen Formeln größere Änderungen nötig, als man von vornherein annimmt. Abgesehen davon, daß naturgemäß überall der Faktor $(1-q^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ störend auftritt, ergeben sich auch theoretische Abweichungen, die nicht übersehen werden dürfen, so z. B. in der Verteilungsfunktion für das Gleichgewicht, in der Energie des ruhenden Gases, die eine transzendente Funktion der Temperatur wird, und in dem Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung, das überhaupt nicht mehr gilt. Dagegen bleibt z. B. die Zustandsgleichung ungeändert. Ein kurzer Abschnitt beschäftigt sich auch mit der Abschätzung des numerischen Einflusses solcher Änderungen. Br.

F. JÜTTNER. Die Dynamik eines bewegten Gases in der Relativtheorie. Ann. der Phys. (4) **35**, 145-161.

Während die vorhergehende Arbeit sich auf den Zustand ruhender einatomiger Gase bezog, behandelt diese den Zustand bewegter auf Grund der Untersuchungen von Planck, die die Abänderungen der Helmholtzschen Ableitungen betreffen, die durch die Einführung der Relativitätstheorie notwendig geworden sind. Auch hier sind die Abweichungen von der Helmholtzschen Theorie theoretisch ziemlich erheblich. Br.

W. H. WESTPHAL. Zur Dynamik eines idealen Gases vom Standpunkt des Relativitätsprinzips und der kinetischen Gastheorie. Verh. Deutsche Phys. Ges. **13**, 590-600, 974-977.

A. WEBER. Die Lorentz-Kontraktion bei einem idealen Gas. Verh. Deutsche Phys. Ges. **13**, 695-699.

Westphal berechnet für die Energie und den Impuls eines idealen einatomigen Gases und für Temperaturen unter 10^{11} Grad die beiden Ausdrücke:

$$(1) \qquad \begin{cases} E = c^2\beta\left\{Nm + \frac{3}{2}\frac{NkT_0}{c^2}\right\}, \\ G = q\beta\left\{Nm + \frac{3}{2}\frac{NkT_0}{c^2}\right\}. \end{cases}$$

Hierin bedeutet q die Geschwindigkeit des bewegten Gases, N die Anzahl der Molekeln, m die Ruhemasse einer Molekel, β den Ausdruck $(1 - q^2/c^2)^{-1/2}$, k eine Konstante. Die gewöhnlichen Formeln der Relativtheorie hingegen führen zu den Ausdrücken:

$$(2) \qquad \begin{cases} E = c^2\beta\left\{Nm + \frac{3}{2}\frac{NkT_0}{c^2} + \frac{q^2}{c^2}\frac{pV_0}{c^2}\right\}, \\ G = q\beta\left\{Nm + \frac{3}{2}\frac{NkT_0}{c^2} + \frac{pV_0}{c^2}\right\}. \end{cases}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von (1) je durch das dritte Glied in der Klammer, das sich auf die Lorentz-Kontraktion des Gases bezieht. Weber zeigt, daß dieses Glied nicht fehlen darf, und daß die Westphalsche Berechnung sich nach dieser Richtung vervollständigen läßt. Der Impuls und die Energie eines Gases stellen nicht bloß einen räumlichen, sondern auch einen zeitlichen Mittelwert dar. Westphal hat nur räumliche Mittelwerte gebildet; die zeitliche Mittelwertbildung ist also hinzuzufügen. Lp.

P. Gruner. Über ein paradox scheinendes Resultat aus der kinetischen Gastheorie. Ann. der Phys. (4) **35**, 381-388.

Verf. führt versuchsweise statt des Maxwellschen Abstoßungsgesetzes (umgekehrt proportional der fünften Potenz der Entfernung) die Abstoßung umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ein und berechnet dann, daß das Gas eine unendlich große innere Reibung und einen niemals, auch nur für eine beliebig kleine Zeit, gestörten Zustand der Geschwindigkeitsverteilung besitzen muß, wenn man nicht für die Gültigkeit des Gesetzes willkürlich einen bestimmten Grenzbereich festsetzt. Br.

L. S. Ornstein. Entropie en waarschijnlijkheid. Amst. Ak. Versl. **20**, 243-258.

Verf. leitet den Einsteinschen Satz, wonach der Logarithmus der Wahrscheinlichkeit des Zustands eines thermodynamischen Systems mit dessen Entropie gleichgesetzt werden kann, mit den Hülfsmitteln der statistischen Mechanik ab. Br.

L. Décombe. Sur la définition de l'entropie et de la température. Les systèmes monocycliques. C. R. **152**, 81-83.

Verf. hat (vgl. F. d. M. **41**, 983, 1910) eine Definition der von ihm sogenannten partiell konservativen Systeme gegeben, die ihn zu einem Satz über die Entropie solcher Systeme führte. Er stellt nun Überlegungen über die Aussicht an, die es bieten würde, wenn man diesen Satz oder die Bedingungen, auf denen er beruht, zur Definition der Entropie oder der Temperatur benutzte, und was eine solche Definition in Wahrheit aussagen würde. Br.

E. Thomsen. Über die innere Reibung von Gasgemischen. Ann. der Phys. (4) **36**, 815-833.

Nach den Versuchen von Graham nimmt der Reibungskoeffizient von CO_2 wider Erwarten nicht ab, wenn H hinzugefügt wird, dessen Koeffizient viel kleiner ist. Vielmehr wächst der Koeffizient F mit Zunahme von H zunächst bis zu einem Maximum, um dann schnell auf den Koeffizienten für H zu sinken. Dieses Verhalten hat Puluj auf Grund der kinetischen Gastheorie untersucht, die von ihm aufgestellte, ziemlich verwickelte Formel gibt zwar nach den Untersuchungen von Breitenbach und Tänzler keine genaue quantitative Darstellung der Änderung des Reibungskoeffizienten, indessen läßt die Möglichkeit, nach der Formel das Maximum zu berechnen, auf die wesentliche Richtigkeit des Ableitungsweges schließen. Der Verf. untersucht nun allgemein, welchen Bedingungen Molekulargewichte und Reibungskoeffizienten genügen müssen, damit ein Maximum auftritt. Es ergibt sich als Hauptbedingung für ein Maximum, daß die Molekulargewichte der Bestandteile des Gemisches stark verschieden sind, während gleichzeitig die Reibungskoeffizienten nicht zu verschieden sind. In dem zweiten, längeren Teile der Arbeit wird über die Versuche berichtet, die unter Benutzung der schwingenden Scheibe nach Kundt und Warburg im wesentlichen eine Bestätigung der Maximumberechnung nach der Formel von Puluj ergaben. Die Versuche bezogen sich auf Gemische von $H_2 - CO_2$, $H_2 - NH_3$, $H_2 - C_2H_4$, $NH_3 - C_2H_4$. Rtt.

J. D. van der Waals jr. Zur Deutung von Gibbs' canonical ensembles. Ann. der Phys. (4) **35**, 185-188.

Kurze Vergleichung der Methoden von Gibbs und von Boltzmann. Br.

S. B. McLaren. Hamilton's equation and the partition of energy between matter and radiation. Phil. Mag. (6) **21**, 15-26.

Verf. macht die Annahme einer Atomkonstitution aus Elektronen, die mit einer ein für allemal konstanten Ladung und mit freier Beweglichkeit ausgestattet sind, so daß die ganze in ihnen enthaltene Energie, soweit sie elektromagnetisch ist, Strahlungsenergie, die ganze aus der augenblicklichen gegenseitigen Lage folgende Potentialenergie elektrostatische Energie ist, mechanische Energie aber überhaupt nicht vorhanden ist. Bei einer derartigen Annahme der

Energieverteilung gewinnen die energetischen Grundgleichungen die Hamiltonsche Form, und die Methoden der Wahrscheinlichkeit sind auf die Energieverteilung nicht anwendbar. Will man eine gleichmäßige Energieverteilung im Sinne dieser herausrechnen, so muß man die Annahme der Existenz rein mechanischer oder wärmetheoretischer Energieformen machen. Br.

A. O. Rankine. On the relation between viscosity and atomic weight for the inert gases; with its application to the case of radium emanation. Phil. Mag. (6) 21, 45-53.

Enthält in wärmetheoretischer Beziehung die Ableitung des Satzes, daß die kritische Temperatur eines Gases der vierten Potenz des wahren Atomradius proportional ist. Br.

O. Sackur. Die Anwendung der kinetischen Theorie der Gase auf chemische Probleme. Ann. der Phys. (4) **36**, 958-980.

Verf. untersucht, ob auf irreversible chemische Reaktionen zwischen Gasen oder allgemeiner auf irreversible chemische Prozesse noch die Betrachtungsweise der kinetischen Gastheorie anwendbar ist. Ist das der Fall, so können solche Prozesse nur möglich sein, wenn sie mit einer Vermehrung der Entropie verbunden sind. Es ergibt sich, daß es gelingt, falls der Zustand auch durch chemische Prozesse bedingt ist, das Boltzmannsche Gesetz, wonach die Entropie einatomiger Gase der Wahrscheinlichkeit ihres Zustands nur proportional ist, aufrecht zu erhalten, wenn man die bedenkliche Annahme macht, daß die Gasmoleküle sich nicht gleichmäßig in dem ihnen zur Verfügung stehenden Raum verteilen, sondern nach gewissen Stellen zu anhäufen, und daß ebenso die Geschwindigkeiten sich um bestimmte bevorzugte Werte anhäufen. Br.

C. Wärmestrahlung und Wärmeleitung.

M. Planck. Eine neue Strahlungshypothese. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **13**, 138-148.

Der Verf. will jetzt, abweichend von seiner früheren Vorstellung, den Vorgang der Absorption als einen vollkommen stetig verlaufenden angesehen wissen. Als Ergänzung dient dagegen die Hypothese, „daß die Emission der Energie von seiten des Oszillators sprungweise, nach Energiequanten und nach den Gesetzen des Zufalls, erfolgt, ganz unabhängig von der gleichzeitigen Absorption. Die Emission wie Energie erfolgt spontan, nach bestimmten Quanten von der Größe $\varepsilon = h\nu$, und zwar ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von einem Oszillator mit der Schwingungszahl ν in einem hinreichend kleinen Zeitelement dt ein Elementarquantum der Energie emittiert wird, gleich $\eta n dt$. Hierbei ist η^2 eine nur von der Natur des Oszillators abhängige, sogleich zu bestimmende Kon-

stante; n ist die Anzahl der ganzen Energieelemente ε, welche der Oszillator gerade besitzt".

Vgl. das Referat über Planck S. 912. Lp.

H. Poincaré. Sur la théorie des quanta. C. R. **153**, 1103-1108.

Poincaré will die Tatsachen, die Planck mit der Quantentheorie behandelt, anders darstellen, um zu physikalisch geläufigeren Anschauungen zu gelangen; das ist aber unmöglich. „Die Quantenhypothese ist die einzige, die zum Planckschen Gesetz führt." Grb.

A. Schidloff. Zur Aufklärung der universellen elektrodynamischen Bedeutung der Planckschen Strahlungskonstante h. Ann. der Phys. (4) **35**, 90-100.

Während bei Haas (Wien. Ber. **119**, 119-144; F. d. M. **41**, 999, 1910) unter Heranziehung des Thomsonschen Atommodelles auf die merkwürdige numerische Übereinstimmung des Wirkungsquantums hingewiesen wird, versucht Verf. die „Lücke auszufüllen und eine vollständige und allgemeine Erklärung zu geben". Er zeigt, daß die „Theorie des Planckschen Resonators eine Erklärung gibt für die Konstanz der Größe h, und daß diese Theorie auch den Ziffernwert von h ungefähr richtig liefert". Grb.

E. Wertheimer. Die Plancksche Konstante h und der Ausdruck $h\nu$. Physik. Zs. **12**, 408-412.

Es wird vor allem der Nachweis geführt, daß es gestattet ist, „das Plancksche „Energieelement" ε beliebig zu unterteilen". Grb.

W. H. Westphal. Zur Dynamik der bewegten Hohlraumstrahlung. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **13**, 607-611.

„Die Dynamik eines aus reiner Wärmestrahlung im Vakuum bestehenden Systems ist von M. Planck aus den Resultaten einer Arbeit von K. von Mosengeil abgeleitet worden. In letzterer Arbeit war das Relativitätsprinzip nicht vorausgesetzt worden.... Im folgenden ist nun die Berechnung von Energie und Bewegungsgröße eines aus reiner Wärmestrahlung bestehenden Systems auf Grund der Transformationen des Relativitätsprinzips allein durchgeführt worden." Lp.

E. Bauer. Sur la théorie du rayonnement. C. R. **153**, 1466-1469.

Es wird gezeigt, daß die Nernstschen Theorien über die Strahlungen aussendenden und resonierenden Elemente oder Molekülmodelle sich aus den entsprechenden Planckschen Theorien herleiten lassen. Br.

A. Joffé. Zur Theorie der Strahlungserscheinungen. Ann. der Phys. (4) **36**, 534-552.

Die „eigentlichen Lichtwirkungen" (Photoelektrizität, Photochemie, Fluoreszenz, Lichtionisation) passen nicht ohne weiteres in den Rahmen der Thermodynamik. Die Theorie der „schwarzen Strahlung" (W. Wien, M. Planck) war bisher für die Lichtwirkungen noch unfruchtbar. Der Verf. versucht, die auf dem genannten Gebiete festgestellten Gesetzmäßigkeiten als den Ausdruck einer allgemeinen Eigenschaft der Strahlung anzusehen und die Folgerungen aus dieser Annahme zu ziehen. Zunächst behandelt er, ohne eine atomistische Hypothese zu benutzen, Kreisprozesse mit monochromatischer Strahlung und stellt eine Zustandsfunktion der Strahlung auf, die dann auf beliebig zusammengesetzte Strahlung verallgemeinert wird. Für die schwarze Strahlung ist diese Größe dem Entropieverluste proportional. Nach Untersuchung des Verhaltens der Funktion bei irreversiblen Prozessen wird auf die atomistische Struktur der Strahlung eingegangen (Strahlungsmenge, Strahlungsquantum). Dabei wird eine weitgehende Analogie aufgestellt, die zwischen einer Strahlung und einem idealen Gase besteht, und diese wird zur Untersuchung über die wahrscheinlichste Energieverteilung herangezogen. Als wichtigstes Ergebnis des Ganzen erscheint, daß die in Frage stehenden Tatsachen sich durch die Eigenschaften der Strahlung erklären lassen, wenn man die Wirksamkeit des Lichtes nicht durch die schwarze Strahlung, sondern unmittelbar durch die Schwingungszahl mißt. Rtt.

R. Hargreaves. A kinematical theorem in radiation. Cambr. Phil. Soc. Proc. **16**, 331-335.

Die Anwendung thermodynamischer Methoden auf die Wärmestrahlung innerhalb eines geschlossenen Raumes gibt zwischen Temperatur und Volumen eine adiabatische Beziehung $\Theta v^{1/3} =$ konst. und liefert gleichzeitig für die Energiefunktion eine gewisse Form. Veränderung des Volumens bedingt Bewegung der reflektierenden Flächen des Raumes, und Reflexion an einer bewegten Fläche erzeugt Veränderung der Wellenlänge. Um das sogenannte Wiensche Gesetz der Verschiebung festzustellen, sind die Wellenlängen zu verändern nach demselben Verhältnis wie die linearen Elemente des betreffenden Raumes. Hargreaves gibt nun den kinematischen Satz, der nötig ist, um diesen Schritt für einen geschlossenen Raum von irgendwelcher Form zu machen. J.

E. M. Lémeray. Sur la pression de radiation. Journ. de Phys. (5) **1**, 559-565.

Nach einer von Larmor gegebenen Formel muß ein strahlender Körper, der sich bewegt, vorn und hinten verschiedene Drucke erleiden. Der Verf. kommt am Schluß seiner theoretischen Überlegungen zu der Folgerung: „Wenn man die beiden von Poynting ausgesprochenen Hypothesen zugibt, so hat der Druck während der gleichförmigen Bewegung denselben Wert wie bei der Ruhe. Ein nach allen Richtungen Strahlungen aussendender Körper erfährt also aus dieser Tatsache keine Verzögerung; er gehorcht dem Trägheitsprinzip. Die Bedingungen wären ganz andere für Körper, die ein Reflexionsvermögen haben und von den Strahlungen einer äußeren Quelle erreicht werden.“ Lp.

M. Born u. R. Ladenburg. Über das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen bei stark absorbierenden Körpern. Physik. Zs. **12**, 198-202.

Die vom energetischen Standpunkt als selbstverständlich erscheinende Beziehung $1 - \varrho = \delta$ (Summe der reflektierten (ϱ) und durchgelassenen (δ) Energie gleich der auffallenden Strahlung 1) ist ein Grenzfall, der aus der elektromagnetischen Lichttheorie nicht streng abzuleiten ist. Die Verf. zeigen einen Weg, auf dem die Gleichung für die Theorie der Wärmestrahlung abgeleitet werden kann. Grb.

A. Foix. Sur le rayonnement du manchon Auer et des corps amorphes en général. Ann. de Chim. et Phys. (8) **23**, 281-347.

Eingehende Darstellung der Theorie und der Versuchsergebnisse. Lp.

J. Suchý. Wärmestrahlung und Wärmeleitung. Ann. der Phys. (4) **36**, 341-382.

Verf. entwickelt eine Theorie der Wärmeleitung, die diese durch die Strahlung benachbarter Moleküle erklärt, und zwar auf Grund der Lorentzschen Annahme, daß die Strahlung durch den den Molekülen eigenen periodischen Wechsel von elektromotorischen Kräften entstehe. Er kommt nach dem Ansatz zuerst zu dem Resultat, daß dann die Wärme, die ein Oberflächenelement von einem andern empfängt, dem Emissionsvermögen des absolut schwarzen Körpers bei der Temperatur des ausstrahlenden Momentes proportional ist, stößt dann aber auf die Schwierigkeit, daß die Wärmeleitung in elektrischen Leitern eine andere sein muß als in Isolatoren, und zwar auch qualitativ. Für Metalle gelingt die Ausrechnung eines Wertes für den Wärmeleitungskoeffizienten verhältnismäßig leicht, für Isolatoren ist es aber nicht so einfach. Br.

Lord Rayleigh. Problems in the conduction of heat. Phil. Mag. (6) **22**, 381-396.

Es handelt sich um Spezialisierungen des Fourierschen Ansatzes für die Wärmeleitung auf einfachen Flächen, wie Kugeln oder Zylindern, und ein-

fache, meist punktförmige Wärmequellen, zum Teil mit momentaner oder auch periodischer Wärmezuführung, für die die entsprechenden spezielleren Ansätze aufgestellt werden. Br.

M. Baroni. Studi sugli scambi di calore. Lomb. Ist. Rend. (2) **44**, 99-132.

Die Arbeit behandelt den Wärmeaustausch zwischen dem Wasserdampfe und der ihn einschließenden metallischen Hülle im Hinblick auf zwei Fragen der angewandten Mechanik, die periodische Wärmebewegung in der Zylinderwand der Kolbendampfmaschine und den Wärmeverlust beim Strömen des Dampfes durch eine Röhre. Im ersten Teile wird allgemein das Verhältnis $\frac{dQ}{dv}$ im pv-Diagramm untersucht, wobei dQ die zwischen Hülle und Dampf übergehende Wärme bedeutet, dv die gleichzeitige Änderung des Volumens von 1 kg Dampf, positiv bei Expansion, negativ bei Kompression. Der zweite Teil bringt die praktischen Methoden zur Bestimmung von $\frac{dQ}{dv}$ und enthält in Diagrammen und Tabellen eine größere Menge von Zahlwerten. Im dritten Teile werden nach Erörterung der Änderung der Entropie des Dampfes in Bewegung Korrektionsmethoden mit Rücksicht auf die Größe der Geschwindigkeit aufgestellt. Rtt.

F. Leprince-Ringuet. Loi de la transmission de la chaleur entre un fluide en mouvement et une surface métallique. C. R. **152**, 436-439, 588-590.

Ausgehend von Bemühungen gleicher Richtung von Nüsselt, P. Jordan, Stanton u. a., hat der Verf. empirische Formeln aufgestellt, die den Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Flüssigkeiten in einem Rohre und dessen Umgebung darstellen sollen, und zwar in Abhängigkeit von Durchmesser und Länge des Rohres, Geschwindigkeit und spezifischem Gewicht der Flüssigkeiten. Für den Wärmeübergang von Gas durch Metall auf Wasser ergab sich bei Röhren von 1 bis 5 cm Weite und 0,50 bis 2 m Länge für Temperaturen von 30 bis 300° gute Übereinstimmung der Formelwerte mit der Beobachtung. Die Formeln sollen auch für Dampfkesselröhren von 4 bis 5 m Länge bei Temperaturen bis 500° mit Fehlern von höchstens 9% gültig bleiben.

Im Anschlusse daran werden in der zweiten Note Formeln für den Wärmeübergang mitgeteilt, wenn die Temperatur der Röhre in der genannten Ausdehnung konstant ist, wenn sie variabel ist, und wenn der Übergangskoeffizient mit der Länge der Röhre und der mittleren Temperatur variabel ist. Rtt.

M. Knudsen. Die molekulare Wärmeleitung der Gase und der Akkomodationskoeffizient. Ann. der Phys. (4) **34**, 593-656.

Der nach Kundt und Warburg für den Wärmeübergang notwendige Temperatursprung zwischen fester Wand und Gas war von Smoluchowski

(Ann. der Phys. (3) **64**, 101, 1898) bei Versuchen für Wasserstoff größer gefunden als für Luft. Ferner hatte der Verf. bei Untersuchungen über Radiometerkräfte festgestellt, ebenso Soddy und Berry bei Bestimmungen über Wärmeleitung, daß auffallenderweise bei niedrigen Drucken die Gase nicht so gut wärmeleitend sind, wie man nach der kinetischen Theorie erwarten sollte. Zweck der Arbeit ist nun die Untersuchung, ob gewisse Vorstellungen über das kinetische Verhalten zwischen den Molekülen des Gases und des festen Körpers die fraglichen Abweichungen erklären können, und ob dann die Versuchsbedingungen so eingestellt werden können, daß Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der Theorie erzielt wird.

Es wird zunächst die Theorie der molekularen Wärmeleitung der Gase zwischen absolut rauhen Flächen behandelt und bei den Übergängen zu unvollständig rauhen Flächen der Akkomodationskoeffizient eingeführt, der ein Kennzeichen für die gegenüber der bisherigen Theorie zu geringe Geschwindigkeit der die warme Platte (Wärmeübergang von Platte zu Platte durch Gas) verlassenden Moleküle darstellt und ebenso für die zu große Geschwindigkeit der die kalte Platte verlassenden. Zu den sehr eingehenden Versuchen zur Bestimmung der wirklichen Wärmeüberführung wurden zwei konzentrische Zylinderflächen angewendet (Glasröhren, die innere durch Platinspirale elektrisch geheizt, die äußere von weniger als 1 cm Durchmesser). Ergänzende, ebenfalls sehr sorgfältige Messungen betrafen den verschiedenen Einfluß der Wärmeleitung der Platinspirale. Der weitere wesentliche Inhalt der Arbeit bezieht sich auf den Wert des Akkomodationskoeffizienten bei verschiedenen Gasen und verschiedenen Oberflächen, bei Wärmeleitung unter höherem Druck usw. Rtt.

M. v. Smoluchowski. Zur Theorie der Wärmeleitung in verdünnten Gasen und der dabei auftretenden Druckkräfte. Ann. der Phys. (4) 35, 983-1004.

Die von Knudsen (Referat vorstehend) aus eigenen Versuchen (im Anschluß an die von Kundt und Warburg sowie von Soddy und Berry) gezogenen Schlüsse genügen dem Verf. der vorliegenden Arbeit nicht, die unter Benutzung der Knudsenschen Versuche die Hauptpunkte der Wärmeleitung verdünnter Gase genauer festlegen soll.

Nach kurzer Zusammenfassung der bisherigen Versuchsergebnisse, wobei auch die von Winkelmann, Brusch, Gehrcke, Schleiermacher und Schwarze berücksichtigt sind, wird eine Theorie des Temperatursprunges gegeben. Dafür hatte der Verf. früher zwei verschiedene Berechnungsweisen entwickelt, einmal unter Voraussetzung von Kugelmolekülen mit Hülfe des Begriffes der mittleren Weglänge, dann nach Maxwell mit Benutzung von dessen Kraftgesetz. Wie sich indessen zeigt, gelangt man zu einem brauchbaren Ausdrucke nur unter Annahme solcher Verdünnung, daß die mittlere Weglänge groß ist im Vergleiche zu dem Gasraume, da in diesem Grenzfalle die besondere Voraussetzung eines Molekularkraftgesetzes entbehrlich ist. Es kommt nun namentlich auf die Annahme über den unvollständigen Wärmeausgleich an, worüber auf Grund des Wärmeüberganges zwischen Zylinderflächen entschieden wird. Als derzeit gesichert läßt die Arbeit u. a. er-

scheinen: Unabhängigkeit des Wärmeleitungskoeffizienten idealer Gase vom Drucke, die Veränderung des Wärmeübergangs bei verdünnten Gasen wird durch die Theorie des Temperatursprunges befriedigend erklärt. Die genaue Theorie der Wärmeübertragung bei sehr kleinen Drucken ist bis jetzt nur für einatomige Gase aufzustellen. Der besonders unvollständige Wärmeausgleich bei Wasserstoff bestätigt die theoretische Regel von dem Einflusse des kleinen Molekulargewichtes bei kompliziertem Bau des Moleküles. Die Versuche, besonders die von Knudsen, zeigen die Abhängigkeit des Wärmeausgleiches auch von dem festen Körper; auch die radiometrischen Kräfte hängen nach den Untersuchungen von Knudsen vom Ausgleichskoeffizienten ab. Rtt.

M. Knudsen. Zur Theorie der Wärmeleitung in verdünnten Gasen und der dabei auftretenden Druckkräfte. Erwiderung an Herrn M. v. Smoluchowski. Ann. der Phys. (4) **36**, 871-872.

Gegen einzelne Punkte der vorstehend angezeigten Arbeit wendet sich Knudsen. Die Bemerkungen betreffen einesteils den Einfluß der inneren Molekularenergie auf die molekulare Wärmeleitung, andernteils sollen sie einer mißverständlichen Auffassung seiner Formel vorbeugen, die sich auf das absolute Manometer bezieht. Rtt.

M. v. Smoluchowski. Zur Theorie der Wärmeleitung in verdünnten Gasen und der dabei auftretenden Druckkräfte. Krak. Anz. 1911, 432-443.

Stimmt im wesentlichen überein mit dem vorstehend angezeigten Aufsatz. Rtt.

M. S. Smoluchowski. Some remarks on conduction of heat through rarified gases. Phil. Mag. (8) **21**, 11-14.

Bezieht sich auf die Theorie, die die geringe Wärmeleitungsfähigkeit stark verdünnter Gase als Oberflächenerscheinung auffaßt. Br.

R. Melmer. Ein Beitrag zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit von Fettstoffen, Erden, Sanden u. dergl. Wien. Ber. **120**, 269-281.

Bericht über Messungen nach der von Schleiermacher angegebenen, hier verbesserten Methode (der Platindraht ist durch eine feine Platinröhre ersetzt). Vorausgeschickt ist eine kurze Theorie der Versuche, die davon ausgeht, daß im stationären Zustande die in der Zeiteinheit erzeugte Joule-Wärme der in der Zeiteinheit die Flächeneinheit passierenden Wärme gleich ist. Rtt.

J. Boussinesq. Vibrations spontanées d'une barre à bouts fixes et imperméables à la chaleur, qui se met en équilibre thermique avec une atmosphère à température constante. C. R. **153**, 409-414.

J. Boussinesq. Vibrations spontanées d'une barre libre, se refroidissant par contact à ses extrémités et par rayonnement ou convection à sa surface latérale. C. R. **153**, 452-456.

Die beiden im Titel genannten Probleme, die schon von Annycke und Roy behandelt sind, werden nach verschiedenen Seiten hin näher beleuchtet.

Br.

J. Boussinesq. Sur les vibrations longitudinales que produit, dans une barre élastique, la variation de ses températures. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **28**, 377-388.

Der Inhalt dieses Artikels stimmt mit den beiden Noten überein, die in C. R. **153**, 409-414 u. 452-456 erschienen sind (Referat vorstehend). Lp.

R. Marcolongo. Sull' equazione della propagazione del calore nei corpi cristallizzati. Napoli Rend. (3) **17**, 164-172.

Stellt einige partikulare Lösungen der allgemeinen Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem thermisch inhomogenen Körper auf, die den Fourierschen für die Wärmeleitung in einem homogenen Körper entsprechen.

Br.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1.

Geodäsie.

J. Soldner. Theorie der Landesvermessung. Herausgegeben von J. Frischauf. Leipzig: W. Engelmann. 75 S. 8°. (Ostwalds Klassiker Nr. 184.)

Wiederabdruck des Hauptwerkes Soldners, dem wir die erste zusammenhängende Triangulierung und Landesvermessung mit rechtwinkligen Koordinaten verdanken. 1810 der Bayerischen Steuerkatasterkommission vorgelegt, wurde die Arbeit als Dienstgeheimnis behandelt und gelangte erst 1878 in dem von Bauernfeind herausgegebenen Werke „Die Bayerische Landesvermessung" zum ersten Mal zum Abdruck. Ihre Wiedergabe in der Ostwaldschen Sammlung rechtfertigt sich durch die Seltenheit dieses fast unzugänglich gewordenen Werkes. Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Lösung der wichtigsten Aufgaben der höheren Geodäsie mittels sphärischer Rechnung (wobei aber der Einfluß der Abplattung untersucht wird). Der zweite Teil gibt die Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie und löst mit ihrer Hülfe die Hauptaufgabe, aus den Richtungen und Längen der Seiten die geographischen Koordinaten zu berechnen. Die 16 Seiten umfassenden Anmerkungen des Herausgebers bieten eine kurze Biographie des berühmten Verfassers, der aus den bescheidensten Verhältnissen heraus sich zu klassischer Bedeutung entwickelt hat, sowie Erläuterungen und Vereinfachungen des Textes.

Sk.

E. Hammer. Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde). Band I, Feldmessen und Nivellieren, des Lehrbuchs der Vermessungskunde besonders für Bauingenieure. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. XIX u. 766 S. gr. 8°. Mit 500 Fig. im Text.

In der Selbstanzeige (Deutsche Math.-Ver. **20**, 114) spricht sich der Verf. über die Abfassung des Buches folgendermaßen aus: Dieses Lehrbuch wendet sich an den Anfänger. Im Gegensatz zu mehreren in der letzten Zeit erschienenen Büchern über Vermessungskunde oder elementare Geodäsie ist der Umfang des

Stoffes stark eingeengt, dieser Stoff aber ausführlich behandelt worden. Das Buch soll dem Rat suchenden Anfänger tatsächlich Antwort auf die Fragen geben, die ihm Schwierigkeiten zu bereiten pflegen, nicht einen flüchtigen Überblick über das weite Gebiet der niederen Geodäsie bieten, mit dem eben gerade dem Anfänger nicht gedient ist; es soll ihm zugleich im Sinne eines Übungsbuches vertraut werden. „Messen lernen kann niemand aus einem Buch allein", zumal der Anfänger nicht. Der Verf. gibt dies zu; aber er wollte doch einmal den Versuch machen, im Anschluß an seine Vorträge und Übungen im Sinne des Lehrbuches auch in der praktischen Geometrie weiter zu gehen, als es die bisher erschienenen, als Lehrbücher bezeichneten Weıke tun. Der Umfang des vorliegenden Lehrbuchs der „praktischen Geometrie" (diesen alten schönen Namen der Lambert, Tob. Mayer usw. wollte er der elementaren Vermessungskunde lassen) entspricht dem Vortrags- und Übungsstoff, den er seit Jahren an der Technischen Hochschule Stuttgart für einen aus verschiedenen Abteilungen sich zusammensetzenden Zuhörer- und Übungsteilnehmerkreis in dem Wintervortrag nebst zugehörigen Zimmerübungen und den Sommerfeldübungen zu behandeln pflegt. Es sind aber hier auch schon größere Teile des zweiten Vortrags und der zugehörigen Übungen mit aufgenommen".

Inhalt: Einleitung. Erster Abschnitt: Lagemessungen oder Horizontalmessungen der elementaren praktischen Geometrie. I. Kleinmessung oder Stückmessung, Einzelmessung. II. Berechnung der Flächen von Grundstücken aus Messungszahlen. Teilung von Feldflächen. Berechnung von Feldflächen mit Benutzung von Plänen. Flächen in technischen Zeichnungen. Planimeter. III. Der Theodolit zum Messen beliebiger Horizontalwinkel. IV. Elemente der Zugmessung. V. Elementare Aufgaben der Kleintriangulierung. VI. Elementare Aufgaben über Absteckungsarbeiten (im Sinne der Lagemessungen) mit Hülfe des Theodolits. Zweiter Abschnitt: Höhenmessungen oder Vertikalmessungen der elementaren praktischen Geometrie. VII. Nivellieren oder Einwägen.

Was Ref. schon bei der Anzeige des „Lehr- und Handbuches der ebenen und sphärischen Trigonometrie" von Hammer (F. d. M. **38**, 523, 1907) rühmend anerkannt hat, gilt in gleichem Maße über das vorliegende Werk, das aus einer längeren Praxis des Unterrichtes entstanden ist. Der Verf. ist offenbar ein Lehrer, der alle Schwächen seiner Schüler durch fortgesetzten Umgang mit ihnen genau kennen gelernt hat und nun mit Umsicht und peinlicher Genauigkeit überall Abhülfe zu schaffen sich bemüht. Auch dieses Werk sollte für die Enthusiasten der Reformbestrebungen des mathematischen Unterrichts ein Wegweiser sein; hier ist praktische Geometrie vorhanden, die vielen Menschen im Leben greifbar entgegentritt. Auch die Geschichte der Wissenschaft ist berücksichtigt, und zwar gerade in der „angewandten Mathematik", die bei M. Cantor sehr zurücktritt. Eine von K. Fuhrmann verfaßte, ausführliche Rezension des vortrefflichen Buches steht im Archiv der Math. u. Phys. (3) **20**, 157-160. Lp.

Th. Tapla. Grundzüge der niederen Geodäsie. IV.: Verwertung von geodätischen Aufgaben. **Leipzig: Fr. Deuticke. VI + 62 S. 8⁰. Mit 10 Tafeln.**

Mit diesem 4. Bande werden die „Grundzüge der niederen Geodäsie" abgeschlossen.

Der Band zerfällt in 6 Abschnitte: I. Orientierung. II. Flächenbestimmungen. III. Flächenteilungen. IV. Grenzregulierungen. V. Grenzsicherungen. VI. Durchführung einer Reihe wichtiger technischer Aufgaben.

Während die Abschnitte I, IV, V und VI ganz kurz sind, diese also nur dazu dienen, das Gesamtwerk als ein dispositionell gut gegliedertes Werk erscheinen zu lassen — Abschnitt I und VI zusammengenommen nehmen gerade 11 gedruckte Zeilen ein —, füllen die populär gehaltenen Abschnitte II und III den ganzen 4. Band aus und geben dem, der die niedere Geodäsie nur als Hülfsdisziplin gebraucht, ein brauchbares Hülfsmittel in die Hand. Dem Bande sind 10 Tafeln mit insgesamt 92 Figuren in Steindruck beigefügt. Hb.

R. Seifert. G. H. A. Kröhnkes Taschenbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Leipzig: B. G. Teubner. VII + 119 S. 8°.

Das Kröhnkesche Handbuch, welches sich die Aufgabe stellt, das Bogenabstecken mit seinen unangenehmen und zeitraubenden Berechnungen durch drei Zahlentafeln zu erleichtern, enthält in seiner Neubearbeitung (15. Auflage) durch R. Seifert eine gänzlich neu gefaßte Einleitung. „Sie enthält eine Erörterung der vorkommenden mathematischen Beziehungen so ausreichend, um auch in eigenartigen Fällen die Absteckung von Bögen durchführen zu können, ohne zu umfangreichen Lehrbüchern, die man im Felde ja nicht zur Hand hat, greifen zu müssen. Dabei sind auch die einfacheren Fälle der Korbbögen und der Übergangsbögen nach der kubischen Parabel in Eisenbahnlinien betrachtet."

Die Zahlentafel I enthält die Werte der Tangente, der Bogenlänge, der halben Sehne, der Koordinaten des Scheitelpunktes und dessen Abstand vom Winkelpunkt des Bogens für den Halbmesser 1000 und alle Zentriwinkel von 0 bis 120 Grad von 10 zu 10 Minuten.

Die Zahlentafel II enthält die Abszissen und Ordinaten zur Absteckung äquidistanter Bogenpunkte für alle vorkommenden Halbmesser von 20 bis 10 000.

Die Zahlentafel III enthält die Werte des Zentriwinkels für die Bogenlängen 1 bis 9 bei allen in der Zahlentafel II vorkommenden Radien in Graden, Minuten und Sekunden des (in 360 Grade geteilten) Kreises. Hb.

F. R. Helmert. Über die Genauigkeit der Dimensionen des Hayfordschen Erdellipsoids. Berl. Ber. 1911, 10-20.

Von zwei Gesichtspunkten aus betrachtet, ist die Helmertsche Arbeit von Interesse.

Fußend auf den Hayfordschen Arbeiten „The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States" vom Jahre 1909 und auf der folgenden „Supplementary investigation in 1909 of the figure of the Earth and isostasy" vom Jahre 1910, leitet Helmert nach der Methode der kleinsten

Quadrate die mittleren Fehler sowohl für die Tiefe der Ausgleichsfläche, wie für die Äquatorialhalbachse und die Abplattung des Erdellipsoides ab und erhärtet durch die Strenge seiner Entwicklungen die Hypothese von der Isostasie und die Brauchbarkeit einer auf ihr beruhenden Reduktion der astronomischen Daten, zeigt aber, daß die von Hayford vermutete Genauigkeit im allgemeinen nur halb so groß ist.

Neben diesem geodätisch-physikalischen Gesichtspunkte enthält auch die Arbeit, vom rein mathematischen Standpunkte aus beurteilt, einen wertvollen Beitrag zur Theorie der kleinsten Quadrate.

Helmert veranschaulicht seine Methode für die Berechnung der Tiefe der Ausgleichsfläche und ihres mittleren Fehlers an einem Beispiel mit nur drei Unbekannten. Da auch P. Pizzetti in seiner Abhandlung „Sopra un procedimento di Helmert in un particolare caso di applicazione del metodo dei minimi quadrati" (Referat nachstehend) das Helmertsche Problem von neuem angreift und es nach einer Richtung hin erweitert, so möge es ausführlich dargestellt werden:

Die allgemeine Fehlergleichung habe die Form:

$$\lambda_i = L_i + F_i(X, Y, Z).$$

Unter der Annahme, daß X_0, Y_0 und Z_0 genügende Näherungswerte sind, sind wir berechtigt, die Fehlergleichungen linear zu machen und zu schreiben:

$$\lambda_i = l_i + a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0.$$

Hierin ist:

$$x_0 = X - X_0,\ y_0 = Y - Y_0,\ z_0 = Z - Z_0,$$

$$l_i = L_i + F_i(X_0, Y_0, Z_0),$$

$$a_i = \frac{\partial F_i(X_0, Y_0, Z_0)}{\partial X_0},\ \ b_i = \frac{\partial F_i(X_0, Y_0, Z_0)}{\partial Y_0},\ \ c_i = \frac{\partial F_i(X_0, Y_0, Z_0)}{\partial Z_0}.$$

Dies alles ist hinreichend bekannt.

Nun aber kann der Fall eintreten, daß z. B. der Differentialquotient c nur unter Zuhülfenahme zeitraubender Rechnungen gefunden werden könnte, und so ergibt sich das Problem: Ist es möglich, die Berechnung dieses Differentialquotienten zu ersparen und dennoch sämtliche drei Werte X, Y, Z vollkommen streng im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen?

Helmert löst das Problem. Der eingeschlagene Weg ist folgender:

Man wähle für Z irgendeinen Näherungswert, z. B. Z_1, der aber so beschaffen sein muß, daß die Differenz z_1 ($= Z - Z_1$) in bezug auf ihre Größenordnung gleichwertig mit der von z_0 ist. Dieser Wert Z_1 wird für die gesamte Ausgleichung als bekannt vorausgesetzt, und man hat somit die Ausgleichung nur noch in bezug auf zwei Unbekannte X_1 und Y_1 durchzuführen. Die Fehlergleichungen gewinnen nun folgendes Aussehen:

$$\lambda_i = l_{i1} + a_{i1} x_{01} + b_{i1} y_{01}.$$

Hierin ist:

$$x_{01} = X_1 - X_0,\ \ y_{01} = Y_1 - Y_0,\ \ \lambda_{i1} = L_i + F_i(X_0, Y_0, Z_1),$$

$$a_{i1} = \frac{\partial F_i(X_0, Y_0, Z_1)}{\partial X_0},\ \ b_{i1} = \frac{\partial F_i(X_0, Y_0, Z_1)}{\partial Y_0}.$$

Abgesehen von den beiden Unbekannten x_{01} und y_{01}, auf die es uns, da wir jetzt nur die Berechnung von z_0 im Auge haben, nicht ankommt, möge die Ausgleichung nach x_{01} und y_{01} die Fehlerquadratsumme $[vv]_1$ ergeben. Genau dasselbe wiederholt man zweimal für die beiden beliebig anders gewählten Werte Z_2 und Z_3 und gelangt so zu Fehlerquadratsummen $[vv]_2$ und $[vv]_3$.

Nun zeigt Helmert, daß man aus diesen drei Fehlerquadratsummen $[vv]_1$, $[vv]_2$ und $[vv]_3$ in Verbindung mit den Werten Z_1, Z_2 und Z_3 streng den Wert Z und den mittleren Fehler von Z berechnen kann, welcher aus der Ausgleichung folgen würde, welche Z in Verbindung mit X und Y als gleichwertige Unbekannte auffaßt.

Scheint dieser Weg auch auf den ersten Blick gekünstelt zu sein, so ist er doch tatsächlich, wenn auch nicht streng, wie bei Helmert, von Hayford in seiner Berechnung der Tiefe der Ausgleichsfläche eingeschlagen worden. Während aber Hayford nur auf interpolatorischem Wege zu einer Tiefe der Ausgleichsfläche gelangt, ist es das Verdienst von Helmert, auch in dieser verwickelten Materie den mathematisch strengen Weg gewiesen zu haben. Hb.

P. Pizzetti. Sopra un procedimento di Helmert in un particolare caso di applicazione del metodo dei minimi quadrati. Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_2$, 96-99.

Verf. knüpft an das von Helmert in den Sitzungsberichten der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften (Referat vorstehend) entwickelte Problem an und verallgemeinert es allein dadurch, daß, während Helmert nur von drei Unbekannten x_0, y_0, z_0 ausgeht und von diesen die Größe z_0 ausscheidet, er mehrere Unbekannte voraussetzt und auch von diesen wieder mehrere zur Gewichtsbestimmung ausscheidet. Eine eingehende Beurteilung des Helmertschen Problems findet sich in dem vorstehenden Referate; ich verweise daher zum besseren Verständnis auf dieses. Hb.

P. Pizzetti. Sopra il calcolo teorico delle deviazioni del geoide dall'ellissoide. Torino Atti **46**, 331-350.

Die bekannten Formeln von Stokes und Helmert, welche den Zusammenhang zwischen der Schwerestörung, der Massenstörung und der Höhenstörung der Meeresfläche ausdrücken, leitet Verf. ab, indem er von etwas geänderten Voraussetzungen ausgeht. Hb.

C. Mineo. Sulle formole fondamentali per il confronto della superficie geoidica con l'ellissoide Besseliano. Batt. G. **49** [(3) **2**], 355-375.

In der vorliegenden Arbeit leitet der Verf. die Formeln, die Bessel in seiner Abhandlung „Über den Einfluß der Unregelmäßigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten“ und Pucci in „Sulle formule fondamentali

della geodesia geoidica" (F. d. M. 18, 1084, 1886) entwickelt haben, auf einem einfacheren Wege ab und benutzt dabei die neueren mathematischen Forschungen von Christoffel, Weingarten, Villarceau und Poincaré. Hb.

E. Kohlschütter. Über den Bau der Erdkruste in Deutsch-Ostafrika. Gött. Nachr. 1911, 1-40.

Die von Helmert größtenteils entwickelten isostatischen Reduktionen der Schwerebeschleunigung werden zum ersten Male systematisch und vielseitig zur Erforschung der Dichteschichtung der Erdkruste innerhalb eines größeren Gebietes wie des von Deutsch-Ostafrika ausgenutzt.

Es ergibt sich aus dieser Untersuchung die bemerkenswerte Tatsache, daß die Ausgleichsfläche auch im Innern des afrikanischen Kontinents nahezu in der Tiefe von 120 km liegt, also derselben Tiefe, die Hayford und Tittmann für die Vereinigten Staaten von Nordamerika und Helmert (in anderer Weise) gefunden haben. Doch zeigt Verf., daß man nicht etwa daraus schließen darf, daß an allen Orten die Massenverteilung dasselbe Gesetz, nämlich die im Sinne Pratts vorausgesetzte Isostasie, befolgt. Nur im großen und ganzen erweisen sich die Festlandsmassen als völlig kompensiert; Isostasie im einzelnen herrscht nicht, die Plateaus und Grabeneinbrüche Ostafrikas sind beispielsweise einzeln nicht kompensiert. „Die in den Gräben fehlenden Massen finden wir in den sichtbaren Plateaus wieder, wobei es zunächst dahingestellt bleibt, ob hier wirklich Seitenverschiebungen oder Bildungen großer Spalten angenommen werden müssen, oder ob sich ein plausibles Dichteverteilungsgesetz finden läßt, das die beobachteten Erscheinungen allein aus Vertikalbewegungen zu erklären erlaubt." Von Wert ist noch der folgende Hinweis, daß die beobachteten Erdbeben durch die nachgewiesenen Störungen des hydrostatischen Gleichgewichts sich nun ungezwungen erklären lassen. Hb.

R. Schumann. Geoidabstände nach der Formel von Stokes bei schematischen Schwerebelegungen. Wien. Ber. **120**, 1655-1707. 3 Tafeln, 4 Fig.

Die Stokessche Formel ermöglicht es, die Abstände des Geoids von einem gewissen Referenzellipsoid punktweise zu berechnen, wenn die Schwerestörungen Δg, das sind die Unterschiede zwischen beobachteter und ellipsoidischer Schwerkraft, über das ganze Ellipsoid bekannt sind.

Da es nun bei der Art, wie sich diese Schwerestörungen über die ganze Erdoberfläche verteilen, schwierig ist, zu übersehen, welche Geoidformen durch sie erzeugt werden, so stellt sich Verf. die Aufgabe, zunächst solche Formen zu untersuchen, die dadurch entstehen, daß einfach begrenzte Flächen, und zwar Kalotten und Ringe, eine konstante Schwerebelegung besitzen.

Es werden nun ganz allgemein die Geoidabstände für den gesamten durch den Mittelpunkt einer solchen gravitierenden Kalotte gehenden Meridian berechnet und zur Auswertung des in der Stokesschen Formel enthaltenen Doppelintegrals graphische Verfahren eingeschlagen. Zum Schluß werden noch

interessante Tabellen und Zeichnungen veröffentlicht, welche die meridionalen Geoidschnitte bei gewissen schematischen Schwerebelegungen zur Anschauung bringen.

Die gesamte Arbeit gliedert sich in 8 Paragraphen mit den folgenden Überschriften:

§ 1. Einleitung. § 2. Die Übertragung in die Ebene. § 3. Die Funktion *F*. § 4. Ablesungskontrollen. § 5. Messungen. A. nach der stereographischen Projektion; B. nach der speichentreuen Abbildung; C. Vergleiche. § 6. Fehlerschätzungen. § 7. Geoidabstände in den Mitten gravitierender Kalotten und Ringe. § 8. Anwendung auf einige an der Erdoberfläche beobachtete Schwerebelegungen. Hb.

P. Hatt. Notions sur la méthode des moindres carrés. Annuaire Longit. 1912, 34 S.

Eine ganz elementare Darstellung dieser Methode in den Abschnitten: Prinzip der kleinsten Quadrate. Methode von Legendre. Methode von Gauß. Anwendung der Gaußschen Methode auf die Triangulierung. Vergleichung der beiden Methoden. Genauigkeit der Beobachtungen. Allgemeine Form der Normalgleichungen in dem Falle ungleicher Genauigkeit. 1. Methode von Legendre. 2. Methode von Gauß. Anwendung auf den Schluß des Dreiecks. Lp.

E. Hammer. Zur Ausgleichung von Streckennetzen. Zs. f. Vermessungsw. **40**.

Die Ausgleichung des Streckennetzes, mit welchem Worte der Verf. die durch Längenmessung allein hergestellte Messungsgrundlage der Kleinaufnahme bezeichnet, wird unter verschiedenen Gesichtspunkten durch Hinzunahme praktischer Beispiele behandelt.

Vor allem wird gezeigt, wie durch Zuhülfenahme des Rechenschiebers die Zeitdauer und der Arbeitsaufwand der Ausgleichungsrechnung auf ein Minimum herabgesetzt werden kann.

Im ersten Absatz wird eine Ausgleichung durchgeführt, welche auf der aus den Dreiecksinhalten folgenden Bedingung fußt.

Im zweiten Absatz wird die gleiche Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen unter Benutzung eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems durchgeführt.

Im dritten Absatz wird eine Ausgleichung mit Aufstellung der Bedingungsgleichungen durch Winkelbeziehungen statt der durch Dreiecksinhaltsbeziehungen durchgeführt und im letzten Abschnitt das gleiche Netz nach vermittelnden Beobachtungen wieder unter Benutzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgeglichen. Hb.

O. Eggert. Die Genauigkeit der Punktbestimmung durch Hansens Problem. Zs. f. Vermessungsw. **40**, 1-16.

„Während für die Einzelpunkteinschaltung durch Vorwärts-, Seitwärts- und Rückwärtseinschneiden bereits zahlreiche Genauigkeitsuntersuchungen vor-

liegen, findet man für die Doppelpunkteinschaltung in bezug auf die Genauigkeit nur sehr dürftige Angaben."

Verf. füllt die hier bestehende Lücke aus und zeigt, daß es nicht möglich ist, eine bestimmte Form des Viereckes als günstigste zu bezeichnen, daß vielmehr dieselbe Genauigkeit der Punktbestimmung sich durch verschiedene Punktlagen erzielen läßt. „Ungünstig sind unter allen Umständen die Formen, bei denen die Neupunkte sehr nahe beieinander liegen und vor allem diejenigen, bei denen die Verbindungslinie der Neupunkte in der Nähe eines Festpunktes liegt. Der letzte Fall entspricht der Lage des Neupunktes in der Nähe des gefährlichen Kreises beim Rückwärtseinschneiden." Hb.

O. Jacoangeli. Dimostrazione geometrica della regola di Bessel. Torino Atti **46**, 441-446.

Die Besselsche Methode zur Elimination der Instrumentalfehler eines Theodoliten wird geometrisch veranschaulicht und hergeleitet. Hb.

A. Broca. Sur la constitution d'axes de rotation assez stables pour permettre la mesure des angles géodésiques par la méthode de la répétition. C. R. **152**, 847-849.

Verf. stellt Betrachtungen über die Stabilität der Vertikalachse des Horizontalkreises eines Theodoliten an und gibt einige Ratschläge, um Fehler, welche beim Gebrauch des Repetitionsverfahrens durch eine ungenügende Stabilität der Achse veranlaßt werden, nach Möglichkeit zu vermeiden. Hb.

F. Cavani. Sulla verticalità della stadia nella misurazione delle distanze in planimetria. Bologna Mem. (6) 8, 307-334.

Verf. entwickelt einfache Formeln, welche den Einfluß der Schiefe einer Meßlatte bei tachymetrischen Messungen auf die Bestimmung der Entfernung der anvisierten Latte vom Beobachter angeben. Hb.

L. v. Schrutka. Diopterlineal mit distanzmessender Einrichtung. Österr. Zs. f. Vermessungsw. 1911, 2 S.

Die sich aus der höchst einfachen Theorie des Diopterlineals ergebende Gleichung lautet $D = K/\Delta$. Hier ist K eine von dem Lineal und seiner ihm zugehörigen Latte abhängige unveränderliche Konstante, Δ die Differenz der Ablesungen am Objektivdiopter, und D die zu messende Entfernung.

Um sich auch die Mühe dieser einfachen Division zu ersparen, schlägt Verf. vor, eine Glasskala auf dem Objektivflügel anzubringen, welche ähnlich dem Rechenschieber statt Δ sofort die Größe D abzulesen gestattet, und dadurch die unmittelbare Ablesung der Distanz zu erreichen. Hb.

L. v. SCHRUTKA. Studien zur Viertelsmethode der Geodäsie. Österr. Zs. f. Vermessungsw. **9**, 8 S.

Die als Viertelsmethode bezeichnete Näherungsmethode für die Absteckung eines Kreisbogens im Felde, welche darauf beruht, daß die Pfeilhöhe für den halben Zentriwinkel um so genauer gleich dem Viertel der Pfeilhöhe für den ganzen Zentriwinkel ist, je kleiner dieser ist, wird vom Verf. nebst einigen Genauigkeitsuntersuchungen dahin verbessert, daß er nicht von einer einzigen Pfeilhöhe h, sondern von zwei aufeinanderfolgenden h und h' ausgeht, um die nächstfolgende, hier also h'', zu berechnen. Hb.

L. v. SCHRUTKA. Über die ökonomischeste Trassenführung für den Fall, daß die Kosten für das laufende Kilometer mit dem Orte wechseln. Österr. Wochenschr. f. d. öff. Baud. 1911, 8 S.

Das hier behandelte, vom rein mathematischen Standpunkt interessante Problem stellt Verf. mit folgenden Worten auf:

„Wenn die Aufgabe vorliegt, zwei gegebene Punkte durch eine zu trassierende Kommunikation zu verbinden — es kann sich hier um eine Eisenbahn, eine Straße, einen Kanal, eine Telegraphen- oder Telephonverbindung (ausgenommen natürlich eine drahtlose Verbindung) handeln —, so wird man geneigt sein, unter sonst gleichen Verhältnissen in der geraden Verbindungslinie der beiden Punkte die ökonomischeste Trasse zu sehen. Überlegt man sich aber die Sache genauer, so erkennt man leicht, daß dies nur so lange richtig ist, als die stillschweigend gemachte Voraussetzung zutrifft, daß die Gesamtkosten der Länge der Trasse proportional sind. Unter den Gesamtkosten sind die Anlagekosten und die Erhaltung und Betriebskosten, alle auf einen und denselben Termin reduziert, zu verstehen.

Es lassen sich aber nun sehr wohl auch Fälle denken, in denen die genannte Voraussetzung nicht gültig ist. Dies wird dann der Fall sein, wenn die Gesamtkosten, auf das laufende Kilometer (oder Meter) berechnet, nicht konstant, sondern variabel, mathematisch ausgesprochen eine Funktion des Ortes sind. Nennt man diese Funktion Φ, wobei vorläufig über die Art der Festlegung des Ortes nichts vorausgesetzt werden soll, so sind die Gesamtkosten $\int \Phi\, ds$, wo das Integral über die gewählte Trasse von einem Punkt P_0 bis zum andern P_1 zu erstrecken ist. Die ökonomischeste Trasse wird daher jene Kurve sein, für die das Integral $\int \Phi\, ds$ ein Minimum wird. Die Auflösung dieser Aufgabe, welche Gegenstand der Variationsrechnung ist, wird nun vom Verf. klar und

scharf in zwei Fällen durchgeführt, erstens: die Kosten sind von der Entfernung von einer Geraden abhängig, und zweitens: die Kosten sind von der Entfernung von einem Punkte abhängig. Hb.

A. Klingatsch. Die geodätische Orientierung zweier Punktfelder. Wien. Ber. **120**, 565-582.

Es werden die „in dem Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden" bekannten und mannigfach gelösten Spezialaufgaben dadurch vielseitig verallgemeinert, daß Verf. von zwei räumlichen Punktfeldern ausgeht.

In beiden Feldern — wir wollen sie kurz I und II nennen (Verf. bezeichnet sie mit P und Q) — sind die Punkte durch rechtwinklige kartesische Koordinaten festgelegt, es ist aber noch nicht Feld I durch rechtwinklige Koordinaten auf II und II durch rechtwinklige Koordinaten auf I bezogen; und so ergibt sich nun die Aufgabe, diese noch fehlende gegenseitige Beziehung dadurch festzulegen, daß man geodätische Orientierungsmessungen, bestehend aus Horizontal und Vertikalwinkelmessungen, vom einen zum andern Felde hin vornimmt. Eine Beschränkung legt sich jedoch Verf. dadurch auf, daß die Orientierungsmessungen nur in dem einen der beiden Felder, beispielsweise nur in I, vorgenommen werden dürfen.

Sind nun Punkte des zweiten Feldes an das erste anzuschließen, so haben wir die Bestimmung durch äußere Richtungen (Verallgemeinerung des Vorwärtseinschneidens), sind dagegen Punkte des ersten Feldes an das zweite anzuschließen, so haben wir die Bestimmung durch innere Richtungen (Verallgemeinerung des Rückwärtseinschneidens) vor uns.

„Ob es sich also", so führt Verf. weiter aus, „um eine Bestimmung durch äußere oder eine solche durch innere Richtungen handelt, so ist vorerst die gegenseitige Orientierung zwischen einem Dreieck des einen und einem ebensolchen des anderen Punktfeldes vorzunehmen", eine Aufgabe, welche Verf. als das „Problem der 6 Punkte und der 3 Strahlen" bezeichnet und löst. Hb.

R. W. Wilson. Determination of the altitude of aeroplanes. Amer. Ac. Proc. **47**, 25-43.

Verf. bestimmt die Höhe eines Fliegers von der Erde aus durch das Vorwärtseinschneiden von den beiden Endpunkten einer festgelegten Basis. Die Gleichzeitigkeit der Messungen an den beiden Endpunkten der Basis wurde durch telephonische Verständigung bewirkt.

Seine Messungen ergaben Höhen, welche, verglichen mit den barometrischen Höhenmessungen bei einer Höhe von 1000 bis 2000 m, um 60 bis 100 m geringer ausfielen.

Tabellen und Kurven zeigen die Ergebnisse der Messungen, doch fehlten Genauigkeitsuntersuchungen. Hb.

Weitere Literatur.

C. Briot et C. Vacquant. Arpentage, levé des plans et nivellement. 12e édition. Paris: Hachette. 244 S. 16mo.

C. L. Crandall. Textbook on geodesy and least squares. New York: Wiley. X u. 329 S. 8⁰.

J. Frischauf. Zwei Aufgaben der höheren Geodäsie. Zs. f. Vermessungsw. **40**, 205-222.

E. Gabriel. Arpentage. Levé des plans. Nivellement. Tracé des routes. Paris: Poussielgue. XI u. 372 S. 8⁰.

E. Hammer. Noch ein Beweis des Legendreschen Satzes. Zs. f. Vermessungsw. **40**, 33-36, 252-253.

E. L. Ingram. Geodetic surveying and the adjustment of observations (method of least squares). New York: McGraw-Hill. XX u. 389 S. 8⁰.

R. E. Middleton and others. A treatise on surveying. Parts I and II. Third edition. London: Spon. 300 u. 360 S. 8⁰.

R. Neuendorff. Praktische Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 105 S. 8⁰. (Aus Natur und Geisteswelt 341.)

P. C. Nugent. Plane surveying, a text and reference book for the use of students in engineering and for engineers generally. Third edition, revised. New York: Wiley. XXII u. 599 S. 8⁰.

H. Priess. Praktische Geometrie für Landwirtschaftsschulen. Hildesheim: H. Olms. VI u. 45 S. 8⁰.

Rischel. Untersuchungen über die Fehler, welche bei einem sphärischen Polygonzug unter Annahme ebener Strecken und Winkel auftreten. Zs. f. Vermessungsw. **40**, 397-403.

P. Seliger. Die stereoskopische Meßmethode in der Praxis. 1. Teil. Einführung in die Topographie und Bildmeßkunst. Normalstereogramm. Berlin: J. Springer. XI u. 227 S. gr. 8⁰.

Weitbrecht. Lehrbuch der Vermessungskunde. 2. Teil. Vertikalmessungen. Stuttgart: K. Wittwer. VI u. 360 S. gr. 8⁰.

Kapitel 2.

Astronomie.

A. v. Flotow. Einleitung in die Astronomie. Leipzig: G. J. Göschen. XIII + 289 S. 8⁰. (Sammlung Schubert XV.)

Das Buch bringt im wesentlichen die theoretischen Grundlagen der sphärischen Astronomie oder der Astrometrie, die sich mit der Bestimmung der Richtungen, in denen uns die Himmelsobjekte erscheinen, befaßt.

„Es läßt sich daher der Inhalt kurz zusammenfassen in: Definition und Transformation der verschiedenen astronomischen Koordinaten, ihre gegen-

seitigen Veränderungen im Laufe der Zeit und Bestimmung der uns durch das Licht vermittelten Richtungen der Himmelsobjekte."

Der Stoff ist in neun Abschnitte geteilt. Der erste bringt die Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie und Reihenentwicklungen, der zweite die Koordinatensysteme (Horizont, Äquator, Ekliptik), der dritte das Zeitmaß der vierte die Koordinatentransformationen nebst besonderen Erscheinungen der täglichen Bewegung, der fünfte Differentialformeln; der sechste handelt vom Nullpunkt und der Parallaxe, der siebente von den Elementen der Bahnbewegung, der achte von der Realisierung der Richtung durch den Lichtstrahl (Refraktion und Aberration), der neunte von den Änderungen der Fundamentalebenen (Präzession, Nutation, Polschwankungen). Ein Anhang endlich enthält Ziffernwerte der Bahnelemente und Konstanten.

Das Werk ist nicht als „Handbuch", sondern als „eine Einführung" gedacht, die überall das „Wesen der Methode" in den Vordergrund stellt. Diesem Standpunkt entspricht die gedrängte Darstellung; doch sind wiederholt allgemeine wie auch geschichtliche Anmerkungen eingestreut, welche den Wert des Buches noch erhöhen. Doch wird mancher Einzuführende ein Sachregister vermissen, das die vielen Kunstausdrücke und die dafür gebräuchlichen Bezeichnungen enthielte. Auch einen sparsamen Gebrauch von Figuren, die außer einer auf der letzten Seite ganz fehlen, wird nur der mit dem Stoff schon Vertraute nicht vermissen. Dz.

H. J. Klein. Allgemeinverständliche Astronomie. Ausführliche Belehrungen über den gestirnten Himmel, die Erde und den Kalender. Zehnte, vielfach verbesserte Auflage. Leipzig: J. J. Weber. 308 S. 8°. 135 Textfig., 1 Sternkarte.

Das Erscheinen der zehnten, vielfach verbesserten Auflage dieses Werkchens beweist, daß es seinen Zweck für die Allgemeinheit im vollsten Maße erfüllt. Eine Sternkarte und 135 Abbildungen sind in den Text verflochten.

Erwähnt sei, daß Fig. 91 von dem heliozentrischen Lauf des Mondes zwar für alle übrigen Planetenmonde richtig ist, aber gerade für den Erdmond ein falsches Bild gibt. Denn wenn auch dieses Bild von Kepler stammt, so ist doch seitdem längst bekannt, daß die heliozentrische Bahn des Erdmondes der Sonne stets nur die konkave Seite zukehrt; also zwischen Neumond und Vollmond kein Wendepunkt vorhanden ist. Dz.

Annuaire pour l'an 1912 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris: Gauthier-Villars. VI + 692 + 48 + 34 + 43 S. 16mo.

Inhalt: die regelmäßigen astronomischen Daten, physikalische und chemische Konstanten. — G. Bigourdan: Die mittlere Temperatur der verschiedenen Teile Frankreichs. — P. Hatt: Angaben über die Methode der kleinsten Quadrate. — Liste der Mitglieder, Inhaltsverzeichnis.

Unter dem 9. März 1911 ist das französische Gesetz über die Regulierung der Stunde für Frankreich erlassen: „Die gesetzliche Stunde in Frankreich und

in Algerien ist die Stunde nach mittlerer Pariser Zeit, verzögert um 9 Minuten 21 Sekunden.“ Dies entspricht den Stundenzonen der sonstigen Länder. Mit Anwendung dieses Gesetzes liefert nun der Annuaire die Stunden für Aufgang, Untergang, Meridiandurchgang von Sonne, Mond, Planeten nach der gesetzlichen Zeit. Ebenso für die Sonnen- und Mondfinsternisse, Sternbedeckungen, Verfinsterungen der Jupitertrabanten, sonstige Phänomene, Gezeiten, Durchgang des Polarsternes durch den Meridian. Die gesetzliche Zeit wird, um Mitternacht beginnend, von 0^h bis 24^h gezählt. Lp.

L. F. J. Gardès. La réforme du calendrier russe. Assoc. Franç. Toulouse **39**, 1-9.

Ein ausgearbeiteter Plan, um den russischen (alten julianischen) Kalender allmählich in den Gregorianischen überzuführen. Sechzehn Verbesserungen, die von 1912 bis 1972 zu machen sind, genügen zur unmerklichen Hinüberleitung. Lp.

A. Fraenkel. Le calcul de la date de pâques. Scientia **9**, 435-439.

Angabe der Fraenkelschen Osterformel und ihre Beziehungen zu der alten Formel von Gauß. Dz.

Ch. Galissot. Sur l'absorption sélective de l'atmosphère. C. R. **152**, 569-571.

Photometrische Messungen der Absorption von Licht verschiedener Wellenlänge durch die Luft und ihre Diskussion, ausgeführt an Spektren von Fixsternen in 4° bis 88° Zenitdistanz. Dz.

K. Scheel. Über Längenänderungen von Mauerwerk in Abhängigkeit von der Zeit. Astr. Nachr. **189**, 229-234.

Durch von Repsold angeregte Versuche in der phys.-techn. Reichsanstalt mit kleinen Probepfeilern, die im Jahre 1904 begonnen haben und bis in das laufende Jahr (1911) fortgesetzt worden sind, hat sich ergeben, daß all Pfeiler gewachsen sind und noch wachsen. Dz.

E Guyou. Résolution des problèmes de hauteur à la mer par la réduction à l'équateur. Nouvelles tables de navigation. C. R. **152**, 1805-1808.

Erklärung der Prinzipien, nach denen diese neuen Tafeln eingerichtet sind. Verf. gibt die Genauigkeit derselben auf etwa 0,1′ an. Dz.

T. J. J. SEE. The evolution of the starry heavens. Popular Astronomy 19, 34 S.

Grundzüge einer neuen Kosmogonie, die sich wesentlich von der alten Kant-Laplaceschen unterscheidet. Die Planeten sollen sich nicht von der Sonne und die Monde nicht von den Planeten losgelöst haben, sondern Sonne, Planeten und Monde sollen unabhängig voneinander aus dem planetarischen Nebel entstanden sein, von dem die Kometen noch der übriggebliebene Rest sind. Dabei hat nicht nur die Gravitation mitgewirkt, sondern auch der Einfluß des widerstehenden Mittels. Im besonderen seien die Monde von den Planeten „eingefangen" worden.

Neben der Anziehung gebe es auch eine Abstoßung, durch welche kosmische Massen wieder in den Raum zerstreut werden, usw. Dz.

CH. ANDRÉ. Sur la cosmogonie de Laplace. C. R. 153, 752-753.

Polemik gegen die Gegner der Laplaceschen Theorie, besonders gegen J. J. See, der das „Babinetsche Kriterium" herangezogen hat, um diese Theorie zu stürzen. Dz.

H. SEELIGER. Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem. Münch. Ber. 41, 413-461.

Als „schematisches Sternsystem" bezeichnet der Verf. dasjenige, bei welchem auch die Abhängigkeit von der galaktischen Breite außer Betracht bleibt. Unter Berufung auf frühere Arbeiten des Verf. über die räumliche Verteilung der Sterne, deren Tendenz von mancher Seite nicht richtig beurteilt worden sei, werden allgemeine Betrachtungen über die Häufigkeitsfunktion der absoluten Leuchtkraft i angestellt, die aus den durch Abzählung zu findenden Zahlen A_m der Sterne von der Größenklasse m zu ermitteln ist, ebenso wie eine mit der Sterndichte zusammenhängende Funktion Δ. Die entsprechenden Integralgleichungen sind in erster Annäherung leicht zu integrieren.

In einem zweiten Artikel geht dann Verf. auf die numerische Darstellung der „Kapteynschen Parallaxen" ein, die einen hypothetischen Charakter tragen. Es zeigt sich, daß dadurch die Dichtigkeitsverteilung, wie sie vom Verf. im Jahre 1898 dargelegt worden war, nicht wesentlich geändert wird.

Schließlich wird der Einfluß der Absorption untersucht, sowohl unter der Annahme, daß ihr Koeffizient der Sterndichte proportional ist, als auch unter der Annahme, daß derselbe konstant ist. In beiden Fällen ändert die Absorption die Größenklasse selbst an den Grenzen des Sternsystems nur wenig, im ersteren Falle um 0,34, im letzteren um 0,27 der Einheit.

Bei der noch unbefriedigenden Kenntnis der Anzahl der Sterne der höheren Größenklassen sind die numerischen, in Tabellen niedergelegten Ergebnisse nur von beschränkter Genauigkeit. Sie zeigen aber schon jetzt bemerkenswerte Übereinstimmung untereinander und geben das erste von Hypothesen freie Bild über die Verteilung der Sterne. Dz.

C. Nordmann. Sur les diamètres effectifs des étoiles. C. R. 152, 73-74.

Nach einer Formel des Verf. (C. R. 151, 794, 1910) lassen sich die wahren Durchmesser der Fixsterne berechnen aus ihrer Parallaxe, ihrer photometrischen Größe und ihrer Helligkeit.

Verf. wendet dies auf 10 Fixsterne von gemessener Parallaxe an und findet, den Sonnendurchmesser = 1 gesetzt, z. B. den Durchmesser des Sirius = 1,63 und des Aldebaran = 13,50. Dz.

R. S. Dugan. Photometric researches. The Algol-system *RT* Persei. Princeton Univ. 1, 47 S. (Contributions from the Princeton University Observatory.)

Zusammenstellung der photometrischen Messungen des Veränderlichen *RT* vom Algol-Typus.

Ableitung der wahrscheinlichen Bahnelemente und Vergleichung mit den beobachteten Helligkeitsänderungen. Dz.

K. Bohlin. Note sur le problème des deux corps et sur une intégration nouvelle dans le problème des trois corps. Bull. Astron. 28, 113-119.

Wenn man in die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = 0$$

an Stelle von x, y, t drei andere Veränderliche ξ, η, u durch die Substitutionen:

$$\xi = \sqrt{\frac{x+iy}{a}}; \quad \eta = \sqrt{\frac{x-iy}{a}}; \quad a^{-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{r}{a}\,du = \xi\eta\,du$$

einführt, so ergibt sich bei passender Wahl von a (große Halbachse):

$$\frac{d^2\xi}{du^2} + \tfrac{1}{4}\xi = 0, \quad \frac{d^2\eta}{du^2} + \tfrac{1}{4}\eta = 0.$$

Diese merkwürdige Umformung, in welcher u, wie sich zeigt, die exzentrische Anomalie ist, ist eine überraschende Entdeckung in der so viel durchforschten Keplerschen Bewegung. Sie läßt die alten Formeln in neuem Lichte erscheinen.

Die ferner im Titel genannte neue Integration ist nur formal eine solche. Sie geht von der Lagrangeschen Gleichung aus:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2} + \frac{r_3^2}{m_3}\right) = M\left(\frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r_2} + \frac{1}{m_3 r_3}\right) + h.$$

Verf. setzt hier, wie oben:

$$n_1\,dt = \frac{r_1}{a_1}\,du, \quad n_2\,dt = \frac{r_2}{a_2}\,dv, \quad n_3\,dt = \frac{r_3}{a_3}\,dw$$

und integriert dann, da obige Gleichung nach Multiplikation mit dt der Form nach ein exaktes Differential links und rechts ergibt.

Doch die Differentialausdrücke $r_1 du, r_2 dv, r_3 dw$ sind nicht exakt, und so ist die „intégration nouvelle", an die der Verf. weitere Folgerungen knüpft, kein wirkliches neues Integral des reduzierten Dreikörperproblems. Dz.

F. Bernstein. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem. Math. Ann. **71**, 417-439.

P. Bohl hat gezeigt, ob und wann für $n = 3$ die säkularen Glieder eine „mittlere" Bewegung auch dann ergeben, wenn keiner der drei Koeffizienten absolut größer ist als die Summe der absoluten Werte der beiden andern und auch die Differenzen der g nicht kommensurabel sind (J. für Math. **135**; F. d. M. **40**, 1005, 1909). Verf. beweist nun, daß die Bohlschen Fälle der Existenz einer mittleren Bewegung eine sogenannte „Nullmenge" ausmachen oder die „geometrische" Wahrscheinlichkeit hierfür im Sinne der Mengenlehre $= 0$ ist.

„Damit ist das von Lagrange gestellte Problem für $n = 3$ vollständig erledigt." Dz.

H. Happel. Über die Lösungen beim Dreikörperproblem in der Nähe der Librationszentra. Math. Ann. **71**, 404-416.

Vorausgesetzt wird der Jacobische Fall und ein Librationszentrum auf der Geraden durch die beiden anziehenden Punkte (nach Lagrange). Verf. gibt erst die Lösung an unter Einschränkung auf die erste Potenz des Abstandes vom Librationszentrum und verbessert dann diese Lösung in üblicher Weise durch Hinzunahme der zweiten Potenz. Periodische Lösungen.

Numerische Beispiele im Anschluß an Darwins Bahnbestimmungen. Zusammenhang mit dem Fall, daß die Bahn das Librationszentrum und einen der anziehenden Punkte einschließt. Dz.

H. Buchholz. Neue Methode zur Ermittelung der Hauptstörungen der kritischen Planeten. Astr. Nachr. **184**, 289-302 (1910).

Unter Zugrundelegung der Arbeiten Gyldéns und im Anschluß an frühere Untersuchungen des Verf. über die Bewegung „kritischer" Planeten, wie z. B. solche vom Hilda-Typus, gibt Verf. eine neue Methode an, wie man der Schwierigkeit der „kleinen" Divisoren Herr werden kann. Dz.

T. Levi-Civita. Sur les équations à coefficients périodiques et sur le moyen du noeud lunaire. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 28, 325-376.

Vorgelegt sei das System:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y,$$

in welchem x und y Koordinaten eines Punktes P und die a Funktionen von mit derselben Periode T bedeuten. Verf. stellt sich die Aufgabe, zu erforschen, ob der Richtungswinkel von OP eine „asymptotisch" gleichförmige Bewegung hat, d. h. ob $\vartheta = \omega t + \alpha$ sei, wo ω konstant und α endlich bleibe auch für $\lim t = \infty$.

Verf. wendet die Ergebnisse dann auf die Bewegung der Mondknoten an unter vereinfachenden Voraussetzungen (Vernachlässigung der zweiten Potenzen der Neigung der Mondbahn, der Exzentrizität der Erdbahn usw.).

Zugrunde gelegt wird die Form der Integrale obiger Differentialgleichungen mit zwei „charakteristischen" Exponenten, wie sie Floquet, Poincaré, Charlier und andere entwickelt haben.

Die hier gestellte und gelöste Aufgabe ist verwandt mit derjenigen, welche M. Bohl (J. für Math. **135**, 189-283; F. d. M. **40**, 1005, 1909) behandelt hat. Doch ist der Gang der Untersuchung hier ein ganz anderer, weil es nicht auf die arithmetische Natur der Koeffizienten (Kommensurabilität) ankommt.

Dz.

Nicolau. Sur la variation dans le mouvement de la Lune. C. R. **152**, 675-678.

Schätzung der Größe der auftretenden Koeffizienten $a_{\pm i}$ für große Indizes i nach der Methode von Darboux über sehr große Zahlen. Dz.

Nicolau. Sur la variation dans le mouvement de la Lune. C. R. **153**, 703-704.

Fortsetzung des vorstehend angezeigten Artikels. Ermittlung gewisser Koeffizienten in der Mondtheorie und ihrer Größenordnung. Dz.

H. Poincaré. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques professées à la Sorbonne. Rédigées par Henri Vergne. Paris: A. Hermann et Fils. XXV u. 294 S. 8°. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.)

In der Vorrede, die von Poincaré selbst abgefaßt ist, wird eine Übersicht über die wichtigsten Theorien gegeben, die bisher aufgestellt sind, und zuletzt spricht der Verf. seine persönliche Ansicht in den folgenden Worten aus:

„Wenn das Sonnensystem allein vorhanden wäre, so würde ich mich nicht bedenken, der alten Laplaceschen Hypothese den Vorzug zu geben; es bleibt sehr wenig zu tun, wenn man sie neu bearbeiten will. Aber die Mannigfaltigkeit der Sternsysteme nötigt uns, den Rahmen bedeutend zu erweitern. Wenn die Laplacesche Hypothese nicht ganz aufgegeben werden soll, müßte sie so gewandelt werden, daß sie nur noch eine dem Sonnensystem

angepaßte Form einer allgemeinen Hypothese wäre, die auf das ganze Universum Anwendung fände und uns zugleich die verschiedenen Schicksale der Gestirne erklärte, sowie auf welche Art jedes von ihnen sich seinen Platz in dem großen Ganzen verschafft hat.

Betreffs dieses Punktes sind aber die Daten nicht ausreichend, und wir haben noch viel von der Beobachtung zu erwarten. Existieren die beiden Sternströme Kapteyns, und bestehen noch andere? Was sind die Nebelflecke und insbesondere die Spiralnebel? Befinden sie sich in enormen Entfernungen außerhalb der Milchstraße, und sind sie selbst aus der Ferne erschaute Milchstraßen? Oder ist es trotz der Natur ihres Spektrums unmöglich, sie mit Anhäufungen wirklicher Sterne zu vergleichen? Dürfen wir bezüglich der Parallaxe des Andromedanebels die Bohlinsche Messung annehmen nebst dem Schluß, den See daraus zieht, der dieses Objekt des Himmels als zweifellos aus Sonnen gebildet vorstellen möchte, aber von Sonnen in der Größe der Asteroiden, die zwischen Mars und Jupiter kreisen? Ist es angängig, anzunehmen, daß unsere Sonne aus einer der Arten von Nebeln hervorgegangen ist, die wir kennen, z. B. der spiralförmigen oder planetaren oder der ringförmigen? Das ist eine Frage, auf die man die Antwort erst dann zu geben wagen wird, wenn man die Natur, die Entfernung und somit die Dimensionen dieser Körper besser kennt.

Eine für jedermann auffällige Tatsache ist die Spiralform gewisser Nebel; sie tritt viel zu oft auf, als daß man meinen könnte, sie sei zufällig. Man versteht, wie weit jede Theorie, die hiervon absieht, noch von der Vollständigkeit entfernt ist. Keine der Theorien gibt hiervon auf befriedigende Weise Rechenschaft, und die Erklärung, die ich selbst einmal als Zeitvertreib gegeben habe, ist nicht mehr wert als die übrigen. Wir können also nur mit einem Fragezeichen schließen."

Inhalt. I. Hypothese von Kant. II. Hypothese von Laplace. III. Zergliederung der Laplaceschen Hypothese. Arbeiten von Roche. Untersuchung der Stabilität eines Ringes. Bildung der Satelliten. 1. Niveauflächen. 2. Notwendigkeit der Hypothese einer zentralen Verdichtung. 3. Sukzessive Bildung der Ringe. 4. Erörterung der Hypothese einer gleichförmigen Rotation. 5. Untersuchung der Stabilität eines Ringes. Saturnringe. 6. Zerreißung der Laplaceschen Ringe. Bildung der Planeten. 7. Bildung der Satelliten. 8. Einwände gegen die Laplacesche Theorie. IV. Hypothese von H. Faye. V. Hypothese von R. du Ligondès (1897). VI. Hypothese von J. J. See (1910). VII. Theorie von Sir G. H Darwin (1879 bis 1882). 1. Allgemeines. 2. Die Exzentrizitäten und die Neigung der Mondbahn werden als Null vorausgesetzt. 3. Allgemeiner Fall. 4. Beschleunigender Einfluß der Abkühlung. 5. Hypothesen über die Bildung des Mondes. VIII. Über die Quelle der Sonnen- und der Erdwärme. 1. Sonnenwärme. 2. Erdwärme. 3. Adiabatisches Gleichgewicht eines vollkommenen Gases. IX. Theorie von Sir Norman Lockyer (1904 und 1905). X. Theorie von A. Schuster (1903). XI. Theorie von Svante Arrhenius. XII. Die Milchstraße und die Gastheorie. XIII. Bildung der Spiralnebel nach See. XIV. Hypothese von É. Belot.

Die Darstellung ist nicht etwa bloß historisch referierend, auch nicht auf den Standpunkt eines Unterhaltungsbuches für jedermann hinuntergedrückt. Alle Fragen sind mathematisch durchgearbeitet; der Leser muß mit genügen-

den Kenntnissen aus der reinen Mathematik, der mathematischen Physik und der Astronomie ausgerüstet sein, um dem Verf. in seinen Schlüssen folgen zu können, wird dann aber auch, wie aus den sonstigen Schriften des leider zu früh verewigten Verf., auch aus diesem Buche viele Anregungen empfangen. Lp.

É. Belot. Sur la rotation et la constitution du Soleil. Assoc. Franç. Toulouse **39**, 15-19.

Die Formel für die Rotationsdauer T der Planeten um ihre Achse, die der Verf. auf der Tagung zu Clermond-Ferrand gegeben und aus seiner Wirbeltheorie hergeleitet hat (F. d. M. **40**, 1010, 1909), liefert durch eine summarische Anwendung auf die Sonne $T = 22^d$, während die mittlere Dauer ihrer Umdrehung etwa $27^d,5$ ist.

„Der Grund dieser Unstimmigkeit liegt in der Tatsache, daß der mittlere Abstand der Molekeln vom Mittelpunkte der Sonne von ihrer inneren Beschaffenheit abhängt. Trägt man dieser Beschaffenheit Rechnung durch ein Gesetz der Dichten von derselben Form, wie das von E. Roche und M. Lévy auf die Erde angewandte, so findet man durch die erwähnte Formel, daß die mittlere Drehdauer der Sonne zwischen $24^d,6$ (Fall der Homogeneität) und $28^d,5$ (Fall der Dichte Null und der Oberfläche, unendlich im Mittelpunkte) liegen muß. Da die mittlere Drehdauer $27^d,5$ ist, so schließt man, daß die Dichte im Mittelpunkte mindestens zweihundertmal so groß sein muß wie an der Oberfläche der Photosphäre.“ Lp.

C. Störmer. La structure de la couronne du Soleil, dans la théorie d'Arrhenius. C. R. **152**, 571-575.

Die Differentialgleichungen der Bewegungen der Teilchen werden unter Annahme einer elektrischen Ladung der Sonne, eines Lichtdruckes und der Massenanziehung durch die Sonne auf die Form gebracht

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dz}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + b\,\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Die z-Achse ist die Rotationsachse der Sonne, und es bedeuten:

$$U = M\,\frac{z}{r^3},\quad V = -\,\frac{m}{r} \qquad (r = x^2 + y^2 + z^2).$$

Es ergeben sich ohne Mühe zwei Integrale, eines der lebendigen Kraft und eines, das Erweiterung eines Flächenintegrals ist. Mit Benutzung derselben wird das System vereinfacht. Wenn $z = 0$ ist, also das Teilchen sich in der Ebene des Sonnenäquators bewegt, führt die weitere Durchführung auf elliptische Integrale. Dz.

S. Arrhenius. Das Schicksal der Planeten. Leipzig: Ak. Verlagsgesellsch. 55 S. 8°.

Es werden die physikalischen und chemischen Änderungen sowie die Wandlungen der Bodengestalt beschrieben, welche die Planeten, insbesondere die Erde, nach unserer heutigen Kenntnis der Naturgesetze erfahren haben und in Zukunft erfahren werden. Die Lebensbedingungen sind für unseren Planeten seit Jahrmillionen ungewöhnlich günstig, verglichen mit denjenigen, welche die anderen Wandelsterne aufweisen. Doch endlich wird das Weltmeer austrocknen, die Luft verschwinden und die Erde das Schicksal des Mars teilen, der nach allem, was wir wissen, vollständigen Wüstencharakter hat. Dann wird die Venus, welche jetzt Bedingungen unterliegt, wie sie höchst wahrscheinlich früher auf der Erde geherrscht haben, die Führerrolle übernehmen. Dz.

É. Belot. Sur une conclusion inexacte de Laplace dans la théorie des satellites de Jupiter. Assoc. Franç. Toulouse **39**, 13-15.

Laplace hat gesagt: „Am Anfang hat die mittlere Länge des ersten Trabanten minus der dreifachen des zweiten plus der zweifachen des dritten sich sehr wenig von der Peripherie des Halbkreises unterschieden, und dann hat die gegenseitige Anziehung dieser drei Trabanten genügt, um den Unterschied zum Verschwinden zu bringen". Der Verf. meint, die Annahme eines anfänglichen Unterschiedes sei unbegründet; er will dies durch seine kosmogonische Wirbeltheorie beweisen. Lp.

A. Scheller. Die Helligkeit der Mondphasen. Wien. Ber. **120**, 889-921.

Verf. bedient sich photographisch-photometrischer Methoden, die näher beschrieben werden. Vergleichung mit früheren visuellen Helligkeitsmessungen, welche zeigen, daß die „photographische Helligkeit des Vollmondes ungefähr das Zehnfache der visuellen Helligkeit ist. Erstere ist gleich der von 2,41 Hefnerkerzen in 1 m Abstand. Dz.

C. Righi. Kometen und Elektronen. Deutsch von M. Iklé. Leipzig: Akad. Verlagsgesellsch. 64 S. 8°.

Der anregende Vortrag gibt aus Anlaß der neunten Wiederkehr des Halleyschen Kometen die Auffassungen eines Forschers wieder, der aus der Fülle der heutigen Theorien vom Strahlungsdruck, von den Elektronen und Ionen, von der molekularen Beschaffenheit der Materie usw. eine erschöpfende Erklärung der Erscheinungen der Kometen und ihrer Schweife versucht.

In einem Schlußabschnitt wird über die Beobachtungen berichtet, welche man bei dem vermuteten Durchgang der Erde durch den Schweif des Halleyschen Kometen am 19. Mai 1911 angestellt hat. „Diese Berichte sind derartig, daß sie in denen, die sehr hervorragende Wirkungen erwartet hatten, ein Gefühl der Enttäuschung wachrufen werden." Es seien zwar Erscheinungen aufgetreten, die möglicherweise mit diesem Durchgang zusammenhängen, aber durchaus nicht in so ungewöhnlicher Stärke, daß sie nicht auch sonst auftreten könnten. So sei die Sache noch nicht genügend aufgeklärt, um beurteilen zu können, inwiefern die vorgetragenen Ansichten Vertrauen verdienen. Dz.

Weitere Literatur.

E. Belot. L'origine dualiste des mondes. Essai de cosmogonie tourbillonnaire. Paris: Gauthier-Villars. XII u. 280 S. 8°.

A. Bilimowitsch. Einige partikulare Lösungen des Problems der n Körper. Astr. Nachr. **189**, 181-186.

M. Brendel. Theorie der kleinen Planeten. IV. Götting. Abh. N. Folge. 8, Nr. 1. V u. 124 S.

Referat F. d. M. **40**, 1007, 1909.

M. Brendel. Über die Definition instantaner Elemente, nebst Tafeln für (91) Aegina. Astr. Nachr. **187**, 97-108.

Ph. Broch. Höhenberechnung von Meteoren der Perseidenperiode. I. Abteilung. (1823-1858.) Wien. Denkschr. 1911, 38 S.

E. W. Brown. On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies. Monthly Notices **71**, 438-454.

E. W. Brown. On the oscillating orbits about the triangular equilibrium points in the problem of three bodies. Monthly Notices **71**, 492-502.

E. W. Brown. On planetary librations. Astr. Journ. **27**, 25.

E. W. Brown. The relations between Jupiter and the asteroids. Science **33**, 79.

E. W. Brown. On the progress of the new tables of the Moon's motion. Monthly Notices **71**, 639-650.

E. W. Brown. The transformation of the Moon's latitude. Monthly Notices **71**, 651-660.

F. Caldarera. Memoria sul moto dei pianeti. Seconda edizione, migliorata. Palermo: Virzi. 44 S. 4°.

W. F. Carrigan. The long period term in the mean longitude of the Moon with the argument $3J - 8M + 4E$. Astr. Journ. **27**, 26-28.

C. V. L. Charlier. Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems. I, II. Lunds Meddel. **45**, **46**, 21 u. 28 S.

C. V. L. Charlier. Die Lagrangesche Gleichung im Bahnbestimmungsproblem. Lunds Meddel. (2) Nr. **7**, 18 S.

C. V. L. Charlier. Second note on multiple solutions in the determination of orbits from three observations. Monthly Notices **71**, 454-459.

A. A. Clayton. A new system of reckoning the length of lines of latitude and longitude. Pennsboro, W. Virginia: Clayton. 20 S. 8°.

V. E. Denicolini. Della meccanica celeste. (Memoria.) Alessandria: Società poligrafica. 37 S. 8°.

E. Doolittle. The secular perturbations of Mars arising from the action of Jupiter. — The secular perturbations of Mars from the action of Uranus and Neptune. Astr. Journ. **27**, 46-48.

S. Dorgueil. Table nautique. Azimut et hauteur approchée d'un astre quelconque. Paris: Challamel. XVI u. 32 S. 8°.

W. Foerster. Zur Frage des widerstehenden Mittels. Meteorol. Zs. 28, 332-333.

General Index to the Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, volumes LIII to LXX, 1892-1910, together with the general index to illustrations in the memoirs, vol. I to LIX, and the Monthly Notices, vol. I to LXX, 1822-1910; Appendix: List of comets, 1892-1910. London: Royal Astronomical Society. VIII u. 198 S. [Nature 88, 208.]

J. Grossmann. et H. Grossmann. Horlogerie théorique. Avec une préface de E. Caspari. Tome I. 408 S. 8°.

F. W. Henkel. Note on the resisting medium. Journ. Brit. Astr. Assoc. 22, 34-38.

A. F. R. de Horsey (Admiral Sir). Draysonia: being an attempt to explain and popularise the system of the second rotation of the Earth, as discovered by the late major-general A. W. Drayson; also giving the probable date and duration of the last glacial period, and furnishing General Drayson's data, from which any person of ordinary mathematical ability is enabled to calculate the obliquity of the ecliptic, the precession of the equinoxes, and the right ascension and declination of the fixed stars for any year, past, present or future. London: Longmans, Green and Co. X + 76 S. + diagram. 8°. [Nature 88, 71-72.]

A. R. Hinks. Astronomy. Home university library of modern knowledge. London: Williams and Norgate. VI u. 256 S. [Nature 88, 140.]

A. Hnatek. Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1823. Wien. Denkschr. 1911. 91 S.; Astr. Nachr. 188, 365-371.

P. Kirchberger. Zur Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen und umgekehrt auf Grund des Energieprinzips. Poske Zs. 24, 23-24.

F. Koza. Parabolische Kometenbahnen. Progr. Gymn. Königgrätz. 18 S. (Böhmisch.)

A. Lambert. Note sur le passage des anomalies excentriques aux anomalies vraies. Bull. Astron. 28, 337-344.

P. Lowell. On the action of planets upon neighboring particles. Astr. Journ. 26, 171-174.

P. Lowell. Libration and the asteroids. Astr. Journ. 27, 41-46.

B. Lowerison. Star-lore for teachers: Suggestions for the teaching of astronomy by direct observation, experiment, and deduction. Interleaved for notes. London: The Clarion Press. 67 S. [Nature 87, 142.]

W. Marshall. On Hill's differential equation in the theory of perturbations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) 17, 525.

A. F. Möbius. Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper. 11. Aufl. bearb. v. H. Kobold. II. Tl. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Leipzig: G. J. Göschen. 122 S. (Sammlung Göschen.) 15 Fig., 2 Sternkarten.

F. R. Moulton. Periodic orbits of superior planets. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **17**, 528.

G. Naccari. Astronomia nautica. 2a edizione, riveduta ed ampliata. Milano: Hoepli. XIV u. 348 S. 24mo.

Newcomb-Engelmann. Populäre Astronomie. 4. Aufl. Herausgegeb. v. P. Kempf. Leipzig: Engelmann. XVI u. 772 S. Lex. 8°.

S. Oppenheim. Über die Eigenbewegungen der Fixsterne. Kritik der Zweischwarmhypothese. Wien. Denkschr. 1911. 27 S.

S. Oppenheim. Probleme der modernen Astronomie. Leipzig: B. G. Teubner. 156 S. 8° (Aus Natur und Geisteswelt, 355).

G. Pes. Nuova navigazione astronomica. Le rette di posizione, teoria, applicazioni. Genova. 188 + 171 S. 4°.

H. Poincaré. Remarque sur l'hypothèse de Laplace. Bull. Astron. **28**, 251-266.

H. Poincaré. Die neue Mechanik. Himmel und Erde 1911. Leipzig: Teubner. 22 S. Lex. 8°.

C. Popovici. Méthode abrégée pour la correction des orbites. Bull. Astron. **28**, 33-41.

C. Popovici. Sur les corrections abrégées d'orbites. Bull. Astron. **28**, 76-87.

F. E. Ross. New computation of the inequality in the Moon's longitude with Jupiter's longitude as argument. Astr. Nachr. **189**, 15.

H. Samter. Über die allgemeinen Störungen des Planeten (433) Eros. Astr. Nachr. **188**, 153-182.

G. M. Searle. A method of computing a parabolic orbit. Astr. Journ. **27**, 29-31.

H. Seeliger. Über den Einfluß des Lichtdrucks auf die Bewegung planetarischer Körper. Astron. Nachr. **187**, 417-422.

W. de Sitter. On the bearing of the principle of relativity on gravitational astronomy. Monthly Notices **71**, 388-415.

E. Strömgren. Theorie der Störungen sonnennaher Kometen, angewandt auf den Kometen 1882 II. Astron. Nachr. **189**, 261-274.

J. Trousset. Sur l'équation de Kepler. Bull. Astron. **28**, 389-390.

S. Tscherny. Der paradoxe Fall der Bahnbestimmung des Kometen 1910 a nach der Methode von Gauß. Astron. Nachr. **187**, 95.

S. Tscherny. Klassifikation der kleinen Größen, die bei der Bahnbestimmung der Himmelskörper vorkommen. Astron. Nachr. **189**, 135-138.

K. Vodicka. Über geometrische und physikalische Methoden zur Bestimmung der Sonnenparallaxe. Časopis **40**, 195-213, 305-318, 473-484, 585-590. (Böhmisch.)

R. Vogel. Über die Unmöglichkeit dreier Lösungen bei einer theoretisch vollständigen Bestimmung einer parabolischen Bahn. Astron. Nachr. **188**, 105-114.

R. Weatherhead. The star pocket-book; or, how to find our way at night by the stars. A simple manual for the use of soldiers, travellers, and other landsmen. With a foreword by Sir Robert Ball. With 15 star plans. London: Longmans, Green and Co., 80 S. [Nature **87**, 142-143].

E. Weber. Die Stellung der Mondsichel als Mittel zur Bestimmung der geographischen Breite. Poske Zs. **24**, 25-26.

M. Koppe. Die Stellung der Mondsichel. Poske Zs. **24**, 160-162.

H. Meyer. Die Stellung der Mondsichel zum Horizont. Poske Zs. **24**, 351-353.

A. Wilkens. Über die langperiodischen Veränderungen der Bahnform und Bahnlage der kritischen Planeten. Astron. Nachr. **188**, 33-48.

G. Wutke. Was entsteht aus den Bewegungen der Erde? Erklärung der Naturerscheinungen auf einer einheitlichen Grundlage. Berlin (Selbstverlag). 48 S. 8⁰.

G. Wutke. Kann die Erde erkalten? Die Gestirne als Kraftquelle und die Ursachen der Schwerkraft. Eine neue Theorie. 2. verb. Aufl. Berlin Selbstverlag). 30 S. 8⁰.

H. v. Zeipel. Note sur le calcul des coefficients $\gamma_j^{n,i}$ de Gyldén. Ark. för Mat., Astr. och Fys. **7**, Nr. 3, 4 S.

H. v. Zeipel. Sur les limites de convergence des coefficients du développement de la fonction perturbatrice. Ark. för Mat., Astr. och Fys. **6**, Nr. 33, 44 S.

Kapitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

H. J. Klein. Mathematische Geographie. Dritte verbesserte Auflage. Leipzig: J. J. Weber. 261 S. 8⁰. 114 Textfig.

In dieser dritten, verbesserten Auflage sind Plan und Tendenz unverändert beibehalten worden; doch werden neuere Forschungsergebnisse berücksichtigt. Auch in der Form der Darstellung ist manches geändert worden.

Der Verf., dessen Verdienste um Verbreitung astronomisch-geographischer Kenntnisse unbestritten sind, gibt hier eine allgemein verständliche Darstellung der mathematischen Geographie, welche in sehr geeigneter Form alles bietet, was man ohne Voraussetzung besonderer Fachstudien bieten kann. Der Text wird von 114 sorgfältig ausgeführten Abbildungen begleitet. Dz.

Ch. Lallemand. Sur les déformations résultant du mode de construction de la Carte internationale du monde au millionième. C. R. 153, 559-567.

Diese Karte im Maßstab 1:1000000, deren Herstellung durch eine internationale Konferenz in London im November 1909 beschlossen worden ist, soll unter Berücksichtigung der Abplattung in 60 Blättern erscheinen, derart, daß jedes Blatt einen Teil der Erdoberfläche zwischen zwei um 6^0 getrennten Meridianen wiedergibt. Die Art der Abbildung ist so gewählt, daß die Verzerrungen in jedem Blatt möglichst klein werden. Verf. gibt das Verfahren an und weist nach, daß „les erreurs, linéaires ou angulaires, de la future Carte mondiale sont de beaucoup inférieures à celles qu'occasionneront les déformations hygrométriques du papier même des feuilles". Dz.

M. Vahl. De vigtigste Kortprojektioner. (Die wichtigsten Kartenprojektionen.) Nyt Tidsskr. for Math. 22 A, 33-64.

Eine elementare Darstellung. P. H.

G. L. Ortiz. Arco de meridiano eliptica. Rev. Soc. Mat. Exp. 1, 43-53.

Unter der Annahme, daß die Erde ein Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Exzentrizität ist, werden für einige geographische Breiten die zugehörigen Krümmungsradien und -bogen bestimmt. Op.

W. Trabert. Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. X u. 662 S. gr. 8^0. Mit 149 Fig. im Text u. einer Tafel.

„Sollte es nicht möglich sein, eine Weltbeschreibung vom Standpunkte des Physikers aus zu geben, insoweit als sie heute schon erreichbar ist; kein Gemälde der in der Natur vorhandenen Formen, sondern allein einen Überblick über das mit der Zeit Veränderliche, über das Geschehen in der Natur? Also nicht ein Weltbild soll geliefert werden, sondern ein Bild des Weltgeschehens. So aufgefaßt, wird sich eine Physik des Kosmos schon ihrer ganzen Anlage nach von den vorhandenen Lehrbüchern der kosmischen Physik unterscheiden müssen. Sie wird, von der Erde, ihrer Gestalt und ihrer Stellung im Weltall ausgehend, der Reihe nach die Bewegungserscheinungen im Weltall, das Gleichgewicht auf der Erde und seine Störungen zu betrachten haben; sie wird weiter den Vorgang der Strahlung und seine Beeinflussung durch eine Atmosphäre, dann den Energieaustausch und die Energieverwandlungen, schließlich die Entwicklung des Weltalls zu erörtern haben. Sie wird zu verknüpfen trachten, was seinem Wesen nach zusammengehört, gleichgültig, wo wir es im Kosmos finden. . . . Das vorliegende Lehrbuch soll die Physik des Kosmos als Lehre vom Zustande und den Zustandsänderungen des Weltalls behandeln, dieses aufgefaßt als Kosmos, d. h. als organisches Ganzes, beherrscht von einheit-

lichen Gesetzen. Wollten ja auch die Pythagoreer, auf welche der Ausdruck „Kosmos“ zurückgeht, mit diesem Worte ausdrücken, daß das Universum ein nach mathematischen Gesetzen gebautes Ganzes voll Ordnung und Symmetrie sei. Wenn aber die Einheit des Universums besonders hervortreten soll, dann ist von vornherein das vorliegende Lehrbuch auf einen gewissen Umfang beschränkt; es hat Einzelheiten gewisser Disziplinen nur insoweit und nur in dem Zusammenhange zu bringen, als sie Anwendungen irgendeines bestimmten physikalischen Gesetzes sind.“

Diese Stellen aus dem Vorwort des Buches zeichnen den Plan des Ganzen. Die nachfolgenden Überschriften der fünf Abschnitte und 26 Kapitel mögen zur Übersicht des gegebenen Inhaltes dienen.

Einleitung. Die Grundlagen und Grundbegriffe der physikalischen Weltbetrachtung.

I. Erste Orientierung über die Gestalt der Erde und ihre Stellung im Weltall. 1. Die Kugelgestalt der Erde. 2. Erste Orientierung auf der Himmelskugel. 3. Zeit- und Ortsbestimmung auf der Erde. 4. Astronomische Erdmessung. 5. Die Messung kosmischer Distanzen. 6. Der Bau des Fixsternsystems. 7. Rückblick auf den ersten Abschnitt.

II. Die Bewegungserscheinungen im Weltall. A. Die Bewegungen der Himmelskörper. 8. Die Rotationsbewegung im Weltall. 9. Die Zentralbewegung im Sonnensystem. 10. Die Eigenbewegung der Fixsterne und des Sonnensystems. 11. Die Bewegungen der Rotationsachse der Erde. 12. Das Gravitationsgesetz. B. Das Gleichgewicht auf der Erdoberfläche und seine Störungen. 13. Die Massenverteilung im Erdkörper und die Erdgestalt. 14. Die schwingenden Bewegungen auf der Erdoberfläche. a) Gravitationswellen. b) Elastische Schwingungen des Erdkörpers (Erdbeben). 15. Rückblick auf den zweiten Abschnitt.

III. Der Strahlungsvorgang und seine Beeinflussung durch die Atmosphäre. 16. Allgemeine Eigenschaften der Strahlung. 17. Beeinflussung des Strahlenweges durch eine Atmosphäre. 18. Beeinflussung der Intensität und Qualität der Strahlung durch unsere Atmosphäre. 19. Beeinflussung der Strahlung eines Himmelskörpers durch seine eigene Atmosphäre (Spektralanalyse). 20. Rückblick auf den dritten Abschnitt.

IV. Der Energieaustauch und die Energieverwandlungen im Weltall. 21. Der Wärmehaushalt unserer Erde. 22. Wirkungen der Sonnenwärme auf der Erdoberfläche. a) Bewegungen auf der Erdoberfläche. b) Die klimatischen Unterschiede auf der Erde. 23. Die Wirkungen des Abkühlungsprozesses der Erde. 24. Umsatz mechanischer Energie in Wärme. 25. Elektrische und magnetische Vorgänge auf der Erde. 26. Rückblick auf den vierten Abschnitt.

V. Die Entwicklung des Weltalls. 27. Die Entwicklung der Glieder unseres Systems. 28. Die Entwicklung der Fixsterne. 29. Rückblick auf den fünften Abschnitt.

Schluß. Das Weltbild des naiven Naturbeschauers und des modernen Naturbeobachters.

„Wissenschaft wird ermöglicht durch einen äußeren und einen inneren Faktor: Die Tatsache der Beständigkeit in der Außenwelt und die Tatsache der Assoziation in der Innenwelt. Es ist nur dort möglich, eine Ordnung zu finden, wo eine solche vorliegt, und die Tatsache, daß wir ein vollständiges

übersichtliches Inventar der Tatsachen eines Gebietes herstellen können, liefert uns den Beweis dafür, daß die Welt wirklich ein einheitliches Ganzes, daß sie ein Kosmos ist.“ Lp.

M. P. Rudzki. Physik der Erde. Leipzig: Chr. Herm. Tauchnitz. VIII u. 584 S. 8°. Mit 60 Abb. im Text und fünf Taf.

In 14 Kapiteln werden folgende Gegenstände behandelt: I. Gestalt der Erde. II. Funktionen von L a m é. Bestimmung des Erdellipsoids aus Schweremessungen. Die Schwerkraft und ihre Anomalien. III. Bestimmung der Gestalt der Erde aus geodätischen Messungen. IV. Dichte und Temperatur des Erdinnern. Hypothese über die Konstitution der Erde. V. Seismologie. VI. Deformationen. VII. Morphologie der Ozeane. Meerwasser. VIII. Wellen. IX. Stehende Schwingungen. X. Die Gezeiten. XI. Strömungen. XII. Die Flüsse. XIII. Eis und Gletscher. XIV. Die Eiszeit. — Es folgen Berichtigungen, Autorenverzeichnis, Sachregister.

Das Buch ist eine Übersetzung der 1909 von der Akademie der Wissenschaften zu Krakau polnisch herausgegebenen „Fizyka ziemi“. Die Kenntnis der Elemente der Differential- und Integralrechnung wird vorausgesetzt. Wie die vorstehende Inhaltsangabe zeigt, ist weder die Lehre vom Erdmagnetismus aufgenommen, noch die Statik und Dynamik der Atmosphäre. Hierüber sagt der Verf., er sei der Meinung, daß der Zeitpunkt, ein Handbuch der Statik und Dynamik der Atmosphäre zu schreiben, noch nicht gekommen ist. Dank der Erforschung der höheren Schichten der Atmosphäre habe sich der Kreis unserer Kenntnisse sehr erweitert; dadurch sei aber manche alte Lehre unhaltbar geworden, während neue erst im Werden begriffen seien. Auch alle optischen Erscheinungen in der Atmosphäre sind unberücksichtigt geblieben. Ebenso ist aus dem Fehlen des Namens F o u c a u l t im Autorenverzeichnis zu ersehen, daß die durch die Rotation der Erde bedingten Erscheinungen nur zum geringen Teil erwähnt sind. Innerhalb des gewählten Rahmens ist das Werk ein zuverlässiger Führer, der auf die besten Quellen zu weiterer Vertiefung verweist und in sachgemäßer Darstellung weitgehende Ansprüche befriedigt.
Lp.

A. Wegener. Thermodynamik der Atmosphäre. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. VIII u. 331 S. gr. 8°. Mit 143 Abb. im Text und auf 17 Taf.

I. Einleitung. 1. Die kosmische Stellung der Erdatmosphäre. 2. Der Querschnitt der Atmosphäre. 3. Die Zusammensetzung der Luft am Erdboden. II. Allgemeine Thermodynamik der idealen Gase. 4. Die Gesetze der idealen Gase. 5. Die Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe. 6. Die Zusammensetzung der Luft in großen Höhen. III. Allgemeine Thermodynamik der realen Gase. 7. Verflüssigung bei realen Gasen. 8. Die feste Phase des Wassers. IV. Spezielle Thermodynamik der adiabatischen Prozesse. 9. Definitionen und Hülfssätze aus der Wärmetheorie. 10. Adiabatische Zustandsänderungen der idealen Gase. 11. Die Gleichgewichtsbedingungen der Atmosphäre. 12. Adiabatische Zustandsänderungen der Luft bei Kondensation. 13. Die mittlere Temperaturverteilung in der Vertikale. 14. Die Inversionen. 15. Die Stratosphäre.

V. Physik der Wolken. 16. Allgemeine Morphologie der Wolken. 17. Spezielle Struktur der Wasserwolken. 18. Spezielle Struktur der Eiswolken.

Die „Thermodynamik der Atmosphäre" ist als erster Teil einer vollständigen Physik der Atmosphäre gedacht. Wenngleich eine einheitliche Bearbeitung aller hierher gehörigen Gebiete dringend zu wünschen ist, so ist das Bedürfnis nirgends so groß wie bei der Thermodynamik. „Denn die Aerologie, deren Ergebnisse hier in erster Linie behandelt werden, bedarf heute, wo ihre Forschungsmethoden nach dem ersten mächtigen Aufschwunge in ruhigere Bahnen geglitten sind und die Beobachtungsergebnisse sich häufen, mehr als alle anderen Zweige der Meteorologie einer Durchdringung mit theoretischen, physikalischen Ideen." Der Plan des Buches ist bei einer zusammenhängenden Durcharbeitung des Stoffes für eine im Sommer 1909 an der Universität zu Marburg gehaltenen Vorlesung entstanden. Der Verf. wagt also gerade das, was Rudzki in dem vorstehend angezeigten Buche als verfrüht betrachtet. Nun hat zwar F. M. Exner in seiner Rezension des Werkes (Meteorol. Zs. 28, 589-590) manche Mängel bezeichnet, die nach dem Zweifel von Rudzki erwartet werden konnten, hat aber auch dafür viele verdienstvolle Eigenschaften der Schrift anerkannt. Das Buch enthält „manche wohlfundierte Ergebnisse der Wissenschaft, die, jüngeren Datums, bisher noch in keinem der gebräuchlichen Lehrbücher Platz gefunden haben, wie z. B. der Dampfdruck über Tropfen und die Kondensation von Ionen, das Gold-Humphreyssche Strahlungsgleichgewicht der Stratosphäre, die Fallgeschwindigkeit der Tropfen und die Bildung der Wolkenelemente u. a. Ist auch manches hiervon recht kurz behandelt, so wird man doch dankbar sein, diese Gegenstände nunmehr in einem Lehrbuche nachschlagen zu können." Danach ist wohl die von Exner am Schluß seiner Anzeige ausgesprochene Hoffnung aussichtsvoll, daß in einer neuen Auflage des verdienstlichen Buches das Material gesichteter, mancher Schönheitsfehler beseitigt sein wird. Lp.

A. E. H. Love. Some problems of geodynamics. Being an essay to which the Adams prize in the University of Cambridge was adjudged in 1911 Cambridge: University Press. XXVII u. 190 S. 4⁰.

Der Gegenstand für den Adams-Preis von 1910 war: „Some investigation connected with the physical constitution or motion of the Earth", und eine der Fragen, deren weitere Behandlung gewünscht wurde, war: „The stresses in continents and mountains, when the supposition of the existence of the isostatic layer is accepted; the propagation of seismic waves". Schon 1909 deutete Love die Modifikationen früherer Theorien über die Wirkungen an, welche durch die Kompressibilität in einem Körper von planetischen Dimensionen erzeugt werden können; diese bilden tatsächlich die Grundlage der Untersuchungen der gegenwärtigen Abhandlung in Kap. 7 bis 10. Später wurden die Untersuchungen über den Einfluß der Erdrotation auf Ebbe und Flut begonnen.

Vorangeht ein „Abstract" (S. XI-XXVII) der folgenden Untersuchung. Kap. 1 (S. 1-5): The distribution of land and water. Kap. II (S. 6-37): The problem of the isostatic support of the continents. Kap. III (S. 38-48): The

problem of the isostatic support of the mountains. Kap. IV (S. 49-57): General theory of earth tides. Kap. V (S. 58-74): Effect of inertia on earth tides. Kap. VI (S. 75-88): Effect of the spheroidal figure of the Earth on earth tides. Kap. VII (S. 89-104): General theory of a gravitating compressible planet. Kap. VIII (S. 105-110): Effect of compressibility on earth tides. Kap. IX (S. 111-125): The problem of gravitational instability. Kap. X (S. 126-143): Vibrations of a gravitating compressible planet. Kap. XI (S. 144-178): Theory of the propagation of seismic waves. — Register (S. 179-180). J.

J. Prescott. On the rigidity of the Earth. Phil. Mag. (6) 22, 481-505.

Die Dichte der Erde wird nicht konstant gesetzt, sondern das eine Mal $= 10 - 7{,}5 \cdot r^2/a^2$, das andere Mal $= 14{,}5 - 12 r/a$ genommen, wo a den äußeren Erdradius, r den Radius an der betrachteten Stelle im Innern der Kruste bedeutet. Mit diesen und einigen weiteren Annahmen werden die Differentialgleichungen in numerischen Werten integriert und die errechneten Werte mit den Beobachtungen verglichen. Br.

Ch. Chree. The deformation of rocks under tidal loads. Nature 87, 70-71.

Durch einen gleichbetitelten Brief von J. Milne in Nature 87, 44 über bezügliche Beobachtungen angeregt, deutet der Verf. an, wie der Gegenstand mathematisch zu behandeln sei, und verweist auf Arbeiten von Boussinesq sowie auf eine eigene frühere Veröffentlichung (F. d. M. 28, 860, 1897). Lp.

G. H. Darwin (Sir). The tides and kindred phenomena in the solar system. The substance of lectures delivered in 1897 at the Lowell Institute, Boston, Massachusetts. Third edition. London: John Murray. XXIV u. 437 S.

Dritte Auflage dieses klassischen Buches, dessen erste Auflage 1898 erschien (F. d. M. **29**, 819, 1898). In dieser Auflage sind hinzugefügt: einige Noten zu den früheren Kapiteln und die drei letzten Kapitel (Theorie der Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeit, Anwendung der Theorie auf den Ursprung der Doppelsterne, die Nebularhypothesen von Laplace u. a.). Vgl. Nature 88, 35-36. J.

Sir G. H. Darwin. Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem Autorisierte deutsche Ausgabe nach der dritten englischen Auflage von Agnes Pockels. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer und 52 Illustrationen im Text. Zweite Auflage. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. XXIV u. 420 S. 8⁰. (Wissenschaft und Hypothese V.)

Vgl. die Anzeige der ersten deutschen Ausgabe F. d. M. **33**, 963, 1902. Über die Änderungen der neuen Auflage berichtet das Vorwort des Verf.: „Es ist kaum möglich, ein altes Buch so umzuarbeiten, daß ein neues daraus wird; auch ist es vielleicht nicht einmal wünschenswert, dies zu versuchen, da gerade in dem Verfolgen der allmählichen Entwicklung des wissenschaftlichen Gedankenganges ein gewisser Reiz liegt. Daher schien mir die beste Art, dem Buche die neueren Fortschritte der Wissenschaft einzuverleiben, die zu sein, daß ich den verschiedenen Kapiteln Nachträge anfügte und in dem ursprünglichen Text nur geringfügige Änderungen vornahm. Wenn der Leser das Inhaltsverzeichnis nachschlägt, wird er finden, daß solche Nachträge zu acht der ersten siebzehn Kapiteln gemacht worden sind. Der Schluß des Buches von dem bisherigen 18. Kapitel an ist dagegen gänzlich umgestellt und umgeschrieben worden, da der neu hinzugekommene Stoff zu umfangreich war, als daß er sich hätte zweckmäßig in Nachträgen anbringen lassen. Das Kapitel über die Saturnringe, das früher das letzte des Buches war, ist nicht viel verändert, aber umnumeriert als XVIII. Die drei übrigen Kapitel sind größtenteils neu, obwohl sie dieselben Stoffe behandeln wie die früheren Kapitel XVIII u. XIX. Sie enthalten den größten Teil eines Artikels, welchen ich für den „Darwin and Modern Science" betitelten Band (Cambridge University Press 1908) geschrieben habe, und einen anderen, der in der „Internationalen Wochenschrift" vom 2. Juli 1909 erschienen ist." Lp.

E. M. Wedderburn and A. M. Williams. The temperature seiche. Part I: Temperature observations in the Madüsee, Pomerania. Part II: Hydrodynamical theory of temperature oscillations in lakes. Part III: Calculation of the period of the temperature seiche in the Madüsee. By E. M. Wedderburn. Part IV: Experimental verification of the hydrodynamical theory of temperature seiches, by E. M Wedderburn and A. M. Williams. Edinb. Roy. Soc. Trans. **47**, 619-642. Abstract in Edinb. Roy. Soc. Proc. **31**, 257-258.

Im II. Teil wird eine Annäherung an die wirklichen Bedingungen in einem See erhalten, indem man voraussetzt, daß bis zu einer Tiefe h' die Dichtigkeit des Wassers gleichmäßig ϱ' ist, und danach gleichmäßig ϱ. Wenn der Anfangspunkt in der Tiefe h' ist, so hängen die Temperaturschwankungen von der Gleichung

$$\frac{d^2P}{dv^2}+\frac{n^2}{g\Sigma(v)(\varrho-\varrho')}P=0$$

ab, wo

$$\Sigma(v)=b(x)\Big/\left(\frac{\varrho}{A(x)}+\frac{\varrho'}{A'(x)}\right)$$

und $b(x)$ die Breite der Trennungsfläche im Abstand x vom Anfangspunkt, $A(x)$ die Fläche eines Querschnitts des Teiles des Sees unter der Trennungs-

fläche und $A'(x)$ oberhalb der Trennungsfläche (vgl. auch G. Chrystal, Edinb. Roy. Soc. Trans. **41**, 599). Experimentelle Untersuchungen im Laboratorium bestätigen diese Theorie. J.

Ad. Schmidt. Zur Frage der Zerlegung des erdmagnetischen Feldes. Meteorol. Zs. 28, 49-53.

In der Meteorol. Zs. **27**, 573, hat Bidlingmaier bei der Besprechung der Arbeit „Magnetische Karten von Norddeutschland für 1909“ von Ad. Schmidt Vorschläge angeregt, die sich auf die in dieser Schrift angewandte Zerlegung des Feldvektors F in vier Teile E, A, T, S beziehen. Hierdurch ist der Verf. veranlaßt worden, in dem vorliegenden Artikel jene Zerlegung als sachlich begründet und als zweckmäßig nachzuweisen. Lp.

Fr. Bidlingmaier Zur säkularen Variation des Erdmagnetismus. Physik. Zs. 12, 449-459.

Von Ad. Schmidt auf einen Fehler in der vorjährigen Arbeit aufmerksam gemacht, zeigt der Verf., daß die Hypothese der magnetischen „Umwandlungsschichten“ nicht zur Erklärung der säkularen Variation genügt. „Es erscheint aussichtslos, die säkulare Variation des Erdmagnetismus auf eine aus irgendeinem Grunde veränderliche Induktion der magnetisierbaren Erdkruste durch das Erdfeld selbst zurückzuführen“. In dem zweiten Teile der Abhandlung wird das jährlich neu entstehende Magnetfeld der Erde in tabellarischer und bildlicher Darstellung vorgeführt. Lp.

L. A. Bauer. Zur Theorie der Säkularvariation des Erdmagnetismus. Physik. Zs. 12, 445-448.

Der Hauptsache nach eine Kritik der Arbeit von Bidlingmaier (F. d. M. **41**, 1034, 1910), dessen Betrachtungen der Reihe nach zerpflückt werden. Die eigene Ansicht des Verf. erhellt aus den Sätzen: „Mir scheint es mehr und mehr, als ob es nicht einmal notwendig sein wird, eine besondere für die Säkularvariation eigentümliche Ursache aufzusuchen. Sind einmal alle Systeme zum Vorschein gebracht worden, welche die Hauptrolle in der solartäglichen, mondtäglichen und in der jährlichen Variation sowie in den magnetischen Stürmen spielen, so wird man, wie ich glaube, finden, daß die Säkularvariation einen ausstehenden Restteil (residual effect) am Ende eines Tages oder Jahres bildet.“ Lp.

A. Schuster. The origin of magnetic storms. Lond. R. S. Proc. (A) 85, 45-49.

Verf. leitet ab, daß die erdmagnetischen Stürme unmöglich einer Ausschleuderung von Elektronen aus der Sonne zu verdanken sind. Denn ein solcher

Strom, der die Sonne mit Lichtgeschwindigkeit verließe, würde ein magnetisches Gegenfeld erzeugen, das seine Geschwindigkeit immer mehr verringerte. Auf der Erde angelangt, würden die Elektronen nur noch eine Geschwindigkeit von 9 km in der Sekunde haben, zum Zurücklegen des Weges Sonne-Erde aber etwa ein Jahr gebrauchen. Außerdem stimmen die tatsächlich beobachteten Kraftäußerungen nicht entfernt mit den theoretisch zu berechnenden überein. Br.

A. Nippolt. Über das Wesen des Erdstromes. Meteorol. Zs. 28, 244-261.

Gesamtbild vom Wesen des Erdstromes, in dem auch einige mathematische Betrachtungen zur Vereinheitlichung benutzt sind. Lp.

St. D. Staikoff. Ausgleichung einer Reihe beobachteter Größen. Meteorol. Zs. 28, 524-528.

„Die Methode der kleinsten Quadrate bietet ein einheitliches Verfahren für die Ausgleichung jeder beliebigen Reihe beobachteter Größen, wenn die Gesetzmäßigkeit ihres Verlaufes bekannt ist; die Aufgabe wird aber viel unbestimmter und schwieriger, wenn diese Gesetzmäßigkeit erst auf Grund der Beobachtungen selbst ermittelt werden soll. Im letzten Fall bedient man sich in der Meteorologie gewöhnlich einer einfachen rechnerischen Ausgleichung, welche im Grunde eine Mittelbildung ist und einen linearen Verlauf der auszugleichenden Größen voraussetzt. Der Verf. schlägt den Weg ein, daß er die $2p+1$ beobachteten Größen y_k als durch die Parabel $2p$-ten Grades dargestellt betrachtet:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2p} x^{2p}.$$

Er berechnet unter dieser Voraussetzung eine Formel für den ausgeglichenen Wert von y und entwickelt die allgemeine Ausgleichungsformel für einige einfachere Fälle. Lp.

V. Láska. Bemerkung zum Artikel des Herrn A. Wagner im Dezemberheft 1910. Meteorol. Zs. 28, 230-231.

Betrifft den Aufsatz: „Über den Einfluß des mittleren Fehlers auf die wahrscheinlichste Beziehung zwischen zwei Veränderlichen“ (F. d. M. **41**, 1032, 1910). Nach einer Kritik der Schlußreihe bemerkt der Verf. noch: „Wird die Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung einer empirischen Funktion benutzt, so ist dieses nur dann gestattet, wenn die algebraische Form der Funktion gesichert ist“. Lp.

E. Alt. Die Ableitung von Näherungswerten der harmonischen Konstituenten. Meteorol. Zs. 28, 369-371.

Es wird gezeigt, wie man in der Formel $y = p_1 \cos x + p_2 \cos 2x + p_3 \cos 3x + q_1 \sin x + q_2 \sin 2x + q_3 \sin 3x$ die Werte für die Konstanten p_i, q_i aus den Werten $y_k = f(x_k)$, wo $x_k = k. 15^0$ $(k = 6, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 22)$ leicht berechnen lassen, nämlich:

$$p_1 = -\tfrac{1}{6}(y_6 + 2y_8 + 4y_{12} + 2y_{16} + y_{18}),\quad p_2 = -\tfrac{1}{2}(y_6 + y_{18}),$$
$$p_3 = \tfrac{1}{3}(-y_6 + y_8 - y_{12} + y_{16} - y_{18}),\quad q_1 = \tfrac{1}{6}(y_6 - 2y_{14} - 3y_{18} - 2y_{22}),$$
$$q_2 = -\tfrac{1}{2}(y_9 + y_{21}),\quad q_3 = -\tfrac{1}{3}(y_6 + y_{14} + y_{22}).$$

Lp.

Ad. Schmidt. Bemerkungen über die Aufstellung von Näherungsformeln zur harmonischen Analyse. Meteorol. Zs. 28, 536-538.

Kritik des von Alt in dem vorstehend angezeigten Artikel befolgten Verfahrens. „Soll in derartigen Fällen der erstrebte Vorteil nicht durch einen viel größeren Nachteil, die Gefahr mißbräuchlicher Anwendung, erkauft werden, so müssen die Bedingungen und die Grenzen der Gültigkeit der Näherungsformeln genau festgestellt und nachdrücklich betont werden.“ Die Bedingungen, die erfüllt sein müssen, wenn die Altschen Formeln brauchbar sein sollen, sind $p_0 = 0$ und $p_\varkappa, q_\varkappa$ für $\varkappa \gtreqless 4$ zu vernachlässigen. Lp.

W. Schmidt. Nachweis von Perioden langer Dauer. Meteorol. Zs. 28, 401-407.

Um die raschesten Änderungen des Luftdruckes besonders hervortreten zu lassen, wendet der Verf. das Mittel an, nicht den Luftdruck selbst sich aufzeichnen zu lassen, sondern seine erste Derivierte nach der Zeit $\partial p/\partial t$. Wollte man die länger dauernden Veränderungen hervorgehoben haben, so würde man den umgekehrten Weg einschlagen müssen, d. h. das Integral des Luftdruckes nach der Zeit betrachten: $\int_{t_0}^{t} p dt$. Da dessen konstanter Anstieg aber nur das Wesentliche verdeckt, wird man an Stelle des Druckes seine Abweichung vom Mittelwert $\bar{p}$ einführen: $\int_{t_0}^{t} (p - \bar{p}) dt$. Der Verf. zeigt, wie er diese Gedanken praktisch durchgeführt hat, und welche Vorteile die Anwendung des Verfahrens bringt. Lp.

J. Liznar. Mitteltemperaturen der Breitenkreise und mittlere Temperatur einer Land-, bzw. Wasserhemisphäre sowie der ganzen Erde. Meteorol. Zs. 28, 301-306.

Bemerkungen und Daten zur Ergänzung der Abhandlung in derselben Zeitschrift **17**, 36-39 (F. d. M. **31**, 899, 1900). Für die Temperaturen einer Wasserhemisphäre werden richtigere Werte gegeben. Die zur Berechnung der Temperaturen einer Land- oder Wasserhemisphäre benutzten Formeln lassen

sich auch zur Berechnung der in den verschiedenen Breiten durch eine Änderung in der Wärmestrahlung (oder der Solarkonstante J_0) bewirkten Temperaturänderungen verwenden. Lp.

A. de Quervain. Über die Bestimmung der Einstellungsträgheit von Thermometern. Meteorol. Zs. 28, 88-90.

In einem gleichbetitelten Aufsatze derselben Zs. **27**, 400-405, hatte W. Schmidt geäußert, seine Herleitung erweise sich als erwünschter Ersatz für die bisher nur immer in ganz allgemeiner und durchaus nicht bindender Form gemachten Angaben. Um diese Äußerung auf ein richtiges Maß zurückzuführen, gibt der Verf. eine kurze Zusammenfassung der bezüglichen Leistungen. Lp.

Rudel. Zur Bestimmung der Einstellungsträgheit von Thermometern. Meteorol. Zs. 28, 90-93.

Vgl. das vorstehende Referat. Ein weiterer Beitrag zu dieser Frage, dem die Schriftleitung in einer Fußnote Hinweise auf verschiedene den Gegenstand behandelnde Artikel aus früheren Jahrgängen derselben Zeitschrift hinzugefügt hat. Lp.

E. Kohlschütter. Die periodischen Fehler barometrisch bestimmter Höhenunterschiede in der inneren Tropenzone und ein Satz von Teisserenc de Bort. Meteorol. Zs. 28, 385-401.

Im Oktoberheft 1910 derselben Zeitschrift hat A. Schreiber die Habilitationsschrift von Hugershoff besprochen: „Die periodischen Fehler barometrisch bestimmter Höhenunterschiede in der inneren Tropenzone" (Mitt. Verein. f. Erdkunde, Dresden 1910). An dieser Schrift erscheint dem Verf. „der Versuch besonders interessant, in die Formel der barometrischen Höhenbestimmung die theoretische Temperaturabnahme einzuführen, die dem indifferenten Gleichgewicht entspricht". Die Priorität dieses Gedankens komme nicht A. Schreiber zu, der sie in der Rezension beansprucht; sondern dieser naheliegende Gedanke sei schon früher angewendet. Dagegen nimmt Kohlschütter bei den für Ostafrika von Hugershoff gefundenen Resultaten die Priorität für sich in Anspruch unter Verweisung auf seine Arbeit: „Ergebnisse der ostafrikanischen Pendelexpedition" (F. d. M. 38, 973, 1907). An der Hand dieser Veröffentlichung unterzieht Kohlschütter die Schrift von Hugershoff einer eingehenden scharfen Kritik. Danach rechtfertigt sich der Verf. gegen Einwände, die Großmann gegen Berechnungen in den Ergebnissen der ostafrikanischen Pendelexpedition in der Besprechung dieser Arbeit (Meteorol. Zs. 1909) erhoben hat. Lp.

J. P. van der Stok. De dagelijksche variatie van wind en barometerstand in verband met die van den gradiënt der luchtdrukking. Amst. Ak. Versl. **19**, 1381-1406.

Die Beziehungen zwischen Windstärke und Windrichtung einerseits und dem Luftdruck wie dessen Gradienten andererseits werden bei vereinfachenden Voraussetzungen (Nichtberücksichtigung vertikaler Luftströmungen) durch lineare Differentialgleichungen mit Störungsgliedern vermittelt, denen periodische Glieder entsprechen. Die Ergebnisse dieser Theorie werden aus langjährigen Beobachtungen für verschiedene Örter, z. B. de Bilds, Helder, Vlissingen, angewendet. Dz.

F. M. Exner. Über den Wärmeaustausch zwischen der Erdoberfläche und der darüber fließenden Luft, mit einem Anhang über die Ausbreitungsgeschwindigkeit kalter Luft. Wien. Ber. **120**, 181-230. (Mit 4 Textfiguren.)

Dieser Wärmeaustausch, der in den „Grundzügen einer Theorie der synoptischen Lufdruckänderungen" des Verf. (Wien. Ber. **116**, 819-854; F. d. M. 38, 976, 1907) eine wesentliche Rolle spielt, war damals als hypothetisches Element angenommen worden. Verf. benutzt hier zu seiner Bestimmung Beobachtungsdaten sog. Kälteeinbrüche, wie z. B. einen von großer Ausdehnung in Nordamerika am 10. bis 14. Januar 1895.

Die Ergebnisse stimmen unter sich, wie mit der Exnerschen Theorie recht gut überein. Dz.

W. Schmidt. Zur Mechanik der Böen. Meteorol. Zs. 28, 355-362.

„Theorie und Experiment haben übereinstimmend gezeigt, daß die in einem Nebeneinanderliegen kalter und warmer Luft aufgespeicherte potentielle Energie vollkommen genügt, um die bei Böen beobachteten Erscheinungen auch ihrer Intensität nach zu erklären. Im besonderen ergaben die Versuche für den Vorgang des Eindringens kalter Luft eine ganz bestimmte Form, deren genaueres Studium manche der bei dem entsprechenden Phänomen in freier Natur beobachteten Einzelheiten erhellte. Im besonderen mag da hingewiesen werden auf das Zusammenrücken der ganzen Erscheinungen in ein schmales Band und auf den Versuch, einen zahlenmäßigen Zusammenhang zwischen Temperatursprung, Barographenstufe und Fortpflanzungsgeschwindigkeit herzustellen." Lp.

A. Wegener. Über den Ursprung der Tromben. Meteorol. Zs. 28, 201-209.

Der Verf. geht davon aus, daß sowohl der liegende Wirbel der Gewitterböe, wie der stehende der Tromben Sekundärerscheinungen darstellen. Er nimmt an, daß die Gewitterböe im wesentlichen durch den fallenden Regen oder Hagel verursacht wird, der die Luft mit sich reißt, so daß sie dicht über dem Erdboden mit großer Gewalt nach vorn zu entweichen genötigt ist. Die so eingeleitete Drehung wird weiter fortgesetzt, die heftig nach vorn strömende Luft steigt wieder auf, so daß noch dicht vor ihr die „Stille vor dem Sturme" herrscht, und kehrt etwa in der Höhe zwischen 1000 und 2000 m zur Wolke zurück. Auf diese Weise entsteht ein ausgedehnter Wirbel mit horizontaler Achse, dessen oberer Teil uns durch Kondensation (Wolkenwulst, Kragen) sichtbar

ist. Von dieser Auffassung der Gewitterböe aus wird der Versuch gemacht, zu zeigen, daß die Tromben höchstwahrscheinlich die zur Erde herabgesenkten Enden dieses Böenwirbels sind. Dies ist in der Weise zu verstehen, daß sich mitunter um die bei etwa 1000 m liegende Achse des Böenwirbels herum ein echter Wirbelfaden in einem näher angegebenen Sinne ausbildet, der im stationären Zustande nicht in der freien Luft endigen kann, dessen Achse vielmehr entweder, wie in den bekannten Rauchringen, in sich selbst zurücklaufen oder aber sich beiderseits an die Erde heften muß. Lp.

W. Meinardus. Über den Kreislauf des Wassers. Meteorol. Zs. 28, 317-321.

Im Anschluß an die Untersuchungen von E. Brückner und R. Fritzsche wird zunächst die jährliche Bilanz des Kreislaufes des Wassers auf der Erde abgeleitet (jährlich 465 000 cbm). Dann wird die Frage behandelt: Wie lange verweilt ein Wasserteilchen im Durchschnitt auf den verschiedenen Stadien des Kreislaufes im Meer, Luft und Land? Lp.

Jelineks Psychrometer-Tafeln. Anhang: Hygrometer-Tafeln von J. M. Pernter. Herausgegeben von W. Trabert. Sechste erweiterte Auflage. Leipzig: W. Engelmann. XII u. 129 S. Fol.

In der neuen Auflage erscheinen sowohl die Psychrometertafeln, als auch die Hygrometertafeln wesentlich geändert. Bisher waren sie auf die Voraussetzungen aufgebaut, daß das Wasser unter Null stets in flüssiger Form, also unterkühlt vorhanden sei. Diese Voraussetzung ist wohl in den seltensten Fällen erfüllt; es schien daher eine Ergänzung der Tabellen für den gewöhnlichen Fall, daß das Wasser unter Null als Eis auftritt, dringend nötig. Daher wurde die Tafel „Druck des gesättigten Wasserdampfes über Eis“ hinzugefügt mit Benutzung der „Tafel für die Sättigungsdrucke des Wasserdampfes über Eis“ von K. Scheel und W. Heuse (Ann. der Phys. (4) **29**, 734, 1909). Hierdurch wurde eine sehr umfangreiche Neuberechnung der ausführlichen Tafeln des Dampfdruckes und der relativen Feuchtigkeit nötig, wobei die eben angefügte Tafel von K. Scheel und W. Heuse gleichfalls zugrunde gelegt wurde. Ebenso mußte nun auch die Hygrometertafel für Wasser in Eisform neu berechnet werden. Diese Neuberechnung wurde auch für Temperaturen über Null vorgenommen, weil sich mancherlei Unstimmigkeiten zeigten. Auch die Faktorentafel für $100/e$ zur Bestimmung der relativen Feuchtigkeit wurde neubearbeitet. Die Brauchbarkeit der Tafeln hat durch diese Ergänzungen wesentlich gewonnen. Die sehr langwierigen und mühsamen Neuberechnungen sind von J. N. Dörr und R. Schneider durchgeführt.

Inhalt: Vorwort. Einleitung. I. Psychrometertafeln. II. Hygrometertafeln. Literatur zur Frage des Psychrometers und Haarhygrometers.

Tafeln zur kurzen Berechnung des Dampfdruckes. I. Druck des gesättigten Wasserdampfes. II. Abzugstafeln im Meeresniveau (755 mm). III. Abzugstafeln für 500 bis 3000 m. IV. Faktoren zur Berechnung des Wasserdampfgewichtes. Psychrometertafeln von Zehntel zu Zehntel Graden (S. 13-111).

Ausführliche Tafeln der Korrektionen für den Luftdruck. Tabelle für den Faktor 100/*e* zur Berechnung der Feuchtigkeit. Hygrometertafeln zur Berechnung des Dampfdruckes. Lp.

Weitere Literatur.

D. Giannitrapani. Elementi di geografia matematica. Firenze: Bemporad. VII u. 99 S. 8⁰.

O. Hermes. Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. 6. Aufl. Bearb. von P. Spies. Berlin: Winkelmann. 56 S. gr. 8⁰.

H. Kerp. Mathematische Geographie und Kartographie. Trier: Lintz. VIII u. 51 S. 8⁰.

Marquardt. Beiträge zur mathematischen Geographie. Eilenburg: Offenhauer. 20 S. 8⁰.

H. Ott. Hauptfragen und Hauptmethoden der Kartenentwurfslehre unter besonderer Rücksichtnahme auf die Abbildung der Schweiz. Aarau: Sauerländer. 63 S. 4⁰.

F. Busch u. Chr. Jensen. Tatsachen und Theorien der atmosphärischen Polarisation nebst Anleitung zu Beobachtungen verschiedener Art. Jahrbuch der hamb. wiss. Anstalten. 1910. 5. Beiheft. Hamburg: Gräfe u. Sillem. 532 S. Lex. 8⁰.

J. Hann. Handbuch der Klimatologie. Bd. III. Klimatographie. II. Teil. Klima der gemäßigten Zonen und der Polarzone. Dritte, wesentlich umgearbeitete und vermehrte Auflage. Stuttgart: J. Engelhorns Nachf. IX u. 713 S. 8⁰. [Meteorol. Zs. 28, 380-382.]

F. W. Henkel. Weather science; an elementary introduction to meteorology. London: T. Fisher Unwin, 336 S. 8⁰.

W. Köppen. Luftblasen am Erdboden und in der freien Atmosphäre. Meteorol. Zs. 28, 159-167.

W. Köppen. Temperaturänderung in vertikal bewegten Luftmassen. Meteorol. Zs. 28, 427.

Einfache mathematische Herleitung. Lp.

J. F. Ruthven. Moxly's Theory of the tides. With a chapter of extracts from Moxly's original work. Revised and enlarged edition. London: J. D. Potter. 103 S. [Nature 87, 449.]

Anhang.

F. Auerbach und R. Rothe. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben. Mit einem Bildnis Friedrich Kohlrauschs. 3. Jahrgang 1913. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. X u. 463 S. 8°.

Der vorliegende dritte Jahrgang des Taschenbuches für Mathematiker und Physiker enthält wieder mehrere neue Beiträge, und auch die Hauptabschnitte sind nach Weglassung manches älteren durch neue Einfügungen bereichert worden. Die Beiträge der Mitarbeiter sind: Friedrich Kohlrausch, Biographie von E. Warburg. — Kalender und Astronomie von O. Knopf. — Mengenlehre von G. Hessenberg. — Gruppentheorie und Galoissche Theorie der Gleichungen von L. Bieberbach. — Der letzte Fermatsche Satz von A. Fleck. — Integralgleichungen und deren Anwendungen von O. Toeplitz. — Mehrdeutige Funktionen und Uniformisierung von L. Bieberbach. — Die internationale Unterrichtskommission von W. Lietzmann. — Analytische Mechanik von H. Liebmann. — Die Quantentheorie von A. Sommerfeld. — Niedere Geodäsie von P. Gast. — Kristallographie von L. Milch. — Allgemeine Chemie von Fr. Auerbach.

Alles übrige ist, soweit mathematisch, von R. Rothe, soweit physikalisch, von F. Auerbach, soweit literarisch oder personell, von beiden gemeinschaftlich bearbeitet worden. Unter den neuen Beiträgen befindet sich eine historische Liste der bedeutenden Mathematiker, über deren Auswahl sich natürlich streiten läßt. In das Inhaltsverzeichnis sind diesmal auch die selbständigen Beiträge aus den früheren Jahrgängen (in Klammern gesetzt) aufgenommen; ebenso enthält das Register auch die Stichwörter früher behandelter Gegenstände. Das rechtzeitige Erscheinen läßt hoffen, daß auch in Zukunft die neuen Jahrgänge, ihrem Datum entsprechend, früh genug werden fertig gestellt werden. Lp.

J. M. Wilson. On two fragments of geometrical treatises found in Worcester cathedral library. Math. Gazette 6, 24-27.

Das erste Bruchstück ist ein Teil eines Blattes über Geometrie aus dem 13. Jahrhundert und ist als aus der Geometrie von Gerbert stammend festgestellt worden. Das zweite ist ein Stück aus einer früheren Übersetzung des Euklid; dies zeigt, daß Euklid im 14. Jahrhundert in England

mittels der Übersetzung von Adelhard aus dem Arabischen studiert wurde. Bemerkungen über die Geschichte der Geometrie von Euklid und ihren Gebrauch in England. Lp.

E. Czuber. Beiträge zur Militärstatistik. Mitt. üb. Art. u. Gen. 1911, 349-422.

„Der Plan des vorliegenden Beitrags ist der folgende. Zuerst wird eine allgemeine Darstellung der Verhältnisse versucht, um deren statistische Erfassung es sich auf dem Gebiete des Heerwesens handelt. Daran reiht sich die kritische Besprechung eines speziellen, besonders entwickelten Teils der Armeestatistik, nämlich der Sanitätsstatistik. Aus ihren Ergebnissen werden in einem weiteren Abschnitt einige Schlüsse gezogen, die nicht so sehr der Gewinnung endgültiger Tatsachen dienen sollen und können, als sie dazu bestimmt sind, zu zeigen, nach welchen Richtungen sich etwa die Fragestellung bewegt, und welche Methoden der Untersuchung angewendet werden können. Sodann sind einige Worte der internationalen Militärsanitätsstatistik gewidmet; den Abschluß bilden einige Bemerkungen allgemeiner Natur über das behandelte Thema.“ Lp.

F. R. Sharpe and A. T. Lotka. A problem in age-distribution. Phil. Mag. (6) **21**, 435-437.

Es wird untersucht, ob die Annahme zutrifft, wonach die Verteilung einer Bevölkerung nach Altersklassen als stabil anzusehen ist, d. h. ob die Bevölkerung bei einer Störung dieses Zustandes, z. B. durch einen Krieg, die Tendenz hat, dem alten Zustand wieder zuzustreben. Für England erweist sich die Annahme, einer stabilen Verteilung in diesem Sinne als zutreffend. Br.

A. Schülke. Différentielle et dérivée. Ens. math. **13**, 224-227.

Die Definition des Differentialquotienten und des Integrals, wie sie auf Universitäten üblich ist, bereitet in Mittelschulen Schwierigkeiten; es wird empfohlen, nur die dx und dy einzuführen und die Rechnungen mehr im approximativen Sinne durchzuführen. Zö.

M. Fréchet. Sur la notion de différentielle. C. R. **152**, 1050-1051.

Ein Teil der Note in C. R. **152**, 845-847, Referat S. 305 dieses Bandes, ist bereits von W. H. Young angegeben in Lond. M. S. Proc. (2) **7**, 157-180 (F. d. M. **40**, 333, 1909). Zö.

W. H. Young. On the Fourier constants of a function. Lond. R. S. Proc. (A) **85**, 14-24.

Es werden die nachstehenden Sätze bewiesen, in denen die a_n und b_n die Koeffizienten einer Fourierschen Entwicklung bedeuten.

1. Liegt q zwischen 0 und 1, so ist immer $\sum_1^\infty a_n n^{-q}$ und $\sum_1^\infty b_n n^{-q}$ konvergent, sofern nur die Fouriersche Reihe in der Nähe des Anfangspunktes von begrenzter Variablität und sonst summierbar ist. Die Werte der Summen sind dann als bestimmte Integrale ausdrückbar.

2. Dasselbe gilt, wenn das Quadrat der Fourierschen Entwicklung in der Nähe des Anfangspunktes summierbar ist und q zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt.

3. Weiß man nur, daß die Funktion in der Nähe des Koordinatenanfangspunktes begrenzt ist, so bleibt der Satz 1 doch richtig, wenn man die Wörter Summe und Konvergenz in Cesàros Sinn auffaßt.

4. Wenn in der Nähe des Koordinatenanfangspunktes nur eine der drei Bedingungen erfüllt ist, während die Reihe im übrigen Intervall ($-\pi$ bis $+\pi$) ein Harnack-Lebesguesches Integral besitzt, gelten die Resultate gleichwohl, falls man wieder Summe und Konvergenz im Cesàroschen Sinne auffaßt. Die Fouriersche Reihe ist dann eine verallgemeinerte (vgl. S. 286 dieses Bandes). Br.

W. H. Young. On a class of parametric integrals and their application in the theory of Fourier series. Lond. R. S. Proc. (A) 85, 401-414.

Es wird der Satz bewiesen, daß, wenn von zwei Fourierschen Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ die Potenzen $[f(t)]^{1+p}$ und $[g(t)]^{1+1/p}$ summierbar sind (wo p eine positive Größe ist), oder wenn $f(t)$ summierbar und $g(t)$ in der Variabilität begrenzt ist, und wenn ferner a_n und b_n die Koeffizienten in der Entwicklung von $f(t)$, α_n und β_n die von $q(t)$ bedeutet, dann immer die Reihe: $\sum_{n=0} (a_n\beta_n - b_n\alpha_n)\sin nx$ eine Fouriersche Reihe mit der Summe:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(t+x) - f(t-x)]\, g(t)\, dt$$

ist (vgl. S. 286 dieses Bandes). Br.

W. H. Young. On a mode of generating Fourier series. Lond. R. S. Proc. (A) 85, 415-430.

Der Titel ist kaum gerechtfertigt. Es wird jedenfalls eine ganze Reihe von Sätzen bewiesen, die mit denen der beiden vorhergehenden Arbeiten in direktem Zusammenhang stehen, sich aber durchaus nicht auf die Erzeugung einer Fourierschen Reihe schlechthin beziehen. Es handelt sich vielmehr nur um Fouriersche Reihen, die aus einer bestimmten $\sum[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ in einfacher Weise gebildet sind, also z. B. $\sum n^{-q}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$. Die Werte derartiger Reihen werden mit dem Wert der ersten in Beziehung gesetzt (vgl. S. 287 dieses Bandes). Br.

Lord Rayleigh. Note on Bessel's functions as applied to the vibrations of a circular membrane. Phil. Mag. (6) 21, 53-54.

Die Schwingungen kreisförmiger Membranen sind durch Entwicklungen nach Besselschen Funktionen darstellbar. Aus dem Verhalten der Membranen leitet nun umgekehrt der Verf. Sätze über die Besselschen Funktionen ab, insbesondere den Satz, daß die Wurzeln von $J_n(z)$ mit der Ordnungszahl n immer mehr wachsen (vgl. S. 885 dieses Bandes). Br.

G. F. Becker. Some new mechanical quadratures. Phil. Mag. (6) **22**, 342-353.

Es wird eine Reihe von Formeln für mechanische Quadraturen berechnet, die auf einer Entwicklung nach Bernoullischen Zahlen beruhen. Die erste kommt auf die Simpsonsche Regel, die zweite und dritte auf Spezialisierungen dieser und der Cotesschen Regel hinaus, die vierte bis sechste sind neu. Br.

H. Lebesgue. Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n+p$ dimensions. Math. Ann. **70**, 166-168.

In dem Bericht auf S. 419 über die Arbeit von Lebesgue ist zu bemerken, daß der Lebesguesche Beweis für die Invarianz der Dimensionenzahl nicht richtig ist. Er enthält eine Lücke, die der Verf. bisher noch nicht ausgefüllt hat. Näheres findet man in einer Arbeit von L. E. J. Brouwer im J. für Math. **142**, 151. El.

Wilh. Müller. Die rationale Kurve fünfter Ordnung im fünf-, vier-, drei- und zweidimensionalen Raum. Diss. Leipzig (1910). 100 S.

Die rationale Kurve fünfter Ordnung K_5 im R_5 ist das naturgemäße Hülfsmittel, um die Invariantentheorie der binären Form fünfter Ordnung zu veranschaulichen, ebenso wie man die Raumkurve dritter Ordnung zur Interpretation der Theorie der kubischen binären Form heranziehen kann (R. Sturm, Darstellung binärer Formen auf der kubischen Raumkurve, J. f. Math. **86**). Setzt man die homogenen Koordinaten der K_5 in der Form $x_0:x_1:x_2:x_3:x_4:x_5 = 1:-\lambda:\lambda^2:-\lambda^3:\lambda^4:-\lambda^5$ an, so sind mit der Kurve zwei apolare binäre Formen fünfter Ordnung f und φ verknüpft, von denen das Verschwinden der einen die Berührungsmannigfaltigkeiten T_4, die andere die Schnittpunkte mit einer linearen Mannigfaltigkeit M_4 bestimmen. Dann lassen sich die Invarianten und Kovarianten der Formen fünfter Ordnung, die nach Clebsch (Binäre Formen) aufgestellt werden, geometrisch deuten; doch kann hier über die mannigfachen Einzelergebnisse nicht ausführlich berichtet werden. Der zweite, kürzere, Abschnitt überträgt die gewonnenen Ergebnisse auf die rationalen Kurven fünfter Ordnung in den Räumen niedrigerer Dimensionenzahl. Diese Kurven werden aus der „Normkurve" K_5 durch Projektion

gewonnen. Projiziert man die Punkte des R_5 aus einem Punkte auf einen festen R_4, so ergibt sich eine vierdimensionale C_5; projiziert man die Punkte mittels Ebenen durch eine feste Gerade auf einen R_3, so ergibt sich eine Raumkurve C_5, usf. Ist das Projektionszentrum (d. h. der Ort aller Punkte, die die projizierenden Mannigfaltigkeiten gemeinsam haben) ein R_{k-1}, so ist er durch k Punkte oder durch die k zugehörigen Berührformen bestimmt. Man nennt sie die Grundformen der Projektionskurve. Mit ihrer Hülfe ergeben sich die Eigenschaften der Kurven in den niederen Räumen sehr einfach aus der Theorie der Normkurve. Inhalt: Einleitung. I. Die Normkurve N^5 fünfter Ordnung (S. 2-65). 1. Darstellung des Punktes der Geraden usf. bezüglich der N^5. 2. Apolarität. 3. Invariantentheorie auf der N^5. 4. Weitere Kovarianten. 5. Beziehungen der Geraden zur Normkurve. 6. Die zu f und f' apolare Form achter Ordnung. 7. Fall unendlich vieler Quadrisekantenräume durch (ff'). 8.-9. Quadrupel auf N^5. 10. Beziehung der Ebene zur N^5. 11. Die binäre Form siebenter Ordnung im Zusammenhang mit der N^5. 12. Zusammenhang mit den Oskulanten.

II. Die rationalen C^5 in den niederen Räumen. (S. 66 bis 100.) 13. Prinzipien des Projizierens. 14. Die rationale C^5_4. 15. Die rationale C^5_3. 16. Weitere Eigenschaften der C^5_3. 17. Spezielle Raumkurven fünfter Ordnung. 18. Die fundamentale Involution auf der N^3. 19. Die Oskulanten der C^5_3. Die Kurve K dritter Ordnung. 20. Die fundamentale Involution auf der N^4. 21. Bemerkungen über die C^5_2. Sk.

L. Jacob. Le calcul mécanique. Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs. Paris: Doin. XVI u. 412 S. 18mo (Encyclopédie scientifique. Bibliothèque de mathématiques appliquées).

I. Arithmetische Apparate: Instrumente zur genauen Rechnung. Maschinen zur genauen Rechnung. Apparate zur angenäherten Rechnung. II. Algebraische Apparate: Differenzmaschinen. Auflösung von Gleichungen. Berechnung von Funktionen. III. Integratoren: Einfache, zur Bestimmung eines Integrals. Zusammengesetzte, zur Integration von Differentialgleichungen (vgl. die Rezension von A. Galle im Arch. der Math. u. Phys. (3) **19**, 83). Lp.

L. Schrutka, Edler v. Rechtenstamm. Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. Leipzig: F. Deuticke. X. u. 96 S. 8⁰.

„Der logarithmische Rechenschieber ist ein Instrument, dessen Hauptwert in seiner Verwendbarkeit bei den meisten Rechnungen, die der praktische Rechner auszuführen hat, liegt — erfreulicherweise findet diese Verwendbarkeit von Jahr zu Jahr steigende Anerkennung. Daneben bietet der Rechenschieber aber — namentlich in seinen Abarten und Verallgemeinerungen — auch dem Theoretiker hohes Interesse. Diese Doppelstellung hat auf den Charakter des Buches einen wesentlichen Einfluß ausgeübt. Es wendet sich zwar in erster Linie an den praktischen Rechner, der größte Teil des Raumes ist daher den

einfachen Operationen gewidmet, und es befaßt sich eingehend mit allen Fragen, die die Sicherheit, Schnelligkeit und Bequemlichkeit der Benutzung des Instruments betreffen; doch ist der Unterschied zwischen den Interessen der Praktiker und der Theoretiker nicht so groß, daß nicht eine ganze Reihe komplizierterer Operationen auch für den praktischen Rechner der Beachtung vollauf wert wäre." Der Plan des Buches ist dementsprechend folgender: Nach einer Darlegung des Prinzipes der logarithmischen Rechenschieber (§ 1) wird die einfachste und am meisten verbreitete Form des Rechenschiebers beschrieben (§ 2); dann werden alle wichtigeren damit ausführbaren Operationen der Reihe nach behandelt (§§ 3 bis 10) und die Frage nach der Genauigkeit der dabei erhaltenen Resultate berührt (§ 13). Andere Arten von Rechenschiebern und ihre Verwendung sind kurz in den Paragraphen 11 und 14 besprochen. Besondere Arten der Verwendung des Rechenschiebers von geringerer Bedeutung finden sich in § 12. Im Anhang werden Ratschläge für die Auswahl eines Rechenschiebers und seine Behandlung erteilt. Das klar geschriebene, an Reichhaltigkeit des Stoffes und durch guten Druck ausgezeichnete Buch kann bestens empfohlen werden. Gd.

F. Guarducci. Sopra un 'Integrafo polare. Bologna Mem. (6) 8, 297-300.

Auf Grund einfacher geometrischer Relationen zwischen zwei Kurven wird die Konstruktion eines neuen Polarintegraphen angegeben. Grb.

H. Andoyer. Nouvelles tables trigonométriques fondamentales contenant les logarithmes des lignes trigonométriques de centième en centième du quadrant avec dix-sept décimales, de neuf en neuf minutes avec quinze décimales, et de dix en dix secondes avec quatorze décimales. Paris: A. Hermann et Fils. XXXII u. 604 S. 4°.

Das Buch ist uns nicht zugegangen; wir berichten nach der Anzeige von G. Deutschland in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft **47**, 2-7. Das Werk gibt in seinem Hauptteil 14-stellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, im Intervall von 10″ tabuliert, und entspricht dadurch mittelbar dem in letzter Zeit mehrfach hervorgetretenen Bedürfnis nach einer größeren als den 7-stelligen Tafeln dieser Funktionen eigenen Genauigkeit. Während für unsere jetzige Praxis 8-stellige Werte, wie sie erst kürzlich von Bauschinger und Peters herausgegeben wurden, durchaus genügen werden, liegt die Bedeutung der Arbeit des Verf. darin, daß sie ebenso eine gesicherte Grundlage für die Berechnung von Tafelwerken mit anderen Argumenten bietet, wie sie mit Leichtigkeit zur Herstellung ausführlicher 9- und 10-stelliger trigonometrischer Tafeln dienen kann. Gerade die Sicherheit läßt bei den älteren hier in Betracht kommenden Veröffentlichungen oft zu wünschen übrig, abgesehen davon, daß ihrer heutigen Benutzung noch andere Nachteile im Wege stehen.

Die Logarithmen werden vom Verf. als auf eine halbe Einheit der letzten Stelle genau bezeichnet. Ihre Berechnung erfolgte durchweg mit einer Stelle mehr, als sie tabuliert wurden. Die Abrundung dieser Zusatzdezimale geschah

in der allgemein üblichen Weise, während ihre Unterdrückung nach einem Vorschlage von N. Thiele erfolgte. Die letzte tabulierte Stelle erhielt ein + Zeichen, wenn die Zusatzdezimale eine der Ziffern 3 bis 7 war; sie wurde bei nachfolgender 0, 1, 2 unverändert beibehalten, bei 8 und 9 um eine Einheit erhöht. Da durch dieses Verfahren die Tafellogarithmen nur um $^2/_{10}$ Einheiten der letzten Stelle ungenau sein können und der infolge der Interpolation begangene Fehler durch eine ständige Kontrolle der bei der Rechnung mitgeführten Dezimale niemals drei ihrer Einheiten überstieg, so beträgt die größtmögliche Abweichung der Logarithmen $^1/_2$ Einheit der letzten Dezimale, allerdings immer nur unter der Voraussetzung, daß die genannte Art der Abrundung beibehalten wird. Infolge dieser Genauigkeit hat der Verf. eine ganze Reihe von Fehlern in älteren Tafeln durch deren Vergleich mit seinen Tafeln nachweisen können.

Der Charakter des Werkes bedingt, daß die Ansprüche, die man an Tafeln für den häufigen Gebrauch des Rechnens stellen kann, hier nicht im ganzen Umfange aufrecht zu erhalten sind. Dem Ziel einer möglichst geringen Inanspruchnahme der Aufmerksamkeit, dem man erfahrungsgemäß durch eine nicht zu geringe Ausführlichkeit der Tafel näher kommt, hätte hier durch Verengung des Intervalls nicht gut entsprochen werden können; eher wohl durch Tabulierung der höheren Differenzen. Im übrigen zeigt aber das Werk auch durch seine Übersichtlichkeit in der Anordnung und Ausstattung die Gediegenheit seines Inhaltes an. Lp.

J. Peters. Siebenstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktion für jede Bogensekunde des Quadranten. Stereotypausgabe. Leipzig: Wilhelm Engelmann. VIII u. 921 S. Lex. 8°.

„Die Tafel enthält auf 920 Seiten 648 000 Logarithmen der trigonometrischen Funktionen und 14 400 Werte der Hülfsgrößen S und T. Auf den ersten Seiten bis S. 61 sind die Werte von je zwei Bogenminuten untergebracht; von Seite 62 ab bis zum Schluß der Tafel enthält jede Seite die Werte von drei Minuten. Innerhalb jeder Bogensekunde wurden die vier Funktionen Sinus, Tangens, Kotangens, Kosinus in vier nebeneinander liegenden Spalten vereinigt, so daß der unmittelbare Übergang von einer Funktion auf eine beliebige andere des gleichen Arguments sich mit großer Leichtigkeit vollzieht. Die Argumente sind für jede Seite nur einmal hingestellt: für die Winkel von 0° bis 45° findet man die Grad- und Minutenzahl am Kopf der Seiten und die zugehörige Sekundenzahl links am Rande in der ersten, oben mit ″ bezeichneten Spalte; für die Winkel 45° bis 90° stehen die Grade und Minuten am Fuße der Seiten, die Sekunden an der äußersten rechten, unten mit ″ bezeichneten Spalte. Die in der oberen, durch dicke Striche abgespalteten Zeile befindlichen Überschriften sin, tang, cotg, cos gehören zu den Winkeln 0° bis 45°, während die Unterschriften cos, cotg, tang, sin den Winkeln 45° bis 90° zuzueignen sind.“

Bei der Herstellung der Tafel ist die zwölfstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen für jede Bogensekunde des Quadranten zurate gezogen worden, die bei der Bearbeitung der achtstelligen Logarithmentafel von Bauschinger und Peters entstanden (vgl. F. d. M. **41**, 1051, 1910) und deren Fehlerfreiheit durch ihre Herstellungsart bewiesen war. Die wenigen, bei Abkürzung auf 7 Dezimalen zweifelhaft bleibenden Werte (6 unter 500 400) sind durch den

Verf. und Witt einer unabhängigen zweimaligen Neurechnung bis auf mindestens 16 Dezimalen unterzogen worden. „So kann man mit Sicherheit behaupten, daß die Werte der Tafel frei von jeglichem Rechenfehler sind. Ich hoffe ferner, daß die Tafel ebenso rein von Druckfehlern ist. Diese Hoffnung gründet sich darauf, daß sich bei der letzten Korrektur, die ich selbst vollständig nach den Stereotypabzügen gelesen habe, durchschnittlich auf je zwei Bogen nur noch ein Fehler fand.“

Zum Schluß dieser Anzeige möge der letzte Absatz der ausführlichen Rezension von P. V. Neugebauer in der Astron. Vierteljahrsschrift **46**, 218-221, hier Platz finden. „Kurz zusammenfassend können wir mit Recht behaupten, daß die Tafel von Peters ein in jeder Hinsicht mustergültiges Werk darstellt, dem hoffentlich die Anerkennung in der Praxis nicht versagt bleiben wird. Gerade auf dem Gebiet der Tafelliteratur finden sich so viele minderwertige Leistungen, da die scheinbar einfache Aufgabe, eine Tafel herauszugeben, für alle jene verlockend erscheint, die von den Bedürfnissen der Praxis eine herzlich geringe Kenntnis besitzen. In dieser Hinsicht ist namentlich auf die zahlreichen kleinen Tafelausgaben für den Schulgebrauch hinzuweisen, die für die wirkliche Praxis mit wenigen Ausnahmen einfach unbrauchbar sind, deren großer, eben durch den Schulgebrauch bedingter Absatz aber das Aufkommen einer wirklich guten Tafel gleicher Art aus geschäftlichen Gründen unmöglich macht. Die Herstellung von Tafelwerken, mögen sie klein oder groß sein, ist eine Aufgabe, die in voller Exaktkeit nur von einem erfahrenen Praktiker der Wissenschaft gelöst zu werden vermag, und von der Unberufene unter allen Umständen fernbleiben sollten. Um so erfreulicher ist es daher, auf eine Erscheinung hinweisen zu dürfen, die sich über das gewöhnliche Niveau der Tafelwerke weit erhebt.“ Lp.

J. Peters. Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Kosinus zur genauen Berechnung von zwanzigstelligen Werten sämtlicher trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Arguments sowie ihrer Logarithmen. Berl. Abh. 1911, 54 S.

I. Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Kosinus von 10 zu 10 Bogenminuten (S. 12-18).

II. Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Kosinus nebst ihren Differenzen für jede Bogenminute von $0^0 0'$ bis $0^0 10'$ (S. 20-54).

Lp.

H. Metzner. Logarithmisch-trigonometrische Tafel für Winkel im Strichmaß. (Neustrich.) ($90^0 = 1600^{ns}$, $1^{ns} = 3{,}375' = 3' 22'',5$). Mitt. üb. Art. u. Gen. 1911, 645-669.

„Die nachfolgenden Tabellen ermöglichen die Umrechnung vom Neustrich in die Sexagesimal-, kombinierte und Zentesimalteilung. Die Maßzahlen von Winkeln bis ungefähr 11^0, in Neustrich gemessen, können den Maßzahlen in Strich, entsprechend der Bogenlänge von 0,001 des Halbmessers, praktisch gleich gesetzt werden ($200^s = 11^0 28'$). Für größere Winkel ist die Maßzahl des Neustrich gleich der um 2% vermehrten Maßzahl des Strich.“

„Derzeit sind in der Praxis des Schießens mehrfache Winkelmaße im Gebrauch. Die verschiedenen Richt- und Beobachtungsmittel, die Dienstbücher über das Schießwesen sind noch mit verschiedenen Winkelmaßen ausgestattet, wenngleich die Absicht besteht, allmählich das Strichmaß überall zur Anwendung zu bringen" (nämlich in Österreich). Lp.

N. E. Lomholt, A. K. Erlang. Om Indretningen og Beregningen af fircifrede Logaritmetabeller. (Über die Einrichtung und Berechnung vierstelliger Logarithmentafeln.) Nyt Tidskr. for Math. 22, B, 8-12.

Diskussion über die Zweckmäßigkeit der Methode, nach welcher der letztgenannte eine vierstellige Logarithmentafel mit Differenztafel berechnet hat (1910), so daß der mittlere Fehler aller Logarithmen, welche aus der Tafel abgeleitet werden können, ein Minimum wird. P. H.

W. Greve. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Ausg. A u. B. Bielefeld: Velhagen u. Klasing. 100, bzw. 154 S. 8°.

Ausgabe B enthält außer den Tabellen der Ausgabe A recht brauchbare Tabellen aus den Gebieten der Naturwissenschaft. Op.

J. Morawetz. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst einigen Hülfstafeln. Wien: F. Tempsky, Leipzig: G. Freytag. 51 S. 8°.

Von den Hülfstafeln seien erwähnt: Potenzen der Verzinsungsfaktoren q^n, Sterblichkeitstafel, Bogenlängen für den Halbmesser $r = 1$, Verwandlung der Minuten und Sekunden in Teile eines Grades, Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 99, Quadratzahlen der Zahlen von 1 bis 999, Kubikzahlen der Zahlen von 1 bis 99. Ba.

M. Schilling. Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht, veröffentlicht durch die Verlagshandlung von Martin Schilling in Leipzig. Mit 106 Abbildungen. Siebente Auflage. Leipzig: Martin Schilling. XVI u. 172 S. 8°.

„Der erste Teil des Kataloges führt die Modelle in der Reihenfolge ihrer Veröffentlichung auf und ermöglicht eine schnelle Orientierung über die Zeit der Entstehung und über die Urheber der einzelnen Serien und Nummern. Er gibt am besten Aufschluß über die bequemste Form des Bezuges der Modelle, über ihre Preise und deren Ermäßigung bei Bestellung ganzer Serien. Der zweite Teil enthält eine systematische Anordnung der Modelle und gewährt somit einen Überblick über das in den einzelnen mathematischen und physikalischen Wissenszweigen Gebotene. Er hebt die charakteristischen Merkmale

der verwandten Modelle aus den verschiedenen Serien hervor und soll vornehmlich dem Fachmanne die Aufgabe erleichtern, die für seine speziellen Zwecke gewünschten, insbesondere die für die einzelnen Vorlesungen geeigneten Modelle aufzufinden. Dieser Teil eignet sich also vorzugsweise auch zum Studium für solche Mathematiker, die in das Verständnis der einzelnen Modellgruppen eindringen wollen."

Die Modelle aus dem Schillingschen Verlage sind so verbreitet, und ihr Wert ist so anerkannt, daß die vorstehende Stelle des Vorwortes zum Kataloge genügt, um den Zweck dieses Katalogs in das rechte Licht zu stellen. Selbst ohne die Modelle zu besitzen, wird der aufmerksame Leser aus dem Katalog manche mathematische Belehrung erhalten; daher rechtfertigt es sich, daß im Jahrbuche auf diese Schrift nachdrücklich hingewiesen wird. Eine Reihe der besten Mathematiker hat in den Modellen viele Mühe und Arbeit dauernd niedergelegt, hat in ihnen sich bleibende Denkmale errichtet, monumentum aere perennius. Lp.

Weitere Literatur.

M. W. Frankl. Der Verhältniskalkül. Ein Beitrag zur logischen Algorithmik und zur Gegenstandstheorie. Progr. 23 S. 8°.

E. W. Hobson. La mathématique moderne. Revue scient. **16**, 99-111.

E. W. Hobson. Presidential address. Brit. Ass. Rep. Sheffield **80**, 500-522.

J. Renard. La pédagogie à l'Université. Formation des professeurs d'athénée et spécialement des professeurs des mathématiques. Liége: Dessain. 102 S. 8°.

É. Borel. Les probabilités et M. Le Dantec. Rev. du mois. **12**, 77-91.

E. W. Castle. A graduation of the combined experience table of mortality to Makeham's formula by the method of moments. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **18**, 61.

Y. Delages. Le raisonnement et l'intuition dans l'appréciation des probabilités. Rev. scient. **16**, 129-140.

G. Galán. Algunos conceptos matemáticos aplicados á la Estadística. Rev. Soc. Mat. Esp. **1**, 82-92, 120-127.

H. de la Goupillière. Théorie algébrique d'un jeu de société. Rev. scient. **15**, 1-4.

Das Datum der Geburt nach gewissen Angaben zu finden. Lp.

W. H. Echols. Investigation of the value of an infinite series on the boundary of the region of convergence. Bull. Philos. Soc. Univ. Charlottesville Virg. 1911, 13 S. gr. 8°.

E. Fabry. Théorie des séries à termes constants. Applications aux calculs numériques. Paris: A. Hermann et Fils. 203 S. 8°.

J. Heckel. Über trigonometrische Reihen. Reichenberg. 31 S. 8°.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood. The relations between Borel's and Cesàro's methods of summation. Lond. M. S. Proc. (2) **10**, V-VI.

W. Meiser. Lösungen zu Aufgaben aus der algebraischen Analysis nach J. Lieblein bearbeitet (Fortsetzung). Nürnberg: Korn. III u. 59 S. 8°.

K. Bochow. Eine einfache und umfassende Methode zur Ableitung der Differentiation der Potenz und der Exponentialgröße in Prima. Unterrichtsbl. f. Math. 17, 63-65.

Mit Hülfe von Funktionalgleichungen. Lp.

G. D. Birkhoff. New proof of a theorem concerning matrices of analytic functions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) 17, 64.

E. Cohn. Physikalisches über Raum und Zeit. (Vortrag.) Leipzig: B. G. Teubner. 24 S. 8°.

Menneret. Mouvement oscillatoire et mouvement uniforme des liquides dans les tubes cylindriques. Coefficient de frottement interne (Thèse). Ann. Univ. Grenoble 23, 202-364; Journ. de Phys. (5) 1, 753-766, 797-804.

Hütte. Des Ingenieurs Taschenbuch. 21. Aufl. 3 Bände. XVI u. 1138 S., VII u. 1043 S., VIII u. 1153 S. Berlin: W. Ernst u. Sohn. 8°.

M. Merriman. The American civil engineers' pocket book. New York: Wiley. VIII u. 1380 S. 16mo.

C. P. Steinmetz. Engineering mathematics. A series of lectures delivered at Union College. New York: McGraw-Hill. XVIII u. 292 S. 4°.

M. Foerster. Taschenbuch für Bauingenieure. Berlin: J. Springer. XV u. 1912 S. 8°.

J. v. d. Breggen. Vademecum der Wiskunde. Zutphen. 81 S. 8°.

G. Dahlhaus. A. Riemann. Mathematisches Formelbuch. 1. Teil. 62 S. 2. Teil 45 S. (Autographiert). Berlin: M. Günther.

K. L. Freymann. Praktische Lösungen mathematischer Aufgaben. Frankfurt a. M.: Gerheim. 15 S. 8°.

K. L. Hagström. Matematiska uppgifter i studentexamen för latingymnasiet med anvisningar och svar. Linköping: Carlson. 16 S. 8°.

W. A. Chase. Higher accountancy, principles and practice. 2 volumes. Chicago: La Salle Extension University. 8°.

W. F. Fratcher. Instantaneous calculator. Detroit. 6 S.

J. Bauschinger u. J. Peters. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen. II. Bd. Tafel der achtstelligen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. Stereot. Ausg. Leipzig: W. Engelmann. 952 S. Lex. 8°.

C. Bouvart et A. Ratinet. Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales. 10e édition. Paris: Hachette. 176 S. 8°.

A. G. Hall and F. G. Frink. Trigonometric and logarithmic tables. New York: Holt. III u. 97 S. 8°.

J. C. Hannyngton. Table of logarithms and anti-logarithms (Four figures), 1 to 10,000. London: C. and E. Layton. IV u. 41 S.

J. Hoüel. Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques. Nouvelle édition, revue et augmentée. Paris: Gauthier-Villars.

J. G. Hun and C. R. Mac Innes. Logarithmic, trigonometric, and other tables. New York: Macmillan. II u. 204 S. 8°.

E. V. Huntington. Four place tables of logarithms and trigonometric functions. Unabridged edition. Cambridge, Mass., U. S. A., The Harward Cooperative Society. London: E. and F. N. Spon, Ltd., 33 S.

Vgl. Nature **89**, 318-319, 1912.

E. T. Köhler. Manuale logaritmico-trigonometrico, contenente i logaritmi volgari o di Briggs di tutti i numeri sino a 108 000 con 7 decimali etc. Leipzig: Tauchnitz. XXXVIII u. 388 S. Lex. 8°.

F. W. Küster. Logarithmische Rechentafeln für Chemiker und Pharmazeuten. 11. Aufl. Leipzig: Veit u. Co. 107 S. kl. 8°.

O. Müller. Tavole di logaritmi con cinque decimali. 11ª edizione, aumentata delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione, per cura di M. Rajna. Milano: Hoepli. XXXVI u. 191 S. 16mo.

E. Erskine Scott. Tables of logarithms and anti-logarithms to five places. London: C. and E. Layton. 383 S.

J. Seyboth. Tables logarithmiques et trigonométriques à quatre décimales. 2e édition. Paris: Challamel. 36 S. 4°.

E. Sperotti. I logaritmi per i ragioneri: tavole dei logaritmi volgari a otto decimal dei numeri da 1 a 100 000. Rocca S. Casciano: Capelli. 154 S. 16mo.

C. J. Woodward. ABC of five figure logarithms and tables for chemists, including electro-chemical equivalents, analytical factors, gas reduction tables, and other tables useful in chemical laboratories. New York: Spon. 75 S. 12mo.

Fr. Perfetto. Multiplicator Perfettus (Multiplicateur parfait). Tables pour rendre rapides et faciles les multiplications, divisions, élévations au carré et extractions de racines carrés. Paris: Gauthier-Villars. 4°.

Barlow. Tables of squares, cubes, square roots. New York: Spon. 200 S. 12mo.

G. Bernardi. Tavole contenenti i doppi, i quadrati, i tripli dei quadrati ed i cubi dei numeri interi da 1 a 1000, ecc. 2ª edizione, rifatta. Bologna: Beltrami. 27 u. 25 S. 8°.

J. Gaunin. Tables pour le tracé des courbes de chemins de fer, routes et canaux. Première partie: Tables trigonométriques; par J. Gaunin. Seconde partie: Recueil de coordonnées; par J. Gaunin, L. Houdaille et A. Bernard. Nouvelle édition, revue et corrigée. Paris: Dunod et Pinat. VI u. 181, XIV u. 182 S. 8°.

Kühtmanns Rechentafeln. Ein handliches Zahlenwerk mit zwei Millionen Lösungen, die alles Multiplizieren und Dividieren ersparen. Nebst Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. Dresden: G. Kühtmann. 476 S. gr. 8°.

J. Weisbach. Tafel der vielfachen Sinus und Kosinus, sowie der vielfachen Sinus versus von kleinen Winkeln. Zum Gebrauch für praktische Geometer. 8. Stereot.-Ausg. Berlin: Weidmann. 28 S. gr. 8°.

E. Schultz. Mathematische und technische Tabellen für Maschinenbauschulen und für den Gebrauch in der Praxis. Ausgabe II A mit Logarithmen. 8. Aufl. Essen: Baedeker. X u. 311 S. 8°.

W. Hall. Tables and constants to four places for use in technical and nautical computation. New York: Putnam. IX u. 60 S. 8°.

J. Castell-Evans. Physico-chemical tables, for the use of analysts, physicists, chemical manufacturers, and scientific chemists. Vol. II, Physical and analytical chemistry. London: C. Griffin and Co., Ltd., XIV u. 549-1235 S. [Nature 88, 344-345, 1912.]

G. W. C. Kaye and T. H. Laby. Tables of physical and chemical constants, and some mathematical functions. London: Longmans, Green and Co. VIII u. 154 S. [Nature 88, 477, 1912; Math. Gaz. **6**, 230, 1912.]

J. C. Fergusson. Fergusson's percentage unit of angular measurement with logarithms; also a description of his percentage theodolite and percentage compass. For the use of surveyors, navigating officers, civil and military engineers, universities, and colleges. London: Longmans, Green & Co. IXVIII u. 468 S. 8°.

Schwedischer mathematischer Preis für 1916.

Auf dem fünften internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge wurde beschlossen, daß der sechste Kongreß in Stockholm im Jahre 1916 zusammentreten sollte. Se. Majestät König Gustav V. ließ bei dieser Gelegenheit mitteilen, daß er geruhte, das Protektorat über diesen Kongreß zu übernehmen.

Im Anschluß hieran hat Se. Majestät beschlossen, als Preis für eine bedeutende Entdeckung innerhalb der Theorie der analytischen Funktionen eine goldene Medaille mit dem Bildnis Karl Weierstrass' nebst einer Geldsumme von 3000 Kronen auszuteilen.

Bewerber um diesen Preis haben ihre Abhandlungen an den Hauptredakteur der „Acta Mathematica“ vor dem 31. Oktober 1915, der hundertjährigen Wiederkehr des Geburtstages Karl Weierstrass', einzusenden. Die Abhandlungen, die einen Gegenstand entweder innerhalb der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen oder innerhalb der Theorie einer speziellen, besonders wichtigen Funktionenklasse behandeln können, sind mit einem Motto sowie Namen und Adresse des Verfassers — entweder offen angegeben oder in versiegeltem Umschlag — zu versehen und dürfen nicht zuvor veröffentlicht worden sein.

Se. Majestät hat bestimmt, daß ein Bericht über den Inhalt der Abhandlungen mit einer Beurteilung ihrer wissenschaftlichen Bedeutung zum Anhalt Sr. Majestät von den Mitgliedern der ersten Klasse der Schwedischen Akademie der Wissenschaften zu erstatten sei. Die Mitglieder dieser Klasse sind gegen-

wärtig: die Herren Mittag-Leffler, Falk, Phragmén, Wiman, Bendixson und v. Koch. Außerdem wird ihnen Herr Fredholm adjungiert werden.

Die preisgekrönte Abhandlung sowie auch die Abhandlungen, die sonst als besonders bedeutend einer Auszeichnung würdig befunden werden, erscheinen in den „Acta Mathematica" und dürfen nicht vorher auf andere Weise veröffentlicht werden. Die übrigen Abhandlungen werden unter der für diesen Zweck angegebenen Adresse zurückgesandt.

Die Abhandlungen können nach Wahl des Verfassers in deutscher, englischer oder französischer Sprache abgefaßt sein.

Napier Tercentenary Celebration, July 1914.

John Napier's Logarithmorum Canonis Mirifici Descriptio was published in 1614; and it is proposed to celebrate the tercentenary of this great event in the history of mathematics by a Congress, to be held in Edinburgh on Friday, 24th July 1914, and following days.

The Celebration is being held under the auspices of the Royal Society of Edinburgh, on whose invitation a General Committee has been formed, representing the Royal Society of London, the Royal Astronomical Society, the Town Council of Edinburgh, the Faculty of Actuaries, the Royal Philosophical Society of Glasgow, the Universities of St Andrews, Glasgow, Aberdeen, and Edinburgh, the University College of Dundee, and many other bodies and institutions of educational importance.

Through the favour of the Editor of „Jahrb. über die Fortschr. der Math." the President and Council of the Royal Society of Edinburgh have now the honour of giving a general invitation to mathematicians and others interested in this coming Celebration.

The Celebration will be opened on the Friday with an Inaugural Address by Lord of Appeal Sir J. Fletcher Moulton, F. R. S., LL. D. (Edin.), etc., followed by a Reception given by the Right Honourable the Lord Provost, Magistrates and Council of the City of Edinburgh. On the Saturday and Monday the historical and present practice of computation and other developments closely connected with Napier's discoveries and inventions will be discussed.

A Memorial Service will be held in St Giles' Cathedral on the Sunday.

Among many who have expressed a warm interest in the Celebration and who hope to take part in the Congress, may be mentioned Professor Andoyer, Paris; Professor J. Bauschinger, Straßburg; Professor Hume Brown, Historiographer Royal for Scotland; Professor F. Cajori, Colorado, U.S.A.; Professor G. A. Gibson, Glasgow; Dr. J. W. L. Glaisher, Cambridge; Professor Lang, St Andrews; Professor Macdonald, Aberdeen; Professor E. Pascal, Naples; Professor Karl Pearson, London; Professor Eugene Smith, New York; Professor Steggall, Dundee; Professor Whittaker, Edinburgh.

Merchiston Castle, the residence of Napier, has long been occupied by the well-known public school, which draws pupils from all parts of the British Empire. The Governors of the School have kindly invited the members of the Congress to visit the Castle and Grounds on the Saturday afternoon.

Relics of Napier, collected by Lord Napier and Ettrick and other representatives of the Family, will also be on view; and it is intended to bring together for exhibition books of Tables and forms of Calculating Machines, which may reasonably be regarded as natural developments of the great advance made by Napier.

Individuals, Societies, Universities, Public Libraries, etc., may become Founder Members on payment of minimum subscription of £ 2; and each Founder Member will receive a copy of the Memorial Volume, which will contain addresses and papers read before the Congress, and other material of historic and scientific value. It is important to secure as many Founder Members as possible, so that a Volume may be brought out worthy of the memory of Napier.

Ordinary Subscribers attending the Celebration may receive copies of the Memorial Volume at a reduced price.

Subscriptions and Donations should be sent to the Honorary Treasurer, Mr Adam Tait, Royal Bank of Scotland, St Andrew Square, Edinburgh.

All who are interested in this proposed Celebration are respectfully invited to communicate with the General Secretary of the Royal Society of Edinburgh, 22 George Street, Edinburgh, and to announce their intention of being present.

January 1914.

C. G. Knott,
Royal Society of Edinburgh.
General Secretary,

Namenregister.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Karl Ohrtmann und Felix Müller.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von **Albert Wangerin** und **Erich Salkowski** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben
von
Emil Lampe.

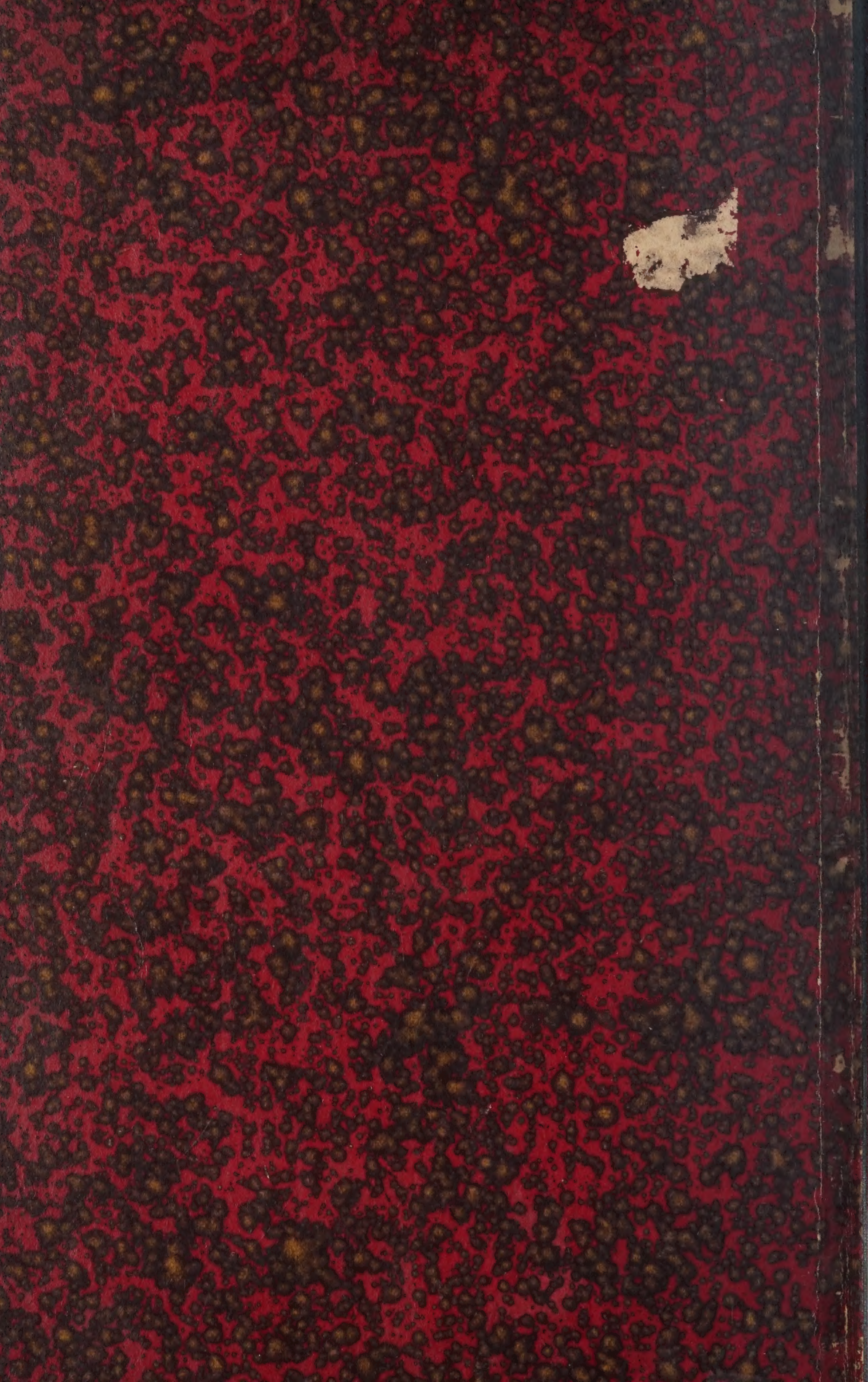
Band 42. Jahrgang 1911.
(In 3 Heften.)
Heft 3.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1914.

Bogen 46 bis 72.

VERLAG GEORG REIMER IN BERLIN






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5JA C001
JAHRBUCH UBER DIE FORTSCHRITTE DER MATHE
42:2-3 1911
3 0112 016789239